现代数学基础丛书 139

反应扩散方程引论

（第二版）

叶其孝 李正元
王明新 吴雅萍 著

科学出版社

现代数学基础丛书　139

反应扩散方程引论

（第二版）

叶其孝　李正元　王明新　吴雅萍　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

在物理学、化学、生物学、经济学及各种工程问题中提出的大量反应扩散问题，日益受到人们的重视. 本书详细阐述了与这些问题有关的数学理论、方法及其应用，论证严谨，深入浅出，有一定的自封性，能把读者较快地带到反应扩散方程各种问题的研究中去. 每章末附有大量习题，有助于读者深入理解本书的内容.

本书可作为高等院校数学、应用数学或其他有关专业的大学生、研究生的教材或教师的教学参考书，也可供相关研究领域的科研人员和工程技术人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

反应扩散方程引论/叶其孝等著. —2 版. —北京：科学出版社，2011
（现代数学基础丛书；139）
ISBN 978-7-03-032190-9

Ⅰ. ①反… Ⅱ. ①叶… Ⅲ. ①反应扩散方程 Ⅳ. ①O175.26

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 174405 号

责任编辑：赵彦超 杨欣河／责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1990 年 2 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2011 年 9 月第 二 版 印张：29 1/2
2011 年 9 月第四次印刷 字数：567 000
印数：4 519—6 518

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

第二版前言

本书第一版出版 20 多年来, 受到了许多读者的欢迎, 同时读者也提出了不少很好的建议, 其中包括出版修订的第二版. 同时在这期间反应扩散方程的研究也有了很大的进展, 因此我们决定修订本书.

本书第二版的修订主要是由王明新教授和吴雅萍教授完成的. 我们的原则是既保留第一版的格局, 尽可能使本书有一定的自封性, 能把读者较快地带到反应扩散方程各种问题的研究中去, 又尽可能地把最新的研究成果以适当的方式表述出来.

第二版最大的变化是增加了处理有关行波解的稳定性的理论和方法, 吴雅萍教授写了全新的第 10 章 "行波解稳定性的基本理论及谱方法的应用", 相应地, 对原书的第 2, 9, 10 章 (第二版的第 1, 8, 9 章) 也做了较大幅度和细致的修改. 王明新教授对原书的第 1 章及 3—8 章 (第二版的附录和第 2—7 章) 进行了细致的修改, 并对全书做了通校.

对第二版中的修改内容作如下说明:

第 1 章新增了 1.4 节 "退化 Fisher 方程行波解的存在性"; 修改了定理 1.2.15 的叙述 (对应第一版的定理 2.2.15, 第一版中没有给出证明) 并给出详细证明 (在第 10 章将用到该定理的结果); 修改了 1.5 节的评注, 增加了关于两种奇异摄动法的介绍.

第 2 章的 2.3.2 节 "二阶线性椭圆算子的特征值问题" 做了较多的改动.

第 3 章新增 3.4 节 "方程组初边值问题常数平衡解的稳定性" 和习题 3.1.

第 5 章的 5.2 节新增了一个例子 (例 3).

第 6 章的评注中增加了 Turing 模式的介绍.

第 8 章新增 8.3 节 (含 8.3.1—8.3.3 节)"C_0 半群对应的线性与非线性方程的初值问题"; 新增了定理 8.2.8 (关于连续半群的指数衰减的充要条件); 新增了定理 8.4.13 (关于扇形算子更弱的判别条件) 并给出证明; 减弱了引理 8.4.12 的条件; 新增了注 8.1(强椭圆算子在 $L_\infty(\Omega), L_1(\Omega), C(\bar{\Omega})$ 空间中生成的半群); 新增了 8.9 节 "评注"(半群理论在更一般的二阶抛物方程组中的推广和应用); 新增了习题 8.12, 8.14, 删去了第一版习题 9.11, 9.12.

第 9 章增加了与连续半群有关的动力系统理论、线性化稳定性理论介绍, 修改了原来第 10 章的假设 (针对连续半群情形给出另外的假设 H1); 新增了注 5.1 和注 6.1; 修改了定理 9.6.1(增加连续半群情形的等价条件); 新增了定理 9.6.3 (连续半群

情形的线性化稳定性理论); 新增了定理 9.6.8 (减弱定理 9.6.7 的谱条件) 及相应的注 6.3.

许多读者对第一版第 1 章 "常微分方程准备知识" 反映很好, 我们决定保留, 但是为了不增加太多的篇幅, 去掉了所有的证明 (因为在一些经典的常微分方程教材中容易查到), 并作为附录放在第二版中, 以方便读者的使用.

第二版叙述更为严谨, 在正文的陈述或评述中反映了最新的研究成果、方法和参考文献, 改正了一些表述或印刷错误.

在本书 20 多年的教学实践和这次的修订中得到了许多读者非常有益的建议和帮助. 我们要特别感谢美国 Tulane 大学的王学锋教授, 他详细审阅了第二版初稿的第 1, 10 章和有关章节, 提出了非常中肯和具体的修改意见. 感谢加拿大 Alberta 大学的 Joseph So 教授、美国 Ohio 州立大学的楼元教授、兰州大学的李万同教授、东北师范大学的张凯军教授、北京工业大学的王术教授和北京交通大学的刘迎东副教授等提出的许多很好的修改意见.

由于我们水平有限, 书中会有一些错误和不当之处, 真诚地希望读者批评指正.

作 者

2011 年 5 月

第一版前言

本书是根据作者 1982 年以来在北京大学、郑州大学、武汉大学和山西大学等院校讲课的讲稿整理而成的. 它具有一定的自封性, 能把读者较快地带到反应扩散方程各种问题的研究中去.

现代科学技术的发展在很大程度上依赖于物理学、化学和生物学的成就和进展, 而这些学科自身的精确化又是它们取得进展的重要保证. 学科的精确化往往是通过建立数学模型来实现的, 而大量的数学模型可归纳为所谓的反应扩散方程.

近二十多年来反应扩散方程的研究日益受到重视. 这是因为反应扩散方程涉及的大量问题来自物理学、化学和生物学中众多的数学模型, 因而有强烈的实际背景; 另一方面, 在反应扩散方程的研究中, 对数学也提出了许多挑战性的问题, 因此正引起愈来愈多的数学家、物理学家、化学家、生物学家和工程师的注意.

1. *反应扩散方程及其基本问题*

通常在数学上把以下半线性抛物型方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(x,u)\Delta u + f(x,u,\text{grad } u) \quad ((x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+) \tag{1}$$

称为反应扩散方程组, 其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n, m \geqslant 1, x = (x_1, \cdots, x_n), u = (u_1, \cdots, u_m)$, $\Delta u = (\Delta u_1, \cdots, \Delta u_m)$,

$$\text{grad } u = (\text{grad } u_1, \cdots, \text{grad } u_m), \quad \text{grad } u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u_i}{\partial x_n}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

$D(x,u) = (d_{ij}(x,u))(i,j = 1,2,\cdots,m)$. 根据不同的背景可以研究初值问题, 即 $\Omega = \mathbb{R}^n$, 满足初始条件

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \tag{2}$$

也可以研究各种边值问题, 即 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界, $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界, 满足边界条件

$$u = g(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (\text{Dirichlet 条件}) \tag{3}$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (\text{Neumann 条件}) \tag{4}$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ku = g(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (\text{Robin 条件}). \tag{5}$$

(1) 的与时间 t 无关的解满足

$$-D(x,u)\Delta u = f(x,u,\text{grad } u) \quad (x \in \Omega). \tag{6}$$

把定常问题 (6), (3) 或 (6), (4) 或 (6), (5) (其中 $g(x,t) \equiv \bar{g}(x) = \lim_{t\to\infty} g(x,t)$) 的解称为问题 (1), (2), (3) (或 (4) 或 (5)) 的平衡解或定态解. (1) 的空间均匀的解满足常微分方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \bar{f}(u) \quad (f(x,u,\nabla u) \equiv \bar{f}(u)), \tag{7}$$

$$u(0) = u_0. \tag{8}$$

还可以研究 (1) 的行波解 $u(x,t) = u(x - c\,t)$(设 $n = 1$).

由于 (6), (7) 是 (1) 的特殊形式, 因此也把 (1), (6), (7) 的耦合组称为反应扩散方程组.

(1) 中的 D 和 f 也可以依赖于 $t, D(x,u)\Delta u$ 也可以替换为非线性椭圆算子, 边界条件也可以是非线性的, f 也可以是一个泛函, 等等.

反应扩散方程研究中的基本问题是:

(i) (1) 的行波解的存在唯一性及稳定性;

(ii) (1) 的初值问题、初边值问题的整体解 (包括周期解和概周期解) 的存在唯一性及渐近性;

(iii) 平衡解的存在性, 尤其是当问题依赖于某些参数时平衡解的分叉结构, 以及平衡解的稳定性;

(iv) 当没有整体解时解在有限时间内的 "爆炸"(blow up) 问题, 以及解的其他性质, 例如, "熄灭区"(dead region) 问题;

(v) 计算方法问题; 解决 (i)—(iv) 中各种问题的计算问题有一些困难, 需要发展一些新的行之有效的计算方法.

2. 物理学、化学和生物学中提出的反应扩散方程例举

正因为 (1), (6), (7) 的耦合组在很大程度上反映了 "扩散" 和 "反应" 的相互作用, 也反映了分量 u_i 之间的相互作用, 因而为许多实际问题的数学模型的建立提供了条件. 为说明反应扩散方程的各种实际背景, 这里仅列举若干例子, 简单起见, 只写出方程. 如不特别指出参考文献, 请参看 [Ye].

A. 半导体方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} = q\mu_n \text{div}(\alpha_n \text{ grad } n - n \text{ grad } V) - R_n(n,p), \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} = q\mu_p \text{div}(\alpha_p \text{ grad } p + p \text{ grad } V) - R_p(n,p), \\ \Delta V = -q(p - n + D), \end{cases} \tag{9}$$

其中 $D, q, \mu_n, \mu_p, \alpha_n, \alpha_p$ 是正常数, R_n, R_p 是给定的函数.

B. 燃烧方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = K_1 \Delta T + Q_n \exp\left(-\dfrac{E}{RT}\right), \\ \dfrac{\partial N}{\partial t} = K_2 \Delta n - n \exp\left(-\dfrac{E}{RT}\right). \end{cases} \tag{10}$$

C. Belousov-Zhabotinski 反应的 Noyes-Field 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Lrv + u(1 - u - rv), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Mv - buv; \end{cases} \tag{11}$$

Brusslator 方程 (见 [Ro])

$$\begin{cases} u_t = a\Delta u + A - (B+1)u + u^2 v, \\ v_t = b\Delta v + Bu - u^2 v. \end{cases} \tag{12}$$

D. 神经传导的 Hodgkin-Huxley 方程

$$u_t = u_{xx} + I(u, w_1, w_2, \cdots, w_k),$$

$$w_{it} = \sum_{t=1}^{k} p_{ij}(u) w_t + q_i(u) \quad (i = 1, 2, \cdots, k). \tag{13}$$

E. 酶的数学模型

$$s_t = \Delta s - R(s, a) + (s_0 - s),$$

$$a_t = \beta \Delta a + [R(s, a) - d(a_0 - a)], \tag{14}$$

其中

$$R(s, a) = \frac{\rho a s}{1 + |s| + k s^2}.$$

F. 生态方程 (群体增长、传染病、病虫害等)

$$u_t = \Delta u + uM(u, v) + \int_0^t F(u(x, s), v(x, s)) \mathrm{d}s,$$

$$v_t = \Delta v + uN(u, v) + \int_0^t G(u(x, s), v(x, s)) \mathrm{d}s. \tag{15}$$

其他方程, 如渗流方程、超导方程、液晶方程、反应器动力学方程; 各种生物现象中提出的众多数学模型; 医学中提出的各种方程; 传热以及污染问题中出现的对流扩散方程等, 在此不一一列举了. 其中许多方程组比 (9)—(15) 更为复杂.

3. 本书内容的安排

反应扩散方程的研究涉及面很广，就一本书而言是不可能面面俱到的. 根据我们的教学和研究工作的经验，抓住主要问题和基本方法是入门的关键，掌握住这一点，在阅读进一步的文献和做研究工作时都会获益匪浅. 本书各章的内容就是尽可能按这种思想来安排的.

由于在反应扩散方程的研究中用到的方法，许多是常微分方程理论中的方法，或是受启发于这种方法，或是常微方法和偏微方法的结合，因此我们把可能要用到的有关常微分方程的知识集中罗列在第 1 章中 (大多数没有证明)，以保持本书在某种意义下的自封性.

第 2 章主要讨论单个方程行波解的存在唯一性，所用的方法是相平面方法 (这是一个标准的一般性方法). 我们既讨论了单调有界非常数行波解 (即波前解) 的存在唯一性，也讨论了非单调 (甚至振动) 行波解的存在性. 由于篇幅有限，关于方程组行波解的讨论只好在本章末的评注中简要地加以叙述，并且我们只叙述有关方法和结果并尽可能列出最新进展的有关文献. 关于行波解的稳定性这一重要问题也只在评注中加以简要叙述.

在研究一些具体的反应扩散方程整体解及平衡解的存在性以及平衡解的稳定性时，上、下解方法 (或称单调方法) 是一个很有效的方法. 第 3 章给出了单个方程上、下解方法的有关理论的完整叙述，并给出了它的一些应用. 在本章中还罗列了本书中将用到的最大值原理、椭圆型及抛物型方程的先验估计及有关的存在唯一性定理. 本章还系统阐述了以后要经常用到的椭圆边值问题的特征值理论.

第 4 章主要讨论单个方程平衡解的稳定性问题，所讲述的方法是有普遍意义的，在讨论方程组的平衡解的稳定性时也是有参考价值的.

第 5 章专门讨论方程组的上、下解方法. 除了揭示它与单个方程的上、下解方法的不同外，还分别讨论了拟增 (减)、混拟、非拟单调情形反应扩散方程组的控制问题的引入以及上、下解的定义，由此证明了解的存在定理；本章还对椭圆组讨论了上、下解方法，并用上、下解方法研究非常数平衡解的稳定性.

方程组的最大值原理一般不成立，因而不能用它去得到解本身的最大模估计，从而给用 Schauder 不动点理论等方法证明解的存在性带来了巨大的困难. 受启发于常微分方程的反应扩散方程组不变区域理论的出现和发展，在某种程度上给出了解本身的最大模估计. 第 6 章论述了不变区域的本质，也指出了应用不变区域理论的困难所在.

平衡解的存在性以及当问题依赖于某些参数时平衡解关于参数的分叉结构是一个极其重要的问题，第 7, 8 两章专门讨论这个问题. 度理论已成为研究非线性问题中不可缺少的拓扑工具，第 7 章就是度理论在反应扩散方程中的应用. 首先我们

以较短的篇幅论述度理论的概要, 包括度的定义、性质与计算, 力求深入浅出, 既直观又准确. 然后论述度理论的应用, 利用度理论并将其与上、下解方法相结合讨论椭圆型边值问题的多解问题以及椭圆型方程和常微分方程的分叉问题. 通过解决几类典型问题, 尽可能使读者了解到问题的全貌. 第 8 章涉及常微分方程的二阶保守系统的边值问题, 当空间变量是一维时, 它是一类反应扩散方程的平衡解方程. 在这一章论述利用相图法讨论二阶保守系统边值问题解的存在性与解的个数的一般原理与步骤, 并给出了 Chafee 和 Infante 的一个例子, 利用相图法可以得到平衡解的全局与完整的分叉结构.

抛物型方程组的初值和初边值问题, 常常可看成是适当的 Banach 空间中的一个抽象常微方程的初值问题, 而第 9 章的半群方法正是解决这一问题的有效方法. 但是, 当把这一抽象方法用来解决具体的反应扩散方程的有关问题时, 必须要结合偏微分方程的有关结果, 特别是解的先验估计的有关结果. 为了选择正确的基本 Banach 空间, 必须要有一系列的嵌入定理. 因而本章的安排首先是讲清抽象理论 (扇形算子、分数幂算子、分数幂空间及有关抽象常微分方程的结果), 然后是讲怎样把抽象理论用到具体的问题中去. 通过例子说明怎样应用偏微分方程的先验估计及嵌入定理把具体问题纳入抽象框架, 怎么选择基本工作空间等. 我们相信通过这样的讲述会使读者更好地了解怎样使抽象理论发挥作用.

最后一章 (第 10 章) 主要研究抽象问题解的渐近性态, 论述了一些重要的概念和方法, 例如动力系统、极限集、Lyapunov 方法和线性化方法等, 并利用这些方法讨论若干反应扩散方程平衡解的稳定性, 通过例子说明如何构造 Lyapunov 函数, 如何证明线性特征值问题的最小特征值的正性等.

为使读者更好地掌握本书中所论及的理论和方法, 书中配有一定量的习题.

本书多数章末有评注, 简要论述正文中未涉及的问题或有关问题的最新进展.

本书的出版得到国家自然科学基金的资助, 谨此致谢.

由于作者水平有限, 书中定有一些错误和不当之处, 真诚地希望读者批评指正.

叶其孝　李正元

1985 年

目　录

第 1 章　行波解的存在唯一性

记 $u(x,t)=(u_1(x,t),\cdots,u_m(x,t))$, $f(u)=(f_1(u),\cdots,f_m(u))$, $D=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_m)$ 为正对角矩阵. 在研究形如

$$u_t = D\Delta u + f(u), \quad x\in\mathbb{R}^n$$

的反应扩散方程时, 常常要考虑所谓的 “永久型” (permanent type) 解, 即对一切 $t\in(-\infty,\infty)$ 都存在的解 $u(x,t)$. 这种解的一些常见类型有:

(1) 关于 t 是周期的解, 其中有:

① 与 x 无关的振荡解;

② 靶形图案解 (target patterns), 即 $u(x,t)=U(|x|,t)$, U 关于 t 是周期的;

③ 旋转螺线图案解 (rotating spiral patterns), 即 $n=2$, $x=(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $u(x,t)=U(r,\theta-ct)$, 并且 U 关于 $\xi=\theta-ct$ 是周期的.

(2) 行波解 (traveling waves), 即形为 $u(x,t)=U(x-ct)$ 的解, 其中 c 为速度向量 $c=(c_1,\cdots,c_n)$. 这种解的一些特殊类型有:

① 定常解 (stationary solutions), 即 $c=0$, u 与时间 t 无关. 定常解又叫平衡解或稳态解;

② 平面波解 (plane waves), 即 $u(x,t)=U((x-ct)\cdot\nu)=U(x\cdot\nu-|c|t)$, 其中 $\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_n)$ 是 c 方向的单位向量, 其中又分

ⓐ 波串解 (waves trains), 即 U 是周期的;

ⓑ 波前解 (waves fronts), 即 U 是单调有界的且不恒为常数;

ⓒ 脉冲解 (pulses), 即 $U(-\infty)=U(\infty)$, 且 U 不是常数.

本章中讨论行波解的存在性和唯一性. 只讨论 $n=1$, $m=1$ 的情形, 即空间变量是一维的方程式的行波解. 充分利用平面自治系统的已有结果, 即相平面方法来研究方程式

$$u_t = u_{xx} + f(u) \tag{I}$$

的行波解, 这里 x, $u\in\mathbb{R}$. 我们认为这种方法非常重要, 所以详细地加以叙述.

1.1　行波解的基本性质

方程 (I) 的形为 $u(x,t)=q(x-ct)$ 的解称为行波解, 其中 c 为实常数, 称为传播速度. 记 $\xi=x-ct$, $q'=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\xi}$. 易知 $q(\xi)$ 是方程 (I) 的行波解的充要条件是

$$q'' + cq' + f(q) = 0. \tag{II}$$

若 $q(\xi)$ 是单调有界的且不恒为常数, 则称 $q(\xi)$ 为方程 (I) 的波前解. 这时必存在极限 $\lim_{\xi\to\pm\infty} q(\xi) = q_\pm$ 且 $q_+ \neq q_-$. 通过变换

$$\bar{q} = \frac{q - q_-}{q_+ - q_-},$$

可规范化为

$$\lim_{\xi\to-\infty} q(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi\to\infty} q(\xi) = 1.$$

总假定 $f(u)$ 至少是连续的.

引理 1.1.1 设 $q(\xi)$ 是方程 (II) 的解且 $\lim_{\xi\to\pm\infty} q(\xi) = q_\pm$, 则

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} q'(\xi) = 0, \quad 且\ f(q_\pm) = 0.$$

证明 若 $\lim_{\xi\to\pm\infty} q'(\xi) = 0$, 则由方程 (II) 知, 极限 $\lim_{\xi\to\pm\infty} q''(\xi)$ 存在. 从而 $\lim_{\xi\to\pm\infty} q''(\xi) = 0$. 再由方程 (II) 得 $f(q_\pm) = 0$.

现设 $\limsup_{\xi\to\infty} q'(\xi) = a$, $\liminf_{\xi\to\infty} q'(\xi) = b$, 则 $a \geqslant b$. 若 $a > b$, 则存在 $\xi_n, \eta_n \to \infty$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} q'(\xi_n) = a, \quad \lim_{n\to\infty} q''(\xi_n) = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} q'(\eta_n) = b, \quad \lim_{n\to\infty} q''(\eta_n) = 0.$$

由方程 (II) 得

$$-ca = f(q_+), \quad -cb = f(q_+).$$

当 $c \neq 0$ 时得 $a = b$, 与 $a > b$ 矛盾. 因此只能有 $a = b$. 因为 $q(\xi)$ 有界, 所以 $a = b = 0$, 即 $\lim_{\xi\to\infty} q'(\xi) = 0$. 当 $c = 0$ 时, 直接由方程 (II) 得

$$\frac{1}{2}q'^2(\xi) + \int_0^{q(\xi)} f(\tau)\mathrm{d}\tau = 常数.$$

因此极限 $\lim_{\xi\to\infty} q'(\xi) = l$ 存在, 并且 $l = 0$.

类似可证 $\lim_{\xi\to-\infty} q'(\xi) = 0$. 证毕.

注 1.1 这里用到一个结论: 设 $u(\xi)$ 在 $[0,\infty)$ 上可导, 且

$$\limsup_{\xi\to\infty} u(\xi) = a > \liminf_{\xi\to\infty} u(\xi) = b,$$

则存在 $\xi_n, \eta_n \to \infty$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} u(\xi_n) = a, \quad \lim_{n\to\infty} u'(\xi_n) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} u(\eta_n) = b, \quad \lim_{n\to\infty} u'(\eta_n) = 0.$$

证明留给读者.

引理 1.1.2 设 $q(\xi)$ 是方程 (II) 的非常数解, 满足 $q(\pm\infty) = q_\pm$, $f(q_\pm) = 0$.

(1) 若 $q_+ = q_-$, 则 $c = 0$;

(2) 若 $q_+ \neq q_-$, 则

$$\int_{q_-}^{q_+} f(\tau)\mathrm{d}\tau \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \text{时}, \quad c \begin{cases} > 0, \\ = 0, \\ < 0. \end{cases}$$

证明 由方程 (II) 得

$$\frac{1}{2}(q'^2)' + cq'^2 + f(q)q' = 0.$$

对 ξ 从 $-\infty$ 到 ∞ 积分即得结论. 证毕.

定理 1.1.3 设 $f(0) = f(1) = 0$, $f \in C^1[0,1]$, $q(\xi)$ 是方程 (II) 的解, $q(-\infty) = 0$, $q(\infty) = 1$.

(1) $q(\xi)$ 是方程 (I) 的波前解的充要条件是: 当 $\xi \in (-\infty, \infty)$ 时, $q(\xi) \in [0,1]$;

(2) 若 $q(\xi)$ 是方程 (I) 的波前解, 则 $q(\xi)$ 严格单调上升, $q'(\xi) > 0$ 且值域为 $(0,1)$.

证明 显然, 只需证明若 $\xi \in (-\infty, \infty)$ 时 $q(\xi) \in [0,1]$, 则 $q'(\xi) > 0$. 令 $q'(\xi) = p(\xi)$, 有

$$q' = p, \tag{1.1}$$

$$p' = -cp - f(q). \tag{1.2}$$

解 $q(\xi)$ 对应于 qp 平面上连接 (1.1), (1.2) 的平衡点 $(0,0)$ 和 $(1,0)$ 的一条轨线, 它位于带形区域 $0 \leqslant q \leqslant 1$ 中. 由 (1.1) 式知, 当 $p > 0$ 时 $q'(\xi) > 0$, 即 ξ 增加时轨线向右, 当 $p < 0$ 时轨线向左. 所以这种轨线 (自身不交, 是一条简单曲线) 不能穿过 q 轴, 即永远有 $p \geqslant 0$ (图 1.1.1). 进一步证明轨线不能在 $(0,1)$ 中与 q 轴相碰. 若不然, 则有一点 $(q_0, 0)$ 在轨线上, $q_0 \in (0,1)$. 于是存在 $\xi_0 \in (-\infty, \infty)$, 使得

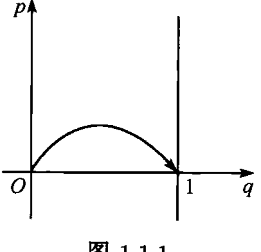


图 1.1.1

$$q(\xi_0) = q_0, \quad q'(\xi_0) = 0.$$

若 $q''(\xi_0) = 0$, 则 $f(q_0) = 0$. 由初值问题解的唯一性得 $q(\xi) \equiv q_0$, 矛盾. 因此 $q''(\xi_0) \neq 0$. 这意味着当轨线通过 $(q_0, 0)$ 点时 $p = q'$ 必须变号, 此与 $p \geqslant 0$ 矛盾. 因

此

$$p = q'(\xi) > 0, \quad \xi \in (-\infty, \infty).$$

从而 $q(\xi)$ 严格单调上升. 证毕.

1.2　波前解的存在性和唯一性

在 $f \in C^1[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$ 的前提下, 讨论

$$\begin{cases} q'' + cq' + f(q) = 0, \\ q(-\infty) = 0, \quad q(\infty) = 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

的严格单调解. 它等价于求解

$$\begin{cases} q' = p, \\ p' = -cp - f(q), \\ q(-\infty) = 0, \quad q(\infty) = 1, \quad p(\pm\infty) = 0, \\ p(\xi) > 0, \quad \xi \in (-\infty, \infty). \end{cases} \tag{2.2}$$

1.2.1　问题的转化

由前面的结果立即可得

引理 1.2.1　若问题 (2.1) 有解 q, 并且 $q \in (0,1)$, 则 $p = q'$ 可表为 $p = p(q) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, 并满足

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} = -c - \dfrac{f(q)}{p}, \\ p(0) = p(1) = 0, \\ p(q) > 0, \quad q \in (0,1). \end{cases} \tag{2.3}$$

反之, 还有

引理 1.2.2　设 $p(q) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$ 满足问题 (2.3), 则初值问题

$$\begin{cases} q' = p(q), \quad -\infty < \xi < \infty, \\ q(0) = 1/2 \end{cases} \tag{2.4}$$

存在解 $q(\xi) \in C^2(-\infty, \infty)$, 且 $q(\xi)$ 是问题 (2.1) 的严格单调解. 同时还有 $q(-\infty) = 0$, $q(\infty) = 1$.

证明　设问题 (2.4) 的解 $q(\xi)$ 的最大存在区间是 (ξ_0, ξ_1). 显然 $q(\xi) \in (0,1)$ ($\xi \in (\xi_0, \xi_1)$), 从而严格单调上升. 当 $\xi \in (\xi_0, \xi_1)$ 时, 由 (2.3) 的方程得

$$q'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} q' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} p = -cp - f(q),$$

即

$$q'' + cq' + f(q) = 0.$$

现在证明: $\xi_0 = -\infty, \xi_1 = \infty$. 因为 $f(0) = 0$, $f \in C^1[0,1]$, 所以存在 $\beta > 0$, 使得

$$|f(q)| < \beta q.$$

对于给定的 c, 存在 $\gamma > 0$ 使 $\beta/\gamma - c < \gamma$. 设 l 是 qp 平面上的直线 $p = \gamma q$ (图 1.2.1). 若给定的解 $p = p(q)$ 在除原点外的第一象限的某点处与 l 相碰, 则在该点处

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} = -c - \frac{f(q)}{p} \leqslant -c + \frac{|f(q)|}{p} \leqslant -c + \frac{\beta}{\gamma} < \gamma.$$

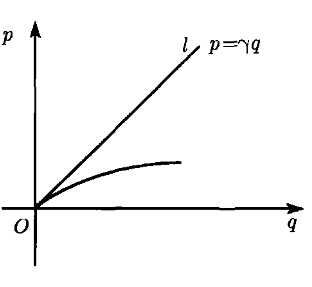


图 1.2.1

所以轨线进入 l 的下方. 这蕴含着对某个 $\delta > 0$, 当 $q \in (0,\delta)$ 时, 有下列两种情形之一:

$$\text{(i) } p(q) > \gamma q, \quad \text{(ii) } p(q) < \gamma q.$$

若是第一种情形, 则由 (2.3) 的方程得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} < \gamma$, 积分之得 $p(q) \leqslant \gamma q$, 矛盾. 因此, 情形 (ii) 一定成立. 于是

$$p(q) < \gamma q, \quad q \in (0,1).$$

再积分 (2.4) 的方程得

$$-\xi_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}q}{p(q)} > \frac{1}{\gamma}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}q}{q} = \infty,$$

即 $\xi_0 = -\infty$.

因为 $q(\xi) \in (0,1)$, $q(\xi)$ 严格单调上升, 所以 $\lim\limits_{\xi \to -\infty} q(\xi) = q_- \geqslant 0$. 若 $q_- > 0$, 则 $\lim\limits_{\xi \to -\infty} q'(\xi) > 0$, 此与 $q(\xi)$ 有界矛盾, 故 $q_- = 0$.

类似可证 $\xi_1 = \infty$, $q(\infty) = 1$.

利用引理 1.2.1 和引理 1.2.2 可得

引理 1.2.3 值域为 $(0,1)$ 的波前解 $u(x,t) = q(x - ct)$ 与问题 (2.3) 的解 $p(q)$ 可按如下法则建立一一对应:

$$\begin{cases} q' = p(q), \\ q(0) = a, \quad a \in (0,1). \end{cases}$$

我们总是约定: $q(\xi)$ 关于 ξ 的平移认为是同一个解.

以上结果可总结成下面的定理:

定理 1.2.4　设 $f(u) \in C^1[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$, 则方程

$$u_t = u_{xx} + f(u)$$

存在值域为 $(0,1)$ 的波前解的充要条件是: 存在 $p=p(q) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} = -c - \dfrac{f(q)}{p}, \\ p(0)=p(1)=0, \\ p(q)>0,\ q \in (0,1), \end{cases} \tag{2.5}$$

或者方程

$$\begin{cases} q' = p, \\ p' = -cp - f(q) \end{cases} \tag{2.6}$$

存在连接点 $(0,0)$ 和点 $(1,0)$ 且属于 $\{(q,p): 0<q<1,\ p>0\}$ 的轨线.

1.2.2　存在波前解的必要条件

求波前解, 即寻找 c 的值使得问题 (2.2) 有解. 问题 (2.2) 的解的存在性强烈地依赖于平衡点 $(0,0)$ 和 $(1,0)$ 的类型.

在 $(0,0)$ 点与 $(1,0)$ 点的线性化方程的系数矩阵分别为

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(0) & -c \end{pmatrix}, \quad A(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(1) & -c \end{pmatrix},$$

它们的特征值分别是

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(-c \pm \sqrt{c^2-4f'(0)}\right), \quad \lambda = \frac{1}{2}\left(-c \pm \sqrt{c^2-4f'(1)}\right).$$

假定 $f'(0) \neq 0$, $f'(1) \neq 0$, 即平衡点是简单的.

先考虑 $(0,0)$ 点, 有以下情形:

(1) $f'(0)>0$, $c^2 \geqslant 4f'(0)$—— 两个同号的实特征值. 此时 $(0,0)$ 点是稳定结点 $(c>0)$ 或不稳定结点 $(c<0)$. 要使问题 (2.2) 有解, 必须要求 $c<0$.

(2) $f'(0)<0$—— 两个异号的实特征值. 此时 $(0,0)$ 是鞍点.

(3) $c^2<4f'(0)$—— 两个共轭复特征值. 此时 $(0,0)$ 是焦点或中心, 问题 (2.2) 不可能有解.

同样的情况发生在 $(1,0)$ 点.

当 $(0,0)$ 和 $(1,0)$ 都是结点时, 为使问题 (2.2) 有解, 必须要求 $(0,0)$ 点是不稳定的 $(c<0)$, $(1,0)$ 点是稳定的 $(c>0)$, 而这是不可能的. 因此, 仅当是以下情形才可能有波前解:

(1) 点 $(0,0)$ 和点 $(1,0)$ 分别是结点和鞍点 (简称为结–鞍情形), 即 $f'(0)>0,\ f'(1)<0,\ c<0,\ c^2\geqslant 4f'(0)$.

(2) 点$(0,0)$ 和点 $(1,0)$ 分别是鞍点和结点 (简称为鞍–结情形), 即 $f'(0)<0,\ f'(1)>0,\ c>0,\ c^2\geqslant 4f'(0)$.

(3) 点$(0,0)$ 和点 $(1,0)$ 都是鞍点 (简称为鞍–鞍情形), 即 $f'(0)<0,\ f'(1)<0$.

问题 (2.1) 的单调解显然是单调上升的波前解. 若考虑

$$\begin{cases} q''+cq'+f(q)=0, \\ q(-\infty)=1, \quad q(\infty)=0 \end{cases} \tag{2.7}$$

的单调解可得单调下降的波前解. 作自变量替换可将问题 (2.7) 化成问题 (2.1). 因此, 这里不再讨论问题 (2.7).

鞍–结情形又可归为结–鞍情形. 作变换 $\tilde{q}=1-q,\ \tilde{f}(\tilde{q})=-f(1-\tilde{q})$, 则问题 (2.1) 化成

$$\begin{cases} \tilde{q}''+c\tilde{q}'+\tilde{f}(\tilde{q})=0, \\ \tilde{q}(-\infty)=1, \quad \tilde{q}(\infty)=0. \end{cases}$$

因为 $\tilde{f}'(0)=f'(1),\ \tilde{f}'(1)=f'(0)$, 所以鞍–结情形转化为结–鞍情形. 因此只考虑结–鞍与鞍–鞍两种情形.

1.2.3 初值问题的正解关于参数的单调性

在讨论波前解的存在唯一性时需要先讨论初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}+\dfrac{f(q)}{p}=-c, \\ p(0)=0, \\ p(q)>0, \quad 0<q<q_0, \quad q_0\in(0,1] \end{cases} \tag{2.8}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}+\dfrac{f(q)}{p}=-c, \\ p(1)=0, \\ p(q)>0, \quad q_1<q<1, \quad q_1\in[0,1) \end{cases} \tag{2.9}$$

的解关于参数 c 的依赖性.

为了后面的需要, 下面讨论更一般的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}q}+\dfrac{f(q)}{p_i}=-c_i, \quad q\in(\alpha,\beta), \\ p_i(\alpha)=\alpha_i, \quad i=1,2 \end{cases} \tag{2.10}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}q} + \dfrac{f(q)}{p_i} = -c_i, & q \in (\alpha, \beta), \\ p_i(\beta) = \beta_i, \quad i = 1, 2, \end{cases} \tag{2.11}$$

其中 $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$.

引理 1.2.5　设存在 $\delta > 0$, 使得当 $\alpha < q < \alpha + \delta$ 时 $f(q) \leqslant 0$. 又设当 $\alpha < q < \beta$ 时 $p_i(q)$ 满足 (2.10) 且 $p_i(q)$ 均正 (或均负).

(1) 当 $c_1 = c_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ 时, $p_1(q) = p_2(q)$, $q \in (\alpha, \beta)$;

(2) 当 $c_1 < c_2$, $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$ 时, $p_1(q) > p_2(q)$, $q \in (\alpha, \beta)$.

证明　由于

$$(p_1 - p_2)' - \frac{f(q)}{p_1 p_2}(p_1 - p_2) = -(c_1 - c_2),$$

两边乘以

$$h(q) := \exp\left\{-\int_{\alpha+\frac{\delta}{2}}^{q} \frac{f(t)}{p_1(t)p_2(t)}\mathrm{d}t\right\},$$

并令 $G(q) = (p_1(q) - p_2(q))h(q)$, 得

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q} = -(c_1 - c_2)h(q), \quad q \in (\alpha, \beta).$$

若 $K = \displaystyle\int_{\alpha+\frac{\delta}{2}}^{\alpha} -\frac{f(t)}{p_1(t)p_2(t)}\mathrm{d}t$ 发散, 则 $\lim\limits_{q \to \alpha^+} G(q) = 0$. 若 K 收敛, 则

$$\lim_{q \to \alpha^+} G(q) \geqslant 0 \quad (\text{当 } \alpha_1 = \alpha_2 \text{ 时为 } 0).$$

若 $c_1 = c_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, 则

$$\lim_{q \to \alpha^+} G(q) = 0; \quad \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q} = 0, \quad q \in (\alpha, \beta).$$

故 $G(q) \equiv 0$, 即 $p_1(q) = p_2(q)$, $q \in (\alpha, \beta)$.

若 $c_1 < c_2$, $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$, 则

$$\lim_{q \to \alpha^+} G(q) \geqslant 0; \quad \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q} > 0, \quad q \in (\alpha, \beta).$$

故 $G(q) > 0$, 即 $p_1(q) > p_2(q)$, $q \in (\alpha, \beta)$. 证毕.

类似可证

引理 1.2.6　设存在 $\delta > 0$, 使得当 $\beta - \delta < q < \beta$ 时 $f(q) \geqslant 0$. 又设 $\alpha < q < \beta$ 时 $p_i(q)$ 满足 (2.11) 且 $p_i(q)$ 均正 (或均负).

(1) 当 $c_1 = c_2$, $\beta_1 = \beta_2$ 时, $p_1(q) = p_2(q)$ $(q \in (\alpha, \beta))$;

(2) 当 $c_1 < c_2$, $\beta_1 \leqslant \beta_2$ 时, $p_1(q) < p_2(q)$ $(q \in (\alpha, \beta))$.

由上述两个引理立即得到如下推论:

推论 1.2.7 设 $f \in C^1[0,1]$. 若 $f(0) = 0$, $f'(0) < 0$, 则问题 (2.8) 的解关于参数 c 是严格下降的; 若 $f(1) = 0$, $f'(1) < 0$, 则问题 (2.9) 的解关于参数 c 是严格上升的.

推论 1.2.8 设 $q_0 \in (0,1)$. 若当 $q \in (0, q_0)$ 时 $f(q) \leqslant 0$, 或当 $q \in (q_0, 1)$ 时 $f(q) \geqslant 0$, 则对每个 c, 问题 (2.3) 至多有一个解.

推论 1.2.9 对于鞍–鞍情形, 若对某个 $c = c_0$, 问题 (2.3) 有解 $p = p_{c_0}(q)$, 则对所有的 $c \neq c_0$, 问题 (2.3) 一定无解.

推论 1.2.10 对于结–鞍情形, 若对某两个 $c = c_i$ (不妨假设 $c_1 < c_2$), 问题 (2.3) 有解 $p = p_{c_i}(q)$, 则对任意 $c_1 < c < c_2$, 问题 (2.3) 必有解 $p = p_c(q)$.

引理 1.2.11 设 $f \in C^1[0,1]$, $f(1) = 0$, $f'(1) < 0$. 又设 c_n 单调上升, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c^*$. 若 $c = c_n$ 时问题 (2.3) 有解 $p_n(q)$, 则极限

$$\lim_{n\to\infty} p_n(q) = p^*(q)$$

存在, 并且 $p^*(q)$ 是问题 (2.3) 当 $c = c^*$ 时的解.

证明 由 (2.3) 的方程得

$$\begin{aligned} p_n(q)\mathrm{d}p_n &= -c_n p_n \mathrm{d}q - f(q)\mathrm{d}q, \\ \frac{1}{2}p_n^2(q) &= -c_n \int_0^q p_n(q)\mathrm{d}q - \int_0^q f(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

令 $M_n = \max\limits_{[0,1]} p_n(q)$, 则由上式知存在正常数 a 与 b, 使得 $M_n^2/2 \leqslant aM_n + b$. 故存在常数 $M > 0$, 使得对一切 n 有 $M_n \leqslant M$, 即 $p_n(q)$ 关于 n 一致有界. 又因为 $p_n(q)$ 关于 n 单调上升, 故极限

$$\lim_{n\to\infty} p_n(q) = p^*(q)$$

存在. 再由控制收敛定理得

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}p^{*2}(q) = -c^* \displaystyle\int_0^q p^*(s)\mathrm{d}s - \int_0^q f(s)\mathrm{d}s, \\ p^*(0) = p^*(1) = 0, \\ p^*(q) > 0, \quad q \in (0,1). \end{cases}$$

这说明当 $c = c^*$ 时, $p^*(q)$ 是问题 (2.3) 的解. 证毕.

1.2.4 结–鞍情形的波前解

先在结–鞍情形下考察方程组 (2.6). 对任意固定的 $c \neq 0$, 方程组 (2.6) 无周期解 ($c = 0$ 时方程组 (2.6) 在第一象限也无周期解). 由于点 $(1,0)$ 是鞍点, 根据常微

渐近理论知, 在第一象限存在 (2.6) 的唯一轨线 $\Gamma_c: p = p_c(q)$, 使当 $\xi \to \infty$ 时它从左上方沿特征方向趋向于 $(1,0)$. 确切地说, 轨线 Γ_c 满足:

$$\begin{cases} p(\xi) > 0, \quad 0 < q(\xi) < 1, \quad \text{当 } \xi \text{ 充分大时}, \\ q(\infty) = 1, \quad p(\infty) = 0, \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\right|_{(1,0)} = \lim\limits_{\xi\to\infty} \dfrac{p(\xi)}{q(\xi)-1} = \dfrac{-c-\sqrt{c^2-4f'(1)}}{2} := \sigma_1^-(c) < 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

若能在 qp 平面的第一象限构造一个区域, q 轴上的区间 $[0,1]$ 是它的一部分边界, 使得 Γ_c 始终位于该区域内, 则当 $\xi \to -\infty$ 时, Γ_c 一定趋向于 $(0,0)$ 点. 下面将用这种方法证明结–鞍情形下波前解的存在性.

定理 1.2.12　设 $f \in C^1[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$, 并且当 $u \in (0,1)$ 时 $f(u) > 0$, 则存在 c^* 满足

$$-2\sqrt{\sup_{(0,1)} \frac{f(u)}{u}} \leqslant c^* \leqslant -2\sqrt{f'(0)},$$

使得方程 (I) 存在波前解 $u = q(x-ct)$ 满足:

$$q(-\infty) = 0, \quad q(\infty) = 1$$

的充要条件是: $c \leqslant c^*$.

证明　由必要条件知, $c < 0$, $c^2 \geqslant 4f'(0)$. 由 Γ_c 的选取及 (2.12) 知，存在小 $\epsilon > 0$ 及充分大的 ξ_0 使轨线 $\Gamma_c: p = p_c(q)$ 满足:

$$q(\xi_0) = 1-\epsilon,\ p(\xi) > 0 \text{ 当} \xi \in [\xi_0, +\infty), \quad (q,p)(+\infty) = (1,0). \tag{2.13}$$

于是对充分小的 $\mu_0 > 0$, 当 $\xi = \xi_0$ 时 Γ_c 在直线 $l_1: p = \mu_0 q$ 上方. 对某个 $\mu > 0$, 作直线 $p = \mu q$, 再过 q 轴上的 $B(1,0)$ 点作垂直线, 它们交于 A 点.

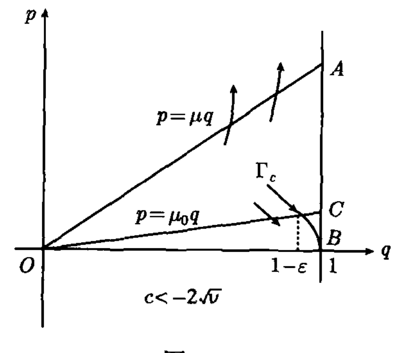


图 1.2.2

设直线 l_1 与线段 AB 交于 C, 由 (2.13) 显然当 $\xi = \xi_0$ 时 Γ_c 在 $\triangle OAC$ 内, 当 $\xi \leqslant \xi_0$, 即沿 Γ_c 倒退回去, Γ_c 或与 $\triangle OAC$ 的某边相碰, 或者当 $\xi \to -\infty$ 时 Γ_c 趋于原点 (图 1.2.2). 若前者不可能, 则后者必成立. 因为当 Γ_c 在 $\triangle OAC$ 内或在其边界上 (除 O 点外) 时, $q(\xi)$ 总是严格增加的, 所以当 $\xi \leqslant \xi_0$ 时总有 $q(\xi) < 1-\varepsilon$. 故当 $\xi \leqslant \xi_0$ 时 Γ_c 不会与 AC 相碰.

又因为

$$m_0 = \inf_{(0,1-\varepsilon]} \frac{f(q)}{q} > 0,$$

所以当 $q\in(0,1-\varepsilon]$ 时, $f(q)\geqslant m_0 q$. 进一步若取 $\mu_0>0$ 充分小, 使得 $-c\mu_0<m_0$, 则在 OC 上当 $q\in(0,1-\varepsilon]$ 时, 有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}=-c-\frac{f(q)}{p}\leqslant -c-\frac{m_0}{\mu_0}<0<\mu_0,$$

所以 Γ_c 也不能从下到上穿过 OC. 当然, 当 $\xi\leqslant\xi_0$ 时 Γ_c 也不会与正 q 轴相碰.

在斜边 OA 上,

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}=-c-\frac{f(q)}{p}\geqslant -c-\frac{\nu q}{p},$$

其中

$$\nu=\sup_{[0,1]}\frac{f(q)}{q}\geqslant f'(0).$$

因此在 OA 上

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\geqslant -c-\frac{\nu}{\mu}.$$

若 μ 满足

$$-c-\frac{\nu}{\mu}>\mu, \tag{2.14}$$

则轨道 Γ_c 不能从左向右穿过 OA 边 (图 1.2.2).

这就证明了若不等式 (2.14) 成立, 则当 $\xi\leqslant\xi_0$ 时, 轨线 Γ_c 总在 $\triangle OAC$ 内. 故当 $\xi\to-\infty$ 时, Γ_c 必趋于结点 $(0,0)$. 不等式 (2.14) 可写成

$$\mu^2+c\mu+\nu<0,$$

它等价于: 两个根 $\mu_\pm=\dfrac{-c\pm\sqrt{c^2-4\nu}}{2}$ 是实的而且 μ 位于它们之间. 若 c 满足 $c<-2\sqrt{\nu}<0$, 则 $\mu_\pm$ 是实的, 且存在 μ 位于 μ_+ 与 μ_- 之间, 于是对任意 $c<-2\sqrt{\nu}<0$ 问题 (2.2) 存在解. 进而由引理 1.2.11, 对任意满足

$$c\leqslant -2\sqrt{\nu}<0 \tag{2.15}$$

的 c, 问题 (2.2) 有解.

进一步证明, 存在最大的传播速度 c^*:

$$-2\sqrt{\nu}\leqslant c^*\leqslant -2\sqrt{f'(0)}, \tag{2.16}$$

使得当 $c\leqslant c^*$ 时问题 (2.2) 有唯一解, 当 $c>c^*$ 时问题 (2.2) 无解.

令 $E=\{c:$ 使得问题 (2.3) 有解 $\}$. 显然 E 非空有上界, 故必有上确界, 记为 c^*. 由不等式 (2.15) 及必要条件知, 它满足不等式 (2.16). 因为 $-2\sqrt{\nu}\in E$, 若 $c^*=-2\sqrt{\nu}$, 则结论得证. 若 $-2\sqrt{\nu}<c^*$, 则对任意 $-2\sqrt{\nu}<c<c^*$, 存在 $c'\in E$ 使得 $c<c'<c^*$, 当然有 $-2\sqrt{\nu}<c<c'$. 由推论 1.2.10 知, $c\in E$. 最后只需再证 $c^*\in E$.

显然, 存在 $c_n \in E$ 单调上升, $c_n \to c^*$. 于是由引理 1.2.11 知, $c^* \in E$. 证毕.

定理 1.2.12 中的 c^* 称为最大传播速度, 也称为临界波速.

若考虑单调下降的波前解, 可得

定理 1.2.13　在定理 1.2.12 的条件下, 则存在最小波速 c_*:

$$2\sqrt{f'(0)} \leqslant c_* \leqslant 2\sqrt{\sup_{(0,1)} \frac{f(u)}{u}},$$

使得方程 (I) 存在波前解 $u = q(x - ct)$ 满足

$$q(-\infty) = 1, \quad q(\infty) = 0$$

的充要条件是: $c \geqslant c_*$.

证明留作习题.

下面进一步考察最大 (小) 传播速度 $c^*(c_*)$ 对函数 f 的依赖性以及波前解趋于结点的方向.

定理 1.2.14　设 $f, g \in C^1[0,1]$, $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = 0$, $f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$, $u \in (0,1)$ 时 $0 < f(u) \leqslant g(u)$. 方程

$$u_t = u_{xx} + f(u) \quad 与 \quad u_t = u_{xx} + g(u)$$

的最大传播速度分别记为 c_f^* 与 c_g^* (最小传播速度分别为 c_{*f} 与 c_{*g}), 则

$$c_f^* \geqslant c_g^* \quad (c_{*f} \leqslant c_{*g}).$$

证明留作练习.

定理 1.2.15　在定理 1.2.12 的条件下,

(1) 当 $c < c^*$ $(c > c_*)$ 时, 方程 (I) 的单调上升 (下降) 的波前解在结点 $(0,0)$ 处的切线方向是

$$\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\right|_{(0,0)} = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2} := \sigma_0^-(c) \quad \left(\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\right|_{(0,0)} = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2} := \sigma_0^+(c)\right), \tag{2.17}$$

或等价地, $(q(\xi), p(\xi))$ 有下面渐近衰减性

$$q(\xi),\ p(\xi) \ \sim\ \mathrm{e}^{\sigma_0^-(c)\xi} \ \left(\sim\ \mathrm{e}^{\sigma_0^+(c)\xi}\right), \quad 当\ \xi \to -\infty\ \ (\xi \to +\infty). \tag{2.18}$$

(2) 当 $c = c^*$ $(c = c_*)$ 时, 方程 (I) 的单调上升 (下降) 的波前解在结点 $(0,0)$ 处的方向是

$$\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\right|_{(0,0)} = \sigma_0^+(c^*) \quad \left(\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\right|_{(0,0)} = \sigma_0^-(c_*)\right), \tag{2.19}$$

或等价地, $(q(\xi), p(\xi))$ 有下面渐近衰减性

$$\begin{aligned}&q(\xi),\, p(\xi) \sim \mathrm{e}^{\sigma_0^-(c^*)\xi}, \quad 当\ \xi \to -\infty, \quad 若\ c^* < \sqrt{f'(0)}\\ &\Big(q(\xi),\, p(\xi) \sim \mathrm{e}^{\sigma_0^+(c_*)\xi}, \quad 当\ \xi \to +\infty, \quad 若\ c_* > \sqrt{f'(0)}\Big),\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}&q(\xi),\, p(\xi) \sim (A_0 + A_1|\xi|)\mathrm{e}^{\sigma_0^-(c^*)\xi}, \quad 当\ \xi \to -\infty, \quad 若\ c^* = -2\sqrt{f'(0)}\\ &\Big(q(\xi),\, p(\xi) \sim (A_0 + A_1\xi)\mathrm{e}^{\sigma_0^+(c_*)\xi}, \quad 当\ \xi \to +\infty, \quad 若\ c_* = 2\sqrt{f'(0)}\Big).\end{aligned} \tag{2.21}$$

证明 由定理 1.2.12, 对任意固定的 $c \leqslant c^* < 0$, 轨线 $\Gamma_c:\ p = p_c(q)$ 即为方程 (I) 的单调上升波前解所对应的问题 (2.5) 的轨线. 由常微分方程的渐近理论及奇点理论, 轨线 $p = p_c(q)$ 在结点 $(0,0)$ 的切线方向为

$$\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\right|_{(0,0)} = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2} := \sigma_0^-(c) \ \text{或}\ \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2} := \sigma_0^+(c). \tag{2.22}$$

(1) 利用 (2.22) 式及反证法, 假设存在某个 $c_0 < c^*$, 使得 (2.17) 式不成立，即轨线 $p = p_{c_0}(q)$ 在 $(0,0)$ 处的切线方向是

$$\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\right|_{(0,0)} = \sigma_0^+(c_0) = \frac{-c_0 + \sqrt{c_0^2 - 4f'(0)}}{2}. \tag{2.23}$$

对任意固定的 c 满足 $c_0 < c < c^*$, 易验证 $\sigma_0^+(c) < \sigma_0^+(c_0)$. 于是由 (2.23) 知, 存在某个充分小的 $\delta_0 > 0$, 使得

$$p_c(q) < p_{c_0}(q), \quad q \in (0, \delta_0), \quad c > c_0.$$

此与推论 1.2.7(即结–鞍情形 (2.5) 的轨线 $p_c(q)$ 关于 c 是严格上升的) 矛盾. 故对任意 $c < c^*$, 式 (2.17) 成立. 根据常微分方程的渐近理论，(2.17) 式等价于 (2.18) 式.

(2) 若 c^* 满足 $c^* = -2\sqrt{f'(0)}$, 则 $\sigma_0^+(c^*) = \sigma_0^-(c^*)$. 因此, (2.19) 可由 (2.22) 式推出, 进而由常微渐近理论知 (2.21) 成立.

下面仅考虑 $c^* < -2\sqrt{f'(0)}$ 情形, 此时必有

$$\sigma_0^+(c) > \sigma_0^-(c), \quad \forall\, c < -2\sqrt{f'(0)}; \quad -2\sqrt{\sup_{(0,1)} \frac{f(u)}{u}} < -2\sqrt{f'(0)}.$$

对任意固定的 $c \leqslant 0$, 前面定义的 $\Gamma_c:\ p = p_c(q)$ 为 (2.6) 的在第一象限满足 $p(1) = 0$ 的唯一轨线. 由定理 1.2.12 知当且仅当 $c \leqslant c^*$ 时, 轨线 $p = p_c(q)$ 还满足 $p(0) = 0$, 即 $p = p_c(q)$ 也是 (2.8) 的解.

用反证法. 假设 (2.19) 式不成立, 则有

$$\left.\frac{\mathrm{d}p_{c^*}}{\mathrm{d}q}\right|_{(0,0)} = \sigma_0^-(c^*) = \frac{-c^* - \sqrt{(c^*)^2 - 4f'(0)}}{2}. \tag{2.24}$$

另外对任意固定的 $c < -2\sqrt{f'(0)}$, 因 $\sigma_0^+(c) > \sigma_0^-(c)$, 由常微渐近理论, (2.8) 在第一象限存在唯一的轨线记为 $\Gamma_c^+:\ p = p_c^+(q)$, 满足

$$p(0) = 0, \quad p(q) > 0, \quad q \in (0, q_c), \quad \left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\right|_{(0,0)} = \sigma_0^+(c). \tag{2.25}$$

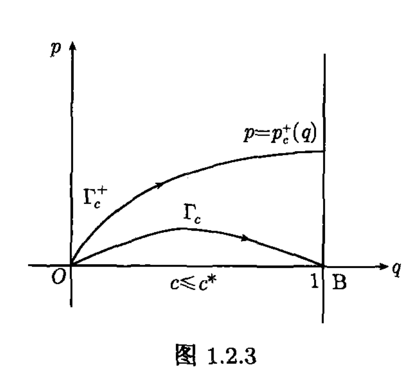


图 1.2.3

由 (2.17)、(2.24)、(2.25)、定理 1.2.12 及常微局部解存在唯一性理论易证 (证明留给读者): 对任意固定的 $c \leqslant c^*$, 当 $q \in (0,1]$ 时轨线 Γ_c^+ 不会与轨线 Γ_c 相交, 且 Γ_c^+ 有上界并总在 Γ_c 上方 (图 1.2.3). 特别有

$$\begin{aligned} &0 < p_{c^*}(q) < p_{c^*}^+(q), \quad \forall q \in (0,1), \\ &p_{c^*}^+(1) > 0 = p_{c^*}^+(1). \end{aligned} \tag{2.26}$$

又由 Γ_c^+ 关于 c 的连续依赖性, 存在充分小 $\delta > 0$ 使得 $c^* + \delta < -2\sqrt{f'(0)}$ 且

$$p_c^+(0) = 0, \quad p_c^+(q) > 0, \ q \in (0,1], \quad \forall c \in (c^*, c^* + \delta], \tag{2.27}$$

进而由 (2.27)、Γ_c 的定义及 Γ_c 关于 c 的单调递增性 (引理 1.2.6), 对任意固定的 $c \in (c^*, c^*+\delta]$, Γ_c 必在轨线 Γ_{c^*} 及 Γ_c^+ 之间, 故有

$$p_c(q) > 0, \quad \forall q \in (0,1), \quad p_c(0) = 0, \quad p_c(1) = 0, \quad \forall c \in (c^*, c^* + \delta].$$

此与 c^* 为最大波速矛盾, 故 (2.19) 得证. 又由常微渐近理论, (2.19) 等价于 (2.20). 定理证毕.

1.2.5 鞍–鞍情形的波前解

对于鞍–鞍情形, 至多有唯一的 c 使得方程 (I) 有波前解, 其值域为 $(0,1)$. 因此, 必须采用不同于前面的方法来讨论这种情形.

定理 1.2.16 设 $f \in C^1[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) < 0$, $f'(1) < 0$, f 在 $(0,1)$ 只有一个零点. 则方程 (I) 存在唯一的波前解 $u = q(x - ct)$ (即唯一的 c 值) 满足:

$$q(-\infty) = 0, \quad q(\infty) = 1.$$

证明 因为 $(0,0)$ 是鞍点, 由常微分方程的渐近理论知, 对任意固定的 $c \in \mathbb{R}$, 在第一象限存在方程组 (2.6) 的唯一一条轨道 $\Gamma_c:\ p = p(q)$, 且当 $\xi \to -\infty$ 时沿特征方向 $\left.\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\right|_{(0,0)} = \dfrac{-c + \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2} > 0$ 趋向原点.

若轨线离开原点某邻域与 $p = 0$ 轴有正距离, 即 $p \geqslant a > 0$, 则 $\left|\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\right| \leqslant \dfrac{|f(q)|}{a} + |c|$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$ 有界, 因而 Γ_c 有界.

设 $c<0$. 记 q_0 是 f 在 $(0,1)$ 中的零点, 则当 $q\in(0,q_0)$ 时 $p(q)>0$, 并且

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}=-c-\frac{f(q)}{p(q)}\geqslant -c=|c|>0,\quad q\in(0,q_0].$$

若 $\bar{q}\in(q_0,1]$ 是第一个使 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}=0$ 的点, 则

$$p(\bar{q})=\frac{f(\bar{q})}{|c|}\geqslant p(q_0)=p(q_0)-p(0)=p'(\xi)q_0\geqslant |c|q_0.$$

于是 $f(\bar{q})\geqslant |c|^2q_0$. 当 $|c|$ 充分大时这是不可能的. 因此, 当 $c<0$, $|c|$ 充分大时, $p(q)$ 在 $[0,1]$ 严格上升, 故必与 BA 相交 (图 1.2.4).

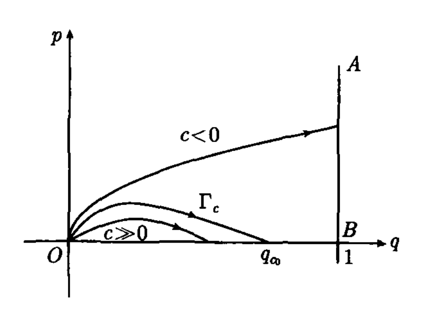


图 1.2.4

取常数 $K>0$, 在线段 $p=-K(q-1)$ $(0\leqslant q\leqslant 1)$ 上, 当 c 充分大时, 有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}=-c-\frac{f(q)-f(1)}{-K(q-1)}=-c+\frac{1}{K}f'(\xi)<-K.$$

因此, c 是充分大正数时, Γ_c 必与 q 轴相交.

令

$$E=\{c:\Gamma_c\text{ 与线段 }OB\text{ 相交}\}.$$

显然, E 非空有下界, 必存在下确界 $c_0=\inf E$. 于是存在单调下降序列 $c_n\in E$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c_0$, 因而 $c_0\in E$ (习题 1.6). 设 Γ_{c_0} 与线段 OB 交于 q_{c_0}, $q_{c_0}\leqslant 1$. 进一步证明 $q_{c_0}=1$.

若 $q_{c_0}<1$, 则对于比 c_0 小一点的 c, 相应的 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$ 至少有两个零点 $q_1,q_2\in(0,1)$, 故

$$0=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}=-c-\frac{f(q_i)}{p(q_i)},\quad i=1,2. \tag{2.28}$$

不妨认为 $q_1<q_2$, 从而 $p(q_1)>p(q_2)>0$. 利用解关于参数的连续依赖性 (证明可参见 [AW2]) 得

$$\lim_{c\to c_0-}q_2=q_{c_0},\quad \lim_{c\to c_0-}p(q_2)=0,$$

且当 $c<c_0$ 时, $q_2>q_{c_0}$, 见图 1.2.4.

由 (2.28) 式推知

$$f(q_2)=-cp(q_2). \tag{2.29}$$

令 $c\nearrow c_0$, 得 $f(q_{c_0})=0$, 故 $q_{c_0}=q_0$. 从而 $q_2>q_0$, 所以 $f(q_2)>0$. 根据 (2.29) 式又知 $c<0$, 再由 (2.28) 得 $f(q_1)>0$. 因为当 $q>0$ 充分小时 $f(q)<0$, 故 $(0,q_1)$ 中还有 f 的零点, 但这是不可能的. 因此 $q_{c_0}=1$. 证毕.

1.3　$f(u) = u(1-u)(u-a)(0 < a < 1)$ 时单调与非单调行波解的存在性

本节考虑一个特例

$$u_t = u_{xx} + u(1-u)(u-a), \tag{3.1}$$

其中 $0 < a < 1$, $f(u) = u(1-u)(u-a)$.

因为 $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) = -a < 0$, $f'(1) = a - 1 < 0$, 当 $0 < u < a$ 时 $f(u) < 0$, 当 $a < u < 1$ 时 $f(u) > 0$, 这是鞍-鞍情形. 所以方程 (3.1) 存在值域为 $(0,1)$ 的唯一波前解 $u(x,t) = q(x - ct)$. 因为 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{12}(1-2a)$, 所以当 $0 < a < 1/2$ 时, $c < 0$; 当 $1/2 < a < 1$ 时, $c > 0$; 当 $a = 1/2$ 时, $c = 0$. 因为这里的 f 有三个零点: $0, a, 1$, 是否 $(0,0)$, $(a,0)$, $(1,0)$ 两两之间都可连接成方程 (3.1) 的行波解呢 (单调或非单调的)? 因此, 我们要寻找行波解 $u(x,t) = q(x-ct)$, 使得 $q(\pm\infty) \in \{0, a, 1\}$. 这时 q 满足的方程是

$$q'' + cq' + q(1-q)(q-a) = 0. \tag{3.2}$$

作变换 $q = 1 - q^*$, 可以只考虑 $0 < a \leqslant 1/2$ 的情形. 作自变量替换 $\xi = -\eta$, 可以只考虑 $c \geqslant 0$ 的情形.

1.3.1　奇点分析与各种可能的情形

方程 (3.2) 等价于

$$q' = p, \quad p' = -q(1-q)(q-a) - cp.$$

它在 $(q,0)$ 处的线性化方程记为

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = A(q,0)\eta,$$

其中 $\eta = (\eta_1, \eta_2)^{\mathrm{T}}$. 因为

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -c \end{pmatrix},$$

其特征根是

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4a}}{2},$$

故 $(0,0)$ 是鞍点. 而

$$A(a,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(a-1) & -c \end{pmatrix},$$

其特征根是

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4a(1-a)}}{2}.$$

故当 $c^2 \geqslant 4a(1-a)$ 时, $(a,0)$ 是结点, 又 $c>0$ 时是稳定结点. 当 $c^2<4a(1-a)$, $c>0$ 时 $(a,0)$ 是稳定焦点, 当 $c=0$ 时 $(a,0)$ 是中心. 同样地考察点 $(1,0)$ 可知, $(1,0)$ 是鞍点.

这两个鞍点邻域的图形见图 1.3.1.

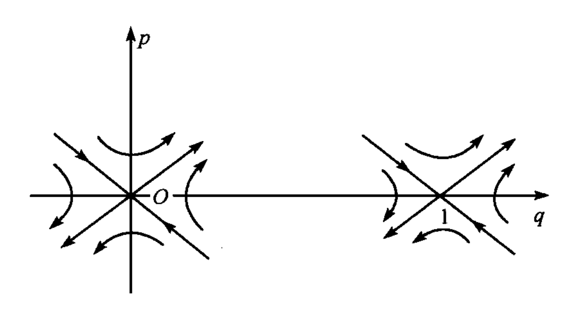


图 1.3.1

当 $c>0$ 时, 因为 $q(-\infty) \neq q(\infty)$ 且 $(a,0)$ 是稳定的, 所以只可能出现以下情形:

$$(q(-\infty), q(\infty)) = (0,a),\ (1,0),\ (1,a).$$

而当 $c=0$ 时可以出现 $q(-\infty)=q(\infty)$ 的情形.

1.3.2 $c=0$ 的情形

当 $c=0$ 时, 方程 (3.2) 是保守系统. 由于 $f(q)=q(q-a)(1-q)$, 故势能为

$$F(q) = \int_0^q f(s)\mathrm{d}s = -\frac{1}{4}q^4 + \frac{1}{3}(a+1)q^3 - \frac{1}{2}aq^2.$$

因为 $F'(q)=f(q)$, $F''(q)=-3q^2+2(a+1)q-a$, 所以当 $q=0,a,1$ 时 $F'(q)=f(q)=0$, 并且 $F''(0)=-a<0$, $F''(a)=a(1-a)>0$, $F''(1)=a-1<0$. 故容易画出能量曲线 $u=F(q)$, 从而可画出 $c=0$ 时方程 (3.2) 的相图 (当 $0<a<1/2$ 时见图 1.3.2, 当 $a=1/2$ 时请读者自己画出相图).

从上面的讨论可以看出, $c=0$ 时方程 (3.2) 有无穷多个周期解, 同时当 $0<a<1/2$ 时, 有唯一解满足 $q(\pm\infty)\in\{0,a,1\}$, 而此时

$$q(-\infty)=q(\infty)=0.$$

当 $a=1/2$ 时请读者给出结论.

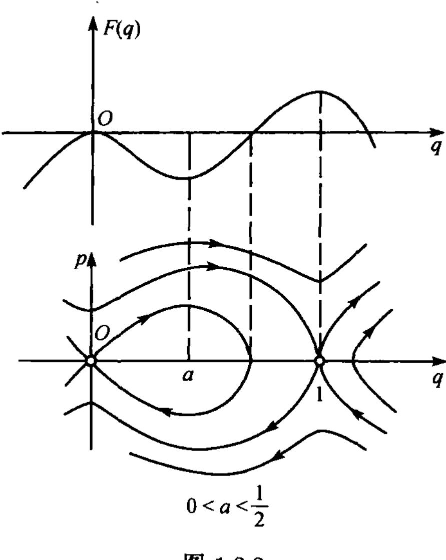


图 1.3.2

1.3.3　$c>0$ 时各种可能情形化为统一形式

现只需考察 $c>0,\ 0<a\leqslant 1/2$ 的情况. 要讨论的方程是

$$q''+cq'+q(1-q)(q-a)=0, \tag{3.2'}$$

要讨论的定解问题是

(A) 方程 (3.2′) 带边界条件：　$q(-\infty)=0,\ \ q(\infty)=a;$

(B) 方程 (3.2′) 带边界条件：　$q(-\infty)=1,\ \ q(\infty)=a;$

(C) 方程 (3.2′) 带边界条件：　$q(-\infty)=1,\ \ q(\infty)=0.$

现将它们的边界条件化为统一的形式, 即 $w(-\infty)=1,\ w(\infty)=0.$

对问题 (A), 令 $w=(a-q)/a$, 则 (A) 化为

$$\begin{cases} w''+cw'+a(1-a)w(1-w)(1+\gamma w)=0, \\ w(-\infty)=1, \quad w(\infty)=0, \end{cases} \tag{3.3}$$

其中 $\gamma=a/(1-a)\in(0,1)$. 对问题 (B), 令 $w=(q-a)/(1-a)$, 则 (B) 也化为问题 (3.3), 但其中 $\gamma=(1-a)/a\in[1,\infty)$. 问题 (3.3) 的方程两边同除以 $a(1-a)$, 再令 $\zeta=\sqrt{a(1-a)}\xi$ 得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}\zeta^2}+\hat{c}\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}+w(1-w)(1+\gamma w)=0, \\ w(-\infty)=1, \quad w(\infty)=0, \end{cases} \tag{3.4}$$

其中 $\hat{c}=c(a(1-a))^{-\frac{1}{2}}$, $\gamma\in(0,\infty)$. 问题 (3.4) 与问题 (C) 有同样的形式. 为了书写方便, 下面用 c 代替 $\hat{c}$.

1.3.4 显式解

现在对 c 的某些值, 求出问题

$$\begin{cases} w''+cw'+w(1-w)(1+\gamma w)=0, \\ w(-\infty)=1, \quad w(\infty)=0 \end{cases} \tag{3.5}$$

的显式解.

令 $v=w'=kw(w-1)$, 其中常数 $k>0$ 特定, 则有

$$v'=w''=k^2w(w-1)(2w-1).$$

将 w', w'' 代入 (3.5) 的方程式, 比较系数得

$$2k^2=\gamma, \quad k=\sqrt{\gamma/2}, \quad -k^2=1-kc, \quad c=(2+\gamma)/\sqrt{2\gamma}.$$

再解方程

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}=kw(w-1),$$

得

$$w=(1-b\mathrm{e}^{k\zeta})^{-1}, \quad b \text{ 为任意常数}.$$

不计自变量的平移, 可取

$$w=\left(1+\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\zeta}\right)^{-1}.$$

用类似方法可求得, 当 $c=\sqrt{2}\,(1/2-a)$ 时, 问题

$$\begin{cases} q''+cq'+q(1-q)(q-a)=0, \\ q(-\infty)=1, \quad q(\infty)=0 \end{cases}$$

有显式解

$$q=\left(1+\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\zeta}\right)^{-1}.$$

注 3.1 这里介绍的求显式行波解的方法称为待定系数法. 该方法也可用于求解方程组的显式行波解, 文献[WXY,W1]用这种方法求解了 Belousov-Zhabotinski 化学反应 Noyes-Field 模型的简化模型 (简称 BZ 反应方程组)

$$\begin{cases} u_t=Du_{xx}+u(1-u-rv), \\ v_t=v_{xx}-buv \end{cases}$$

的显式波前解, 同时还有待定系数法等方法的介绍. 实际上, [LY, LWWY] 证明了当 $D=1, r, b>0$ 时, 存在 c^* 满足 $-2\sqrt{b}\leqslant c^*<0$, 使得当 $c<c^*$ 时 BZ 反应方程组有波前解 $u=u(x-ct), v=v(x-ct)$, 当 $c>c^*$ 时 BZ 反应方程组没有波前解. 当然, 对 BZ 反应方程组也只能对部分参数 r, b 有显式波前解.

1.3.5 结–鞍与鞍–鞍情形的波前解

当 $\gamma \in (-1, \infty)$ 时, 令 $f(w) = w(1-w)(1+\gamma w)$, 则问题 (3.5) 属于结–鞍情形且 $f(w) > 0$ $(w \in (0,1))$. 做自变量替换后利用定理 1.2.13 得知, 存在最小速度 $\underline{c}$, 使得当 $c \geqslant \underline{c}$ 时问题 (3.5) 有单调下降的解, 而当 $c < \underline{c}$ 时问题 (3.5) 无单调下降的解. 下面来求最小速度 $\underline{c}$.

由 (2.16) 式知

$$1 = f'(0) \leqslant \frac{1}{4}\underline{c}^2 \leqslant \sup_{(0,1)} \frac{f(w)}{w} = \sup_{[0,1]} G(w),$$

其中 $G(w) = (1-w)(1+\gamma w)$. 易知

$$G(w) \leqslant \begin{cases} 1, & \gamma \in (-1, 1), \\ \dfrac{(\gamma+1)^2}{4\gamma}, & \gamma \in [1, \infty). \end{cases}$$

所以当 $\gamma \in (-1, 1]$ 时, $\underline{c} = 2$. 当 $\gamma = 2$ 时, 因为对 $c = 2$, 问题 (3.5) 有解 (显式解), 故 $\underline{c} \leqslant 2$. 又 $\underline{c} \geqslant 2$, 于是 $\underline{c} = 2$. 当 $1 \leqslant \gamma \leqslant 2$ 时 f 随 γ 增加, 所以 $\underline{c}$ 随 γ 增加 (见定理 1.2.14), 因而 $\underline{c} = 2$. 总之, 当 $-1 < \gamma \leqslant 2$ 时, $\underline{c} = 2$.

对于 $\gamma > 2$, 考察 $c = c_H := (\gamma+2)/\sqrt{2\gamma}$ 时问题 (3.5) 的解

$$w = \left(1 + \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\zeta}\right)^{-1},$$

则有

$$\lim_{\zeta \to \infty} \frac{dw'}{dw} = \lim_{\zeta \to \infty} \frac{w''}{w'} = -\sqrt{\frac{\gamma}{2}} = -\frac{c_H}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{c_H^2 - 4}.$$

由定理 1.2.15, c_H 必为最小波速，即 $c_H = \underline{c}$.

以上证明了问题 (3.5) 的最小速度

$$\underline{c} = \begin{cases} 2, & -1 < \gamma \leqslant 2, \\ (\gamma+2)/\sqrt{2\gamma}, & \gamma \geqslant 2. \end{cases}$$

再回到问题 (A), (B). 令 $c^* = 2\sqrt{a(1-a)}$,

$$c_0 = \begin{cases} (1+a)/\sqrt{2}, & 0 < a \leqslant 1/3, \\ c^*, & 1/3 \leqslant a \leqslant 1/2. \end{cases} \tag{3.6}$$

记住, 问题 (3.5) 中的 c 乘以 $\sqrt{a(1-a)}$ 才是问题 (A) 与问题 (B) 中的 c. 对于问题 (A), 因为 $\gamma \in (0, 1]$, 所以它的最小速度为

$$c = 2\sqrt{a(1-a)} = c^*.$$

对于问题 (B), 因为 $\gamma=(1-a)/a\in[1,\infty)$, 所以当 $0<a\leqslant 1/3$ 时 $\gamma\in[2,\infty)$, 当 $1/3\leqslant a\leqslant 1/2$ 时 $\gamma\in[1,2]$. 因此, 问题 (B) 的最小速度是

$$\underline{c}=\begin{cases}\dfrac{\gamma+2}{\sqrt{2\gamma}}\sqrt{a(1-a)}, & 0<a\leqslant 1/3,\\ c^*, & 1/3\leqslant a\leqslant 1/2.\end{cases}$$

将 $\gamma=\dfrac{1-a}{a}$ 代入上式得

$$\underline{c}=c_0.$$

对于问题 (C), 这是鞍-鞍情形, 它有唯一波前解, 且已经讨论过. 其结论是: 当 $c=\sqrt{2}(1/2-a)$ 时, 问题 (C) 有单调解.

总结上面的讨论, 有

定理 1.3.1 设 c_0, c^* 由 (3.6) 式给出, $0<a\leqslant 1/2$. 那么

(1) 当 $c\geqslant c_0$ 时, 问题 (3.1) 有满足 $q(-\infty)=1,\ q(\infty)=a$ 的单调下降的波前解 $u(x,t)=q(x-ct)$;

(2) 当 $c\geqslant c^*$ 时, 问题 (3.1) 有满足 $q(-\infty)=0,\ q(\infty)=a$ 的单调上升的波前解 $u(x,t)=q(x-ct)$;

(3) 问题 (3.1) 存在唯一满足 $q(-\infty)=1,\ q(\infty)=0$ 的波前解 $u(x,t)=q(x-ct)$, 其对应的波速 $c=\sqrt{2}(1/2-a)$.

1.3.6 鞍–焦与鞍–结情形的非单调行波解

当 $0<c<c^*=2\sqrt{a(1-a)}$ 时, 对于点 $(0,0)$ 和点 $(a,0)$, 方程 (3.1) 属于鞍–焦情形.

定理 1.3.2 当 $0<c<c^*$ 时, 方程 (3.1) 有振动的行波解

$$u(x,t)=q(x-ct),$$

并满足

$$q(-\infty)=0,\quad q(\infty)=a.$$

证明 由于 $c\neq 0$ 时 $q(-\infty)\neq q(\infty)$, 利用引理 1.2.5 和引理 1.2.6 及相平面上的图形 (图 1.3.3) 即可证明.

再看另一种情形. 对于点 $(1,0)$ 和点 $(a,0)$, 当 $0<c<c^*$ 时方程 (3.1) 属于鞍–焦情形, 而当 $c>c^*$ 时则属于鞍–结情形.

令 $c_1=\sqrt{2}(1/2-a)$, 则有以下不等式:

$$\begin{aligned}&c^*<c_1<c_0, && \text{当 } 0<a<\bar{a} \text{ 时},\\ &c_1<c^*<c_0, && \text{当 } \bar{a}<a<1/3 \text{ 时},\\ &c_1<c^*=c_0, && \text{当 } 1/3<a<1/2 \text{时},\end{aligned}$$

其中 $\bar{a}=\left(1-\sqrt{2/3}\right)/2$ (图 1.3.4).

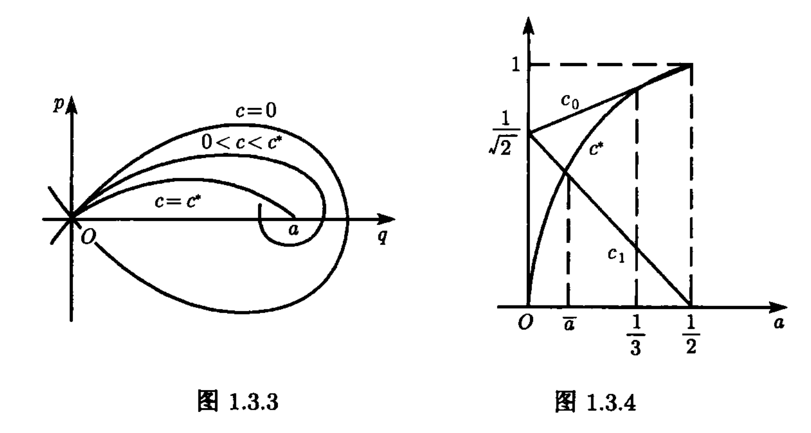


图 1.3.3　　图 1.3.4

定理 1.3.3　(1) 当 $c_1 < c < c^*$ 时, 方程 (3.1) 存在振荡行波解 $u(x,t) = q(x-ct)$ 满足

$$q(-\infty) = 1, \quad q(\infty) = a;$$

(2) 当 $\max(c_1, c^*) < c < c_0$ 时, 方程 (3.1) 存在行波解 $u(x,t) = q(x-ct)$ 满足

$$q(-\infty) = 1, \quad q(\infty) = a,$$

而且 q 单调递减到某个小于 a 的正值, 然后单调递增, 当 $\xi \to \infty$ 时 q 趋于 a.

证明　(1) 由于 $(a,0)$ 是焦点, 由引理 1.2.5 和引理 1.2.6 及图 1.3.5 可得证.

(2) 由于 $(a,0)$ 是结点, 由引理 1.2.5 和引理 1.2.6 及图 1.3.6 可得证.

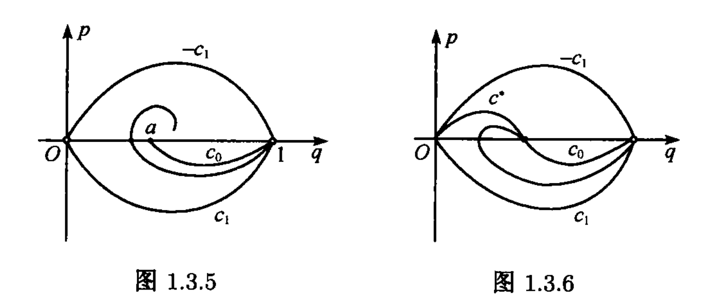


图 1.3.5　　图 1.3.6

1.4　退化 Fisher 方程行波解的存在性

本节考虑退化 Fisher 方程

$$u_t = u_{xx} + u^m(1-u), \quad m > 1 \tag{4.1}$$

的连接 0 和 1 的波前解 $u = q(x-ct)$ 的存在性, 即 $q(\xi)$ 满足

$$
\begin{cases}
q'(\xi) = p(\xi), \\
p'(\xi) = -cp - f(q), \\
p(\xi) > 0, \;\; \xi \in (-\infty, \infty), \\
(q,p)(-\infty) = (0,0), \quad (q,p)(\infty) = (1,0),
\end{cases}
\tag{4.2}
$$

其中 $f(u) = u^m(1-u)$ 满足 $f(0) = f(1) = 0$, $f'(1) < 0$, 当 $0 < u < 1$ 时 $f(u) > 0$, $f'(0) = 0$. 此时 $(1,0)$ 为鞍点，$(0,0)$ 不再是结点或鞍点. 当 $c < 0$ 时, 问题 (4.2) 在 $(0,0)$ 处的线性化矩阵有两特征根 $\sigma_0^-(c) = 0$ 及 $\sigma_0^+(c) = -c > 0$.

由引理 1.1.2 知, 问题 (4.2) 有解的必要条件为 $c < 0$.

定理 1.4.1 对任意固定 $m > 1$，存在 $c^*(m)$ 满足

$$
-2\sqrt{\sup_{(0,1)} \frac{f(u)}{u}} \leqslant c^*(m) < 0,
$$

使得方程 (4.1) 存在波前解 $u = q(x - ct)$ 满足

$$
q(-\infty) = 0, \quad q(\infty) = 1
$$

的充要条件是: $c \leqslant c^*(m)$.

进而在 $\xi = -\infty$ 附近, $q(\xi)$ 有下面渐近衰减性:

$$
q(\xi),\ q'(\xi) \ \sim \mathrm{e}^{-c\xi}, \quad 当\ \xi \to -\infty, \ \ c = c^*(m)\ 时; \tag{4.3}
$$

$$
q(\xi) \sim \left(\frac{c}{(m-1)\xi} \right)^{1/(m-1)}, \quad 当\ \xi \to -\infty, \ \ c < c^*(m)\ 时. \tag{4.4}
$$

证明 为了书写方便, 记

$$
\nu = \sup_{(0,1)} \frac{f(u)}{u}.
$$

显然 $\nu > 0$. 因为 $(1,0)$ 是鞍点，类似定理 1.2.12 的证明, 易证对任意 $c \leqslant -2\sqrt{\nu}$, 满足 $(q,p)(\infty) = (1,0)$ 的在第一象限的唯一轨线 $\Gamma_c : p = p_c(q)$ 当 $0 < q < 1$ 时不会自下而上地穿越直线 OA: $\{q \in (0,1),\ p = \mu q\}$, 其中

$$
\frac{-c - \sqrt{c^2 - 4\nu}}{2} < \mu < \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4\nu}}{2}.
$$

当然 Γ_c 也不会与直线段 AB : $\{0 < p \leqslant \mu,\ q = 1\}$ 相碰.

进而利用反证法可证, 轨线 Γ_c 不会与线段 OB : $\{q \in (0,1), p = 0\}$ 相交. 事实上可证, 对任意固定的 $\delta, \varepsilon \in (0, 1/2)$, 存在充分小的 $m_0 > 0$, 使得当 $q \in [\delta, 1-\varepsilon]$ 时, 轨线 Γ_c 不会从下至上穿过直线段 L : $p = m_0 q$. 于是 Γ_c 必在 $\triangle OAB$ 内, 且满足 $p(0) = 0$. 由此证明了对任意固定的 $c \leqslant -2\sqrt{\nu}$, Γ_c 为满足 (4.2) 的唯一轨线. 类似于定理 1.2.12 的证明, 可证必存在最大波速 c^* 满足 $-2\sqrt{\nu} \leqslant c^* < 0$.

因对任意 $c<0$, $\sigma_0^-(c)<\sigma_0^+(c)=-c$, 完全类似于定理 1.2.15 的证明, 又可证: 当且仅当 $c=c^*$ 时轨线 $\Gamma_c:\ p=p_c(q)$ 满足

$$\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\right|_{(0,0)}=\sigma_0^+(c)=-c,$$

于是 (4.3) 成立. 而当 $c<c^*$ 时, 因 $\sigma_0^-(c)=0$, 且 $\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\right|_{(0,0)}\neq\sigma_0^+(c)$, 根据常微分方程的渐近理论, 当 $\xi\to-\infty$ 时行波解 $q(\xi)$ 不可能指数趋于 0. 进一步利用渐近分析法可证: 当 $\xi\to-\infty$ 时, $q(\xi)$ 代数趋于 0 并满足 (4.4) 式. 式 (4.4) 的严格理论证明可参见 [HL, BN] 或由中心流形定理直接证明. 这里略去细节.

注 4.1 当 $m=2$ 时, 方程 (5.1) 可看成双稳态方程

$$u_t=u_{xx}+u(1-u)(u-a) \tag{4.5}$$

当 $a\to0^+$ 时的极限方程. 由定理 1.3.1 知, 当 $0<a<1$ 时存在唯一波速 $c=c_a:=-\sqrt{2}(1/2-a)$ 使得方程 (4.5) 存在满足 $\phi_a(-\infty)=0$ 及 $\phi_a(\infty)=1$ 的波前解 $u=\phi_a(x-ct)$. 事实上, 类似于 1.3.4 节可直接得到波速 $c=-\frac{1}{\sqrt{2}}:=c_0$ 时问题 (4.2) 的一显式波前解 $\phi_0(\xi)=(1+\mathrm{e}^{c_0\xi})^{-1}$. 因 $\phi_0(\xi)$ 指数趋于零, 由定理 1.4.1, 最大波速 c^* 必为 c_0. 由双稳态方程的波前解 $\phi_a(\xi)$ 及波速 c_a 的显式表示式易见, 当 $a\to0^+$ 时 $c_a\to c_0=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $U_a(\xi)\to U_0(\xi)$. 对 $m=2$ 情形的讨论可参见 [WYZ, BN].

1.5 评 注

在诸如种群动力学、群体遗传学、流行病学、燃烧、结晶和相变等生物学、化学和物理学实际问题的研究中所建立的数学模型很多都归结为形如 (I) 的反应扩散方程 (组), 参见 [F1]. 这些问题的解都呈现振动现象以及扰动以有限速度传播的现象. 而形如 $u(x,t)=\phi(x-ct)$ 的行波解 (为简单计, 这里 $n=1$) 正好能够体现这两个性质. 因而研究反应扩散方程 (组) 的行波解的存在唯一性和稳定性就是既自然又重要的了. Fisher 在研究群体遗传学时, 对优势基因的发展波建立的数学模型就是形如 (I) 的方程, 其中 $f(u)=u(1-u)$, 并对该方程进行了研究, 参见 [Fis1-2]. 因此在英、美等西方国家称该方程为 Fisher 方程. Kolmogorov, Petrovskii 和 Piscounov 对更一般的满足一定条件的 $f(u)$, 严格证明了方程 (I) 的波前解 (ϕ,c) 的存在唯一性以及在一定条件下的初值问题的解趋于某个波前解的渐近性结果, 从而开创了半线性抛物型方程定性理论 (或几何理论) 的新的重要研究方向, 因此在前苏联等国家把此类方程称为 KPP 方程, 参见 [KPP].

若 $m=1$(即对单个的反应扩散方程), 本章已经给了详尽的说明, 其主要方法是相平面分析. 本评注主要对 $m>1$(即方程组) 的情形, 给一个简要的说明.

为简单计, 令 $m=2$, 即要求

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} + f(u,v), \\ v_t = d_2 v_{xx} + g(u,v) \end{cases} \tag{5.1}$$

的形为 $u(x,t)=u(x-ct), v(x,t)=v(x-ct)$ 的解. 若令 $\xi = x-ct$, $u'=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}$, 把 $u(x-ct)=u(\xi), v(x-ct)=v(\xi)$ 代入方程 (5.1) 得

$$\begin{cases} d_1 u'' = -cu' - f(u,v), \\ d_2 v'' = -cu' - g(u,v). \end{cases} \tag{5.2}$$

再令 $u'=w$, $v'=z$, 则有

$$\begin{cases} u' = w, \\ d_1 w' = -cw - f(u,v), \\ v' = z, \\ d_2 z' = -cz - g(u,v). \end{cases} \tag{5.3}$$

这是四个一阶方程构成的常微分方程组, 相空间是四维的. 它的奇点是代数方程组

$$w=0, \quad f(u,v)=0, \quad z=0, \quad g(u,v)=0$$

的解 $(u,v,w,z)=(\bar{u},\bar{v},0,0)$. 行波解只能是连接相空间中两奇点之间的轨道. 设这样的两个奇点是 $(u_-,v_-,0,0)$, $(u_+,v_+,0,0)$, 因而求行波解就是求

$$\begin{cases} \text{方程组 (5.3)}, \quad -\infty<\xi<\infty, \\ (u,v,w,z)|_{\xi=-\infty} = (u_-,v_-,0,0), \\ (u,v,w,z)|_{\xi=\infty} = (u_+,v_+,0,0) \end{cases} \tag{5.4}$$

的解, 这也相当于求

$$\begin{cases} \text{方程组 (5.2)}, \quad -\infty<\xi<\infty, \\ (u,v)|_{\xi=-\infty} = (u_-,v_-), \\ (u,v)|_{\xi=\infty} = (u_+,v_+), \\ (u',v')|_{\xi=\pm\infty} = (0,0) \end{cases} \tag{5.5}$$

的解.

求解问题 (5.4) 的困难在于相应的相空间是四维的, 不像在二维相空间由于有 Poincaré-Bendixson 定理、Lyapunov 稳定性定理等强有力的抽象结果, 使求行波解的问题变得比较容易. 但由于多数实际问题都是方程组而不是方程式, 因而不少人正在致力于问题 (5.4) 和问题 (5.5) 的求解. 现在把问题 (5.4) 和问题 (5.5) 的四种主要求解方法简述如下:

1. **奇异摄动法 (分析奇异摄动法, 几何奇异摄动法)**

这种方法常常应用于带小参数 ε 的方程组情形, 特别当两方程的扩散系数的

比值充分小或充分大时，应用此方法可将方程组 (5.5) 转化为单个反应扩散方程求行波解问题，并常应用于研究具有内边界层的行波解存在性. 如

$$d_1 = \varepsilon^2, \quad d_2 = 1.$$

考虑具慢波速的行波解, 设其形为

$$u(x,t) = u(x-\varepsilon ct), \quad v(x,t) = v(x-\varepsilon ct), \quad \xi = x - \varepsilon ct.$$

于是问题 (5.5) 成为

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u'' + c\varepsilon u' + f(u,v) = 0, & -\infty < \xi < \infty, \\ v'' + c\varepsilon v' + g(u,v) = 0, & -\infty < \xi < \infty, \\ (u,v)|_{\xi=-\infty} = (u_-, v_-), & (u,v)|_{\xi=\infty} = (u_+, v_+). \end{cases} \tag{5.6}$$

首先把求解 $(-\infty, \infty)$ 上的边值问题 (5.6) 化为分别求解 $(-\infty, 0]$ 和 $[0, \infty)$ 上的边值问题.

令 $\varepsilon = 0$ 得到 (5.6) 的极限方程组 (约化问题)

$$\begin{cases} f(U_\pm, V_\pm) = 0, & \xi \in \mathbb{R}_\pm, \\ V_\pm'' + g(U_\pm, V_\pm) = 0, & \xi \in \mathbb{R}_\pm, \\ V_\pm(\pm\infty) = v_\pm, & V_\pm(0) = \beta. \end{cases} \tag{5.7$_\pm$}$$

若存在 β^*, 使得 $(5.7)_\pm$ 存在解 $(U_\pm(\xi), V_\pm(\xi))$ 且 $V_-'(0) = V_+'(0)$, 称 $(U_\pm(\xi), V_\pm(\xi))$ 为 (5.5) 的外解.

若 $U_-(0) \neq U_+(0)$, 则在 $\xi = 0$ 附近需引进快尺度 $\eta = \xi/\varepsilon$, 考虑边界层问题:

$$\begin{cases} W_{\eta\eta} + cW_\eta + f(W, \beta^*) = 0, & \eta \in \mathbb{R}, \\ W(-\infty) = U_-(0), & W(\infty) = U_+(0). \end{cases} \tag{5.8}$$

若存在 $c = c^*$ 使得 (5.8) 存在解 $W(\eta)$, 称 $W(\xi/\varepsilon)$ 为 (5.6) 的内解, 并得到奇异极限解 ($\varepsilon > 0$ 充分小时问题 (5.6) 的最低阶近似解):

$$(u^0(\xi), v^0(\xi)) = \begin{cases} (U_+(\xi) + W(\xi/\varepsilon) - U_+(0),\ V_+(\xi)), & \xi \in \mathbb{R}_+, \\ (U_-(\xi) + W(\xi/\varepsilon) - U_-(0),\ V_-(\xi)), & \xi \in \mathbb{R}_-. \end{cases}$$

进而若 $(u^0(\xi), v^0(\xi))$ 满足特殊奇异隐函数定理条件 (或几何奇异摄动法中横截相交条件), 则得到 $\varepsilon > 0$ 充分小时, 存在 $c = c(\varepsilon)$ 使得 (5.6) 在 $(u^0(\xi), v^0(\xi))$ 附近存在行波解 $(u_\varepsilon(\xi), v_\varepsilon(\xi))$, $\xi = x - c\varepsilon$, 其中 $u_\varepsilon(\xi)$ 具内边界层且 $c(\varepsilon) \to c^*$ 当 $\varepsilon \to 0^+$. 关于分析奇异摄动法及几何奇异摄动法的细节及具体应用实例可参看 [IMN, Sz, Wu, WZ].

2. 打靶法

结合对奇点的稳定流形和不稳定流的具体分析, 应用常微分方程的有关结果或拓扑学工具, 证明行波解的存在性, 参看 [Dun, FT, Ty].

3. Conley 指标法

方程组 (5.1) 的解 $(u(x,t), v(x,t))$ 在适当的 Banach 空间中可以看成是一个半流, 因而可以用拓扑学中有关理论来处理. 主要的思想是利用 Conley 指标的同伦不变性, 把方程组 "保持指标不变地" 变换到一组 "标准" 方程组, 而该标准方程组的 Conley 指标是容易计算的, 从而证明了行波解的存在性. 关键是确定孤立区域, 有兴趣的读者可参看 [Ga, Sm].

4. 有限区间逼近法

把行波解看成有限区间 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上的解 $(u_a(\xi), v_a(\xi), c)$ 当 $a\to\infty$ 时的极限, 即先求解

$$\begin{cases} \text{方程组 (5.2)}, \quad -a<\xi<a, \\ \text{加上在 } \xi=\pm a \text{ 处 “合适” 的边界条件}. \end{cases} \tag{5.9}$$

问题 (5.9) 是有限区间 $[-a,a]$ 上的边值问题, 相对于 $(-\infty,\infty)$ 上的边值问题, 它的可解性方法可能多一点. 假设问题 (5.9) 的解是 $(u_a(\xi), v_a(\xi), c)$, 而且对任意充分大的 a, 问题 (5.9) 都有解.

如果能对解 $(u_a(\xi), v_a(\xi), c)$ 做出很好的先验估计, 那就有可能证明当 $a\to\infty$ 时从 $(u_a(\xi), v_a(\xi), c)$ 中可抽出一收敛子序列, 而极限函数 $(u(\xi), v(\xi), c)$ $(-\infty<\xi<\infty)$ 正好是问题 (5.5) 的解, 从而证明了行波解的存在性. 这种方法的好处是为计算提供了方便, 该方法的细节可参看 [BNS, LY, JLY, YW].

关于本章 1.2~1.4 节中研究的三类有代表性的单个反应扩散方程行波解的稳定性, 已经有了很系统的理论研究结果, 参见 [AW, B, FM1-2, F1-2, Hag, Kir, OR, Sm, Uc ,WX, WXY]; 关于反应扩散方程组的行波解的稳定性研究也有了很多重要的研究工作. 在第 10 章将介绍行波稳定性基本概念、线性稳定性理论及谱方法, 并详细介绍如何利用谱方法研究本章 1.2 – 1.4 节的三类基本方程的波前解的渐近稳定性.

习 题 一

1.1 证明热传导方程

$$u_t = u_{xx}$$

不存在非常数有界行波解.

1.2 考察 Burger 方程

$$u_t + uu_x = \theta^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

(1) 证明对任意 $u_- > u_+$, 当且仅当 c 满足 $c = \dfrac{u_- + u_+}{2}$ (Rankine-Hugoniot 条件) 时, Burger 方程存在波前解 (粘性冲击波) $u = q\left(\dfrac{x-ct}{\theta}\right)$ 满足

$$q(-\infty) = u_-, \quad u(\infty) = u_+.$$

(2) 求出 (1) 中波前解 $u = q\left(\dfrac{x-ct}{\theta}\right)$ 的显示表达式.

1.3　设 $f_i \in C[0,1]$, 当 $u \in (0,1)$ 时 $f_1(u) < f_2(u)$, 且存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < 1-\delta < u < 1$ 时 $f_1(u) \geqslant 0$. 又设 $p_i(q)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}q} + \dfrac{f_i(q)}{p_i} = -c, \\ p_i(1) = 0, \\ p_i(q) > 0, \quad 0 \leqslant a_0 < q < 1, \quad i = 1,2. \end{cases}$$

证明 $p_2(q) > p_1(q)$, $q \in (a_0, 1)$.

1.4　证明定理 1.2.13.

1.5　证明定理 1.2.14.

1.6　设 $f \in C^1[0,1]$, $f(0) = 0$, $f'(0) < 0$, c_n 单调下降, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c^*$.

(1) 若 $[0,\beta] \subset [0,1]$, $p_n(q) \in C[0,\beta] \cap C^1(0,\beta)$, 在 $(0,\beta)$ 均正且满足

$$\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}q} + \frac{f(q)}{p_n} = -c_n, \quad p_n(0) = 0.$$

证明问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} + \dfrac{f(q)}{p} = -c^*, \quad 0 < q < \beta, \\ p(0) = 0, \quad p(q) > 0, \quad q \in (0,\beta), \\ p(q) \in C[0,\beta] \cap C^1(0,\beta) \end{cases}$$

存在唯一解 $p^*(q)$ 且

$$\lim_{n\to\infty} p_n(q) = p^*(q), \quad q \in [0,\beta].$$

(2) 若 $[0,\beta_n] \subset [0,1]$, $p_n(q) \in C[0,\beta_n] \cap C^1(0,\beta_n)$, 在 $(0,\beta_n)$ 上均正且满足

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}q} + \dfrac{f(q)}{p_n} = -c_n, \\ p_n(0) = p_n(\beta_n) = 0. \end{cases}$$

证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \beta$ 存在, 并且问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}+\dfrac{f(q)}{p}=-c^*, \\
p(0)=0, \quad p(\beta)=0, \quad p(q)>0, \quad q\in(0,\beta), \\
p(q)\in C[0,\beta]\cap C^1(0,\beta)
\end{cases}
$$

存在唯一解.

1.7 讨论方程

$$q''+q(1-q)(q-1/2)=0.$$

问：是否存在解 $q(\xi)$ 满足

$$q(\pm\infty)\in\{0,1/2,1\}.$$

如果存在这种解，有几个?

1.8 对于方程

$$u_t=u_{xx}+u-u^3,$$

试证明：

(1) 存在唯一平衡解 $\varphi_1(x)$ 满足：$\varphi_1(-\infty)=-1$, $\varphi_1(\infty)=1$; 存在唯一平衡解 $\varphi_2(x)$ 满足：$\varphi_2(-\infty)=1$, $\varphi_2(\infty)=-1$.

(2) 存在满足 $q(-\infty)=0$, $q(\infty)=1$ 的波前解 $u=q(x-ct)$ 的充要条件是 $c\leqslant -2$.

(3) 存在唯一波前解 $u=q(x-ct)$ 满足：$q(-\infty)=-1$, $q(\infty)=1$. 能否求出这个波前解的显式表达式?

(4) 当 $-2<c<0$ 时，存在振荡行波解 $u=q(x-ct)$ 满足：$q(-\infty)=0$, $q(\infty)=1$.

第 2 章　基于最大值原理的比较方法及其应用

2.1　最大值原理

研究椭圆型方程和抛物型方程的一个重要方法是所谓的比较方法, 它的基础是最大值原理. 本书引述椭圆型方程与抛物型方程的最大值原理 (不给出证明).

首先介绍椭圆型方程. 令

$$Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i},\quad x\in\Omega, \tag{1.1}$$

$$Bu=a\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+b(x)u,\quad x\in\partial\Omega, \tag{1.2}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界光滑区域 (例如边界 $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$), a_{ij}, $b_i\in C(\bar\Omega)$, $-L$ 是 Ω 上的一致椭圆算子, $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向, a, b 是

(1) $a=0,\ b=1$;　或 (2) $a=1,\ b(x)\geqslant 0,\ b(x)\in C(\partial\Omega)$.

如果对任意 $P\in\partial\Omega$, 都存在闭球 S 在 P 点与 $\partial\Omega$ 相切, 并且除 P 点外 $S\subset\Omega$, 则称 $\partial\Omega$ 有内切球性质. 当 $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$ 时, 一定有内切球性质.

引理 2.1.1 (导数形式的最大值原理, 也称 Hopf 引理)　假设 $\partial\Omega$ 有内切球性质, $c(x)\geqslant 0$ 且有界, $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ 满足

$$Lu+c(x)u\leqslant 0\ (\geqslant 0),\quad x\in\Omega.$$

又设 u 在点 $P\in\partial\Omega$ 处达到最大值 M (最小值 m), 并且当 $c(x)\not\equiv 0$ 时 $M\geqslant 0$ ($m\leqslant 0$). 若 u 不恒为常数且 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_P$ 存在, 则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_P>0\ (<0).$$

引理 2.1.2 (强最大值原理)　假设 $c(x)\geqslant 0$ 且有界, $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ 满足

$$Lu+cu\leqslant 0\ (\geqslant 0),\quad x\in\Omega.$$

如果 u 在 Ω 内某点处达到它在 $\bar\Omega$ 上的最大值 M (最小值 m), 并且当 $c(x)\not\equiv 0$ 时, $M\geqslant 0$ ($m\leqslant 0$), 则 u 恒为常数.

推论 2.1.3　假设 $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ 满足

$$Lu=0,\quad x\in\Omega.$$

那么 u 一定在 $\partial\Omega$ 上取到其最大值和最小值.

由上述引理可以证明下面两个引理.

引理 2.1.4 设 $c(x) \geqslant 0$ 且有界, 又 $c(x)$ 与 $b(x)$ 不同时恒为零, 当 Bu 中的 $a=1$ 时又设 $\partial\Omega$ 有内切球性质. 若 $u(x)$ 满足

$$\begin{aligned} &Lu + c(x)u \geqslant 0, && x \in \Omega, \\ &Bu \geqslant 0, && x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

并且 u 与相应的椭圆边值问题的古典解有相同的光滑性, 则

$$u(x) \geqslant 0, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

又若 $u(x) \not\equiv 0$, 则

$$u(x) > 0, \quad x \in \Omega.$$

引理 2.1.5 设 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 满足

$$\begin{aligned} &Lu \geqslant f(x,u), && x \in \Omega, \\ &Bu \geqslant 0, && x \in \partial\Omega, \\ &u \geqslant 0, \quad u \not\equiv 0, && x \in \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

若 $f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}), f(x,0) \geqslant 0$, 则

$$u(x) > 0, \quad x \in \Omega.$$

引理 2.1.4 与引理 2.1.5 的证明留作习题

在引理 2.1.5 中，常常用到的是一个特殊情形：$f(x,u) = ug(x,u)$. 最简单的 Lu 是 $-\Delta u$ (当 $n>1$ 时), $-u''$ (当 $n=1$ 时).

下面介绍抛物型方程. 令

$$L_t u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \tag{1.3}$$

$$\mathscr{L}u = u_t + L_t u, \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} &Q_T = \Omega \times (0,T], \quad && S_T = \partial\Omega \times (0,T], \\ &Q_\infty = \Omega \times (0,\infty), \quad && S_\infty = \partial\Omega \times (0,\infty), \end{aligned}$$

其中 $a_{ij}, b_i \in C(\bar{Q}_T), -\mathscr{L}$ 是 Q_T 上的抛物算子. 再令

$$B_t u = a\frac{\partial u}{\partial n} + b(x,t)u, \quad (x,t) \in S_T, \tag{1.5}$$

其中 a, b 满足: (1) $a=0, b=1$, 或 (2) $a=1, b(x,t) \geqslant 0$.

引理 2.1.6 (导数形式的最大值原理) 假设 $c(x,t) \geqslant 0$ 有界, $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ ($C^{2,1}$ 即对 x 属于 C^2, 对 t 属于 C^1) 并且满足

$$\mathscr{L}u + c(x,t)u \leqslant 0\ (\geqslant 0).$$

若存在 $(\bar{x},\bar{t}) \in \partial\Omega \times [0,T]$, 使得 $u(\bar{x},\bar{t}) = \max\limits_{\bar{Q}_T} u(x,t) = M$ $(u(\bar{x},\bar{t}) = \min\limits_{\bar{Q}_T} u(x,t) = m)$, 且在 Q_T 上 $u < M$ $(u > m)$, 当 $c(x,t) \not\equiv 0$ 时 $M \geqslant 0$ $(m \leqslant 0)$. 又若 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(\bar{x},\bar{t})}$ 存在, 其中 $\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 上的单位外法向, $\partial\Omega$ 有内切球性质, 则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} > 0\ (< 0).$$

引理 2.1.7　假设 $c(x,t) \geqslant 0$ 有界, $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, 并且满足

$$\mathscr{L}u + c(x,t)u \leqslant 0\ (\geqslant 0).$$

若在 $\bar{Q}_T$ 上 $u \leqslant M(u \geqslant m)$, 并且存在 $(x_1,t_1) \in Q_T$, 使得 $u(x_1,t_1) = M$ $(u(x_1,t_1) = m)$, 同时当 $c(x,t) \not\equiv 0$ 时 $M \geqslant 0(m \leqslant 0)$, 则在 Q_T 上

$$u(x,t) = M \quad (u(x,t) = m).$$

引理 2.1.8　设 $h(x,t)$ 在 Q_T 上有界, $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ 并且满足

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}u + h(x,t)u \geqslant 0, && (x,t) \in Q_T, \\ &B_t u \geqslant 0, && (x,t) \in S_T, \\ &u(x,0) \geqslant 0, && x \in \Omega. \end{aligned}$$

当 Bu 中的 $a = 1$ 时, 又设 $\partial\Omega$ 有内切球性质, 则 $u(x,t) \geqslant 0$. 又若 $u(x,0) \not\equiv 0$, 则 $u(x,t) > 0$, $(x,t) \in Q_T$.

证明　令 $u = v\mathrm{e}^{\alpha t}$, 其中 α 充分大使得 $c = \alpha + h > 0$, 则有

$$\mathscr{L}u + hu = [\mathscr{L}v + (\alpha + h)v]\mathrm{e}^{\alpha t} \geqslant 0,$$

即

$$\mathscr{L}v + cv \geqslant 0, \quad (x,t) \in Q_T.$$

又

$$B_t v \geqslant 0, \quad (x,t) \in S_T; \quad v(x,0) \geqslant 0, \quad x \in \Omega,$$

利用引理 2.1.6 与引理 2.1.7 易证 $\min\limits_{\bar{Q}_T} v(x,t) = m \geqslant 0$, 从而 $u \geqslant 0$. 现设 $u(x,0) \not\equiv 0$, 即 $v(x,0) \not\equiv 0$. 若存在 $(x_1,t_1) \in Q_T$ 使 $u(x_1,t_1) = 0$, 则 $v(x_1,t_1) = 0 = \min\limits_{\bar{Q}_T} v(x,t)$. 由引理 2.1.7 得矛盾, 因此 $v(x,t) > 0$, 即 $u(x,t) > 0$. 证毕.

上述未证明的引理可参见文献 [PrW].

2.2 嵌入定理, 线性问题解的存在唯一性及估计

比较方法的另一基础是嵌入定理及线性问题解的存在唯一性与先验估计. 本节引述这方面的结论.

2.2.1 几个函数空间

记 $l=(l_1,\cdots,l_n)$, $|l|=\sum_{i=1}^{n}l_i$, 其中 l_i 为非负整数. 函数 u 的弱导数记为

$$D^l u=\frac{\partial^{|l|}u}{\partial x_1^{l_1}\cdots\partial x_n^{l_n}}.$$

设常数 $0<\alpha<1$, 区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. 一个函数 u 的指数为 α 的 Hölder 系数定义为

$$H_\alpha(u)=\sup_{x,y\in\Omega}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

对于正整数 k 和常数 $p\geqslant 1$, 引入以下空间及相应的范数:

$$
\begin{aligned}
C^\alpha(\bar\Omega)&=\{u:\ H_\alpha(u)<\infty\},\\
|u|_{\alpha,\Omega}&=H_\alpha(u)+\max_{\bar\Omega}|u(x)|;\\
C^{k+\alpha}(\bar\Omega)&=\{u:\ u\in C^k(\bar\Omega),\ H_\alpha(D^l u)<\infty,\ |l|=k\},\\
|u|_{k+\alpha,\Omega}&=\sum_{|l|\leqslant k}\max_{\bar\Omega}|D^l u(x)|+\sum_{|l|=k}H_\alpha(D^l u);\\
L_p(\Omega)&=\left\{u:\ u\text{在 }\Omega\text{ 上可测},\int_\Omega|u(x)|^p\mathrm{d}x<\infty\right\},\\
\|u\|_p&=\left(\int_\Omega|u(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac1p};\\
W_p^k(\Omega)&=\{u:\ u\in L_p(\Omega),\ D^l u\in L_p(\Omega),\ \ \forall\ |l|\leqslant k\},\\
\|u\|_{k,p}&=\|u\|_{W_p^k(\Omega)}=\left(\sum_{|l|\leqslant k}\int_\Omega|D^l u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac1p}.
\end{aligned}
$$

上述空间均是 Banach 空间, 并有以下结论:

(1) 若 $k\geqslant k'$, $\alpha\geqslant\alpha'$, $k+\alpha>k'+\alpha'$, 则 $C^{k+\alpha}(\bar\Omega)$ 中的有界集是 $C^{k'+\alpha'}(\bar\Omega)$ 中的列紧集.

(2) $W_p^k(\Omega)$ 中的有界集是 $W_p^{k-1}(\Omega)$ 中的列紧集.

在不致引起混淆的情况下，为了书写简便，通常简记 $|u|_{\alpha,\Omega}=|u|_\alpha$，$|u|_{k+\alpha,\Omega}=|u|_{k+\alpha}$.

设 k 是非负整数, 常数 $p\geqslant 1$. 引入以下空间及相应的范数:

$$W_p^{2k,k}(Q_T)=\{u:\ u\in L_p(Q_T),\ D_t^rD_x^su\in L_p(Q_T),\ \forall\ 2r+|s|\leqslant 2k\},$$

$$\|u\|_{p,Q_T}^{(2k)}=\sum_{0\leqslant 2r+|s|\leqslant 2k}\|D_t^rD_x^su\|_{p,Q_T};$$

$$C^{2k,k}(\bar{Q}_T)=\{u:\ D_t^rD_x^su\in C(\bar{Q}_T),\ \ \forall\ 2r+|s|\leqslant 2k\},$$

$$|u|_{\bar{Q}_T}^{(2k)}=\sum_{0\leqslant 2r+|s|\leqslant 2k}\max_{\bar{Q}_T}|D_t^rD_x^su|;$$

$$C^{2k+\alpha,k+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)=\{u:\ u\in C^{2k,k}(\bar{Q}_T),\ H_{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(D_t^rD_x^su)<\infty,\ \ \forall\ 2r+|s|\leqslant 2k\},$$

$$|u|_{\bar{Q}_T}^{(2k+\alpha)}=\sum_{0\leqslant 2r+|s|\leqslant 2k}\max_{\bar{Q}_T}|D_t^rD_x^su|+\sum_{2r+|s|=2k}H_{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(D_t^rD_x^su),$$

其中

$$\|D_t^rD_x^su\|_{p,Q_T}=\left(\int_{Q_T}|D_t^rD_x^su|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$H_{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(u)=\sup_{\substack{(x,t),(y,s)\in Q_T\\(x,t)\neq(y,s)}}\frac{|u(x,t)-u(y,s)|}{|x-y|^\alpha+|t-s|^{\alpha/2}}.$$

空间 $W_p^{2k,k}(Q_T),C^{2k,k}(\bar{Q}_T)$ 和 $C^{2k+\alpha,k+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ 都是 Banach 空间.

2.2.2 嵌入定理及线性椭圆型方程的边值问题

引理 2.2.1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界光滑区域, $n<p<\infty$, 则

$$W_p^{k+1}(\Omega)\hookrightarrow C^{k+\alpha}(\bar{\Omega}),$$

其中 $\alpha=1-\dfrac{n}{p}$, 即对任意 $u\in W_p^{k+1}(\Omega)$, 存在 $\bar{u}\in C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$, 使得在 Ω 上几乎处处有 $u=\bar{u}$ 且

$$|\bar{u}|_{k+\alpha}\leqslant C(n,p,\Omega)\|u\|_{k+1,p},\tag{2.1}$$

常数 $C(n,p,\Omega)$ 与 u 无关. 一般把不等式 (2.1) 写成

$$|\bar{u}|_{k+\alpha}\leqslant C\|u\|_{k+1,p}.$$

证明参见文献 [A] 第 5 章.

下面考虑边值问题

$$\begin{cases}Lu+c(x)u=f(x), & x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n,\\ Bu=g(x), & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{2.2}$$

假定:

$$\begin{cases} (1)\ \text{算子}\ L\ \text{由 (1.1) 式给出},\ -L\ \text{是}\ \Omega\ \text{上的一致椭圆算子},\ \partial\Omega\in C^{2+\alpha}; \\ (2)\ a_{ij},\ b_i,\ c\in C^{\alpha}(\bar{\Omega}),\quad 0<\alpha<1; \\ (3)\ \text{算子}\ B\ \text{由 (1.2) 式给出},\ b\in C^{1+\alpha}(\partial\Omega),\ b(x)\geqslant 0,\ g\in C^{2+\alpha}(\partial\Omega). \end{cases} \tag{2.3}$$

同时还假设函数 $g(x)$ 可延拓到 Ω 的内部成为 $\hat{g}(x)$, 使得 $\hat{g}(x)\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, 并且满足

$$\hat{g}(x)=g(x),\quad x\in\partial\Omega.$$

定理 2.2.2 (Agmon-Douglas-Nirenberg) 设条件 (2.3) 成立, $c(x)\geqslant 0$, 并且当 $b(x)\equiv 0$ 时 $c(x)\not\equiv 0$. 若 $f\in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, 则问题 (2.2) 存在唯一解 $u\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 并有 Schauder 估计:

$$|u|_{2+\alpha}\leqslant C_1(|f|_{\alpha}+|\hat{g}|_{2+\alpha}).$$

若 $f\in L_p(\Omega)$ $(p>1)$, 那么条件 (2.3) 中的 $g(x)$ 只需可延拓成 $\hat{g}(x)\in W_p^2(\Omega)$, 问题 (2.2) 仍有唯一解 $u\in W_p^2(\Omega)$ 并有 L_p 估计

$$\|u\|_{2,p}\leqslant C_2(\|f\|_p+\|\hat{g}\|_{2,p}),$$

其中 C_1, C_2 和 u, f, g 无关. 证明参见文献 [ADN].

把问题 (2.2) 的唯一解记为 $u=Af$, 由此定义了一个算子 A. 当 $g\equiv 0$ 时 A 是线性算子.

引理 2.2.3 (1) $A: C^{\alpha}(\bar{\Omega})\to C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 是 $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ 上的紧算子.

(2) $A: C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})\to C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 是 $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ 上的紧算子.

(3) $A: L_p(\Omega)\to W_p^2(\Omega)$ 是 $L_p(\Omega)$ 上的紧算子.

(4) $A: C(\bar{\Omega})\to W_p^2(\Omega)$ $(p>n)$ 是 $C(\bar{\Omega})$ 上的紧算子.

证明 A 映 $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ 中的有界集为 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中的有界集, 从而是 $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ 和 $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中的列紧集.

A 映 $L_p(\Omega)$ 中的有界集为 $W_p^2(\Omega)$ 中的有界集, 因而是 $L_p(\Omega)$ 中的列紧集.

对于 $p>n$, 因为 $C(\bar{\Omega})\subset L_p(\Omega)$, 所以 $C(\bar{\Omega})$ 中的有界集为 $L_p(\Omega)$ 中的有界集. 故 A 映 $C(\bar{\Omega})$ 中的有界集为 $W_p^2(\Omega)$ 中的有界集. 再由嵌入定理, 它是 $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ 中的有界集, 因而是 $C(\bar{\Omega})$ 中的列紧集.

现在证明 A 的连续性. 令

$$u_i=Af_i\ \ (i=1,2),\quad v=u_2-u_1,$$

则

$$\begin{cases} Lv+c(x)v=f_2(x)-f_1(x), & x\in\Omega, \\ Bv=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

由此利用定理 2.2.2 可证 A 的连续性. 证毕.

2.2.3 线性抛物型方程的初边值问题

现在考虑线性抛物型方程的初边值问题:

$$\begin{cases} \mathscr{L}u + c(x,t)u = f(x,t), & (x,t) \in Q_T, \\ u = g(x,t), & (x,t) \in S_T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

或

$$\begin{cases} \mathscr{L}u + c(x,t)u = f(x,t), & (x,t) \in Q_T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + b(x,t)u = g(x,t), & (x,t) \in S_T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

其中 $\mathscr{L}$ 由 (1.4) 式给出, $\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 上的单位外法向.

在空间 $W_p^{2k,k}(Q_T)$ (其中 k 是正整数, $p>1$) 中求解问题 (2.4) 或问题 (2.5), 并得到 L_p 估计. 这里仅就问题 (2.4) 来叙述.

定理 2.2.4　设 $p>1$, $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$ 是 Q_T 上的连续有界函数. 若 $f \in L_p(Q_T)$, $\varphi(x) \in W_p^2(\Omega)$, S_T 上的函数 $g(x,t)$ 可延拓为 Q_T 上的函数 $\hat{g}(x,t) \in W_p^{2,1}(Q_T)$ 且满足相容性条件

$$\varphi(x)|_{\partial\Omega} = g(x,0)|_{\partial\Omega},$$

则问题 (2.4) 有唯一解 $u \in W_p^{2,1}(Q_T)$ 且有估计

$$\|u\|_{p,Q_T}^{(2)} \leqslant C(\|f\|_{p,Q_T} + \|\varphi\|_{W_p^2(\Omega)} + \|\hat{g}\|_{p,Q_T}^{(2)}).$$

现在在空间 $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ 中考虑问题 (2.4) 和问题 (2.5) 的唯一可解性.

定理 2.2.5　设 $a_{ij}, b_i, c \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T), \partial\Omega \in C^{2+\alpha}$. 若 $f \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T), \varphi(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, g 可延拓为 $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ 上的函数 $\hat{g}$, 且满足相容性条件:

$$\varphi(x)|_{\partial\Omega} = g(x,0)|_{\partial\Omega},$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,0)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} - \sum_{i=1}^n b_i(x,0)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - c(x,0)\varphi + f(x,0)\right]_{\partial\Omega} = \frac{\partial g(x,0)}{\partial t}\Big|_{\partial\Omega},$$

则问题 (2.4) 有唯一解

$$u(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T),$$

并有估计

$$|u|_{\bar{Q}_T}^{(2+\alpha)} \leqslant C(|f|_{\bar{Q}_T}^{(\alpha)} + |\varphi|_{2+\alpha,\Omega} + |\hat{g}|_{\bar{Q}_T}^{(2+\alpha)}),$$

其中 C 不依赖于 f, g 和 φ.

定理 2.2.6 设 $a_{ij},b_i,c\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$, $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$, $b(x,t)|_{S_T}\geqslant 0, b(x,t)$ 可延拓为 $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ 中的函数. 若 $f\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$, $\varphi\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, g 可延拓为 $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ 中的函数 $\hat{g}$, 又满足相容性条件

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{n}}+b(x,0)\varphi\right]_{\partial\Omega}=g(x,0)|_{\partial\Omega},$$

则问题 (2.5) 有唯一解

$$u(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T),$$

并有估计

$$|u|^{(2+\alpha)}_{\bar{Q}_T}\leqslant C(|f|^{(\alpha)}_{\bar{Q}_T}+|\varphi|_{2+\alpha,\Omega}+|\hat{g}|^{(2+\alpha)}_{\bar{Q}_T}),$$

其中 C 不依赖于 f,φ,g.

定理 2.2.7 设 $a_{ij},b_j,c\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T),\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$. 若 $f\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T),\varphi\in C(\bar{\Omega}),g\in C(\bar{S}_T)$, 且满足相容性条件

$$\varphi(x)|_{\partial\Omega}=g(x,0)|_{\partial\Omega},$$

则问题 (2.4) 有唯一解.

2.3 椭圆型方程边值问题的比较方法

2.3.1 上、下解与比较方法

现在介绍椭圆型方程边值问题的比较方法, 它依赖于能否找到合适的上、下解. 一旦找到这样的上、下解, 不仅证明了边值问题解的存在性, 而且还得到解的估计式. 比较方法又称上、下解方法.

考虑半线性椭圆型方程的边值问题

$$\begin{cases} Lu=f(x,u), & x\in\Omega,\\ Bu=g(x), & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{3.1}$$

其中算子 L 与 B 分别由 (1.1) 式和 (1.2) 式给出, 并满足条件 (2.3).

定义 2.3.1 函数 $\bar{u}\in C^2(\bar{\Omega})$ 称为问题 (3.1) 的上解, 若

$$L\bar{u}\geqslant f(x,\bar{u}),\quad x\in\Omega;\quad B\bar{u}\geqslant g(x),\quad x\in\partial\Omega.$$

函数 $\underline{u}\in C^2(\bar{\Omega})$ 称为问题 (3.1) 的下解, 若

$$L\underline{u}\leqslant f(x,\underline{u}),\quad x\in\Omega;\quad B\underline{u}\leqslant g(x),\quad x\in\partial\Omega.$$

根据定义, 问题 (3.1) 的解既是上解又是下解. 下面将利用问题 (3.1) 的上、下解构造出它的解.

定理 2.3.2 设 $\bar{u}$, $\underline{u}$ 分别是问题 (3.1) 的上、下解, $\bar{u} \geqslant \underline{u}$ 并且 $m = \min_{\bar{\Omega}} \underline{u} < M = \max_{\bar{\Omega}} \bar{u}$. 若存在常数 $K > 0$, 使得对任意的 $(x,u),(y,v) \in \bar{\Omega} \times [m,M]$, 有

$$|f(x,u) - f(y,v)| \leqslant K\big(|x-y|^\alpha + |u-v|\big),$$

则问题 (3.1) 存在一个解 $u(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 且满足

$$\underline{u}(x) \leqslant u(x) \leqslant \bar{u}(x).$$

证明 任意给定 $u \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, 并且当 $x \in \Omega$ 时, $u(x) \in [m,M]$. 线性问题

$$\begin{cases} (L+K)v = Ku + f(x,u), & x \in \Omega, \\ Bv = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

有唯一解 $v \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. 由此定义了一个非线性算子:

$$v = Tu.$$

这样, 问题就变成了证明 T 存在不动点. 分以下几步.

(1) 证明算子 T 单调不减: 若 $\underline{u}(x) \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \bar{u}(x)$, 则 $\underline{u}(x) \leqslant z_1 = Ty_1 \leqslant z_2 = Ty_2 \leqslant \bar{u}(x)$.

令 $w = z_2 - z_1$, 则

$$\begin{cases} (L+K)w = f(x,y_2) - f(x,y_1) + K(y_2 - y_1) \geqslant 0, & x \in \Omega, \\ Bw = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

由引理 2.1.4 知 $w \geqslant 0$, 即 $Ty_1 \leqslant Ty_2$. 同样地, 令 $v = z_1 - \underline{u}$, 则

$$\begin{cases} (L+K)v \geqslant f(x,y_1) - f(x,\underline{u}) + K(y_1 - \underline{u}) \geqslant 0, & x \in \Omega, \\ Bv = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

于是 $v \geqslant 0$, 即 $\underline{u} \leqslant z_1$. 同理可证 $z_2 \leqslant \bar{u}$.

(2) 构造点点收敛的单调序列.

按如下方式构造迭代序列 $\{u_n\}$ 与 $\{v_n\}$:

$$u_1 = T\bar{u}, u_2 = Tu_1, \cdots, u_n = Tu_{n-1}, \cdots,$$

$$v_1 = T\underline{u}, v_2 = Tv_1, \cdots, v_n = Tv_{n-1}, \cdots.$$

因为 $\underline{u} \leqslant \bar{u}$, 前面已经证明

$$\underline{u} \leqslant v_1 = T\underline{u} \leqslant T\bar{u} = u_1 \leqslant \bar{u},$$

由 T 的单调不减性归纳地证得

$$\underline{u} \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant \bar{u}.$$

因为 $\underline{u} \leqslant u_1 \leqslant \bar{u}$, 所以

$$\underline{u} \leqslant Tu_1 = u_2 \leqslant T\bar{u} = u_1 \leqslant \bar{u}.$$

于是由归纳法得

$$u_{n+1} \leqslant u_n.$$

同理可证

$$v_n \leqslant v_{n+1}.$$

因此

$$\underline{u} \leqslant v_1 \leqslant v_2 \leqslant \cdots \leqslant u_2 \leqslant u_1 \leqslant \bar{u}.$$

这说明 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 都是单调有界序列, 所以它们逐点收敛, 记

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \tilde{u}, \quad \lim_{n\to\infty} v_n = \tilde{v}.$$

于是

$$\underline{u} \leqslant \tilde{v} \leqslant \tilde{u} \leqslant \bar{u}.$$

(3) 证明 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 均是 T 的不动点且属于 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.

利用一个事实: 若 $w_n(x)$ 在 $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中有界, 又

$$\lim_{n\to\infty} w_n(x) = w(x) \quad (x \in \bar{\Omega}, \text{逐点收敛}),$$

则对 $0 < \mu < \alpha$, $w(x) \in C^{k+\mu}(\bar{\Omega})$ 且在 $C^{k+\mu}(\bar{\Omega})$ 中 $w_n(x)$ 收敛到 $w(x)$, 见习题 2.5. 因此, 只需再证 u_n 和 v_n 在 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中有界.

取 $p > n$, 其中 n 是 Ω 的维数. 由 L_p 估计得

$$\|u_n\|_{2,p} \leqslant M_1[\|f(x,u_{n-1})\|_p + K\|u_{n-1}\|_p + \|\hat{g}\|_{2,p}] \leqslant M_2.$$

由嵌入定理又得

$$|u_n|_\alpha \leqslant C_1\|u_n\|_{1,p} \leqslant C_1\|u_n\|_{2,p} \leqslant M_3.$$

再由 Schauder 估计知

$$|u_n|_{2+\alpha} \leqslant C[|f(x,u_{n-1})|_\alpha + K|u_{n-1}|_\alpha + |\hat{g}|_{2+\alpha}] \leqslant M.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \tilde{u}$, 所以 $\tilde{u} \in C^{2+\mu}(\bar{\Omega})$, $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n - \tilde{u}|_{2+\mu} = 0$, 其中 $0 < \mu < \alpha$. 因此

$$\tilde{u} = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} Tu_{n-1} = T(\lim_{n\to\infty} u_{n-1}) = T\tilde{u}.$$

由于 $T : C^\alpha(\bar{\Omega}) \to C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, 所以 $\tilde{u} \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. 类似可证 $\tilde{v} \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $T\tilde{v} = \tilde{v}$. 证毕.

注 3.1 若 $\min\limits_{\bar{\Omega}} \underline{u} = \max\limits_{\bar{\Omega}} \bar{u}$, 则 $\underline{u} = \bar{u} =$ 常数, 它显然就是一个解.

注 3.2 这里得到了问题 (3.1) 的两个解 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$, 但是不能排除它们相同.

推论 2.3.3 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 是问题 (3.1) 在区域 $\underline{u} \leqslant u \leqslant \bar{u}$ 中的极大解和极小解, 即若 w 是问题 (3.1) 的解且满足 $\underline{u} \leqslant w \leqslant \bar{u}$, 则 $\tilde{v} \leqslant w \leqslant \tilde{u}$.

证明 因为 w 是解, 所以 $w = Tw$. 由 $w \leqslant \bar{u}$ 得 $w = Tw \leqslant T\bar{u} = u_1$. 于是对任意 $n, w \leqslant u_n$, 令 $n \to \infty$ 得 $w \leqslant \tilde{u}$. 同理证 $\tilde{v} \leqslant w$.

2.3.2 二阶线性椭圆算子的特征值问题

研究线性特征值问题, 特别是它的主特征值 (第一特征值, 最小特征值) 及其相应的特征函数, 与本节的上、下解的构造有关, 也与今后研究反应扩散方程平衡解的存在性及其稳定性有关. 这里考虑二阶线性自伴椭圆算子的特征值问题:

$$\begin{cases} \widetilde{L}u \equiv -\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + q(x)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ \widetilde{B}u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域, $\partial\Omega$ 光滑. 边界条件 $\widetilde{B}u|_{\partial\Omega} = 0$ 是

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{3.3}$$

或者

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos\langle \boldsymbol{n}, x_i\rangle + b(x)u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{3.4}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向, 函数 $b(x) \geqslant 0$.

定义 2.3.4 使得问题 (3.2) 有非零解的 λ 称为特征值问题 (3.2) 的特征值, 相应的非零解称为对应于该特征值的特征函数.

假定:

(1) $a_{ij}(x) \in C^1(\bar{\Omega}),\ q(x) \in C(\bar{\Omega})$;

(2) $a_{ij} = a_{ji}$, 存在 $\alpha > 0$, 使得对任意 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 和 $x \in \Omega$, 有

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha|\xi|^2;$$

(3) $b(x) \in C(\partial\Omega)$.

1. 特征值的简单性质

定义

$$F(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} + q(x)uv\right)\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} b(x)uv\mathrm{d}S,$$

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x, \quad \|u\|_2 = \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

利用散度定理得

$$\int_\Omega u\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\sum_{i=1}^{n} v_i\cos\langle \boldsymbol{n}, x_i\rangle\mathrm{d}s - \int_\Omega\sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\mathrm{d}x.$$

由此易得:

(1) $F(u,v) = F(v,u)$.

(2) 若 $u \in C^2(\bar{\Omega}),\ v \in C^1(\bar{\Omega})$, 则

$$\langle \widetilde{L}u, v\rangle = F(u,v) - \int_{\partial\Omega} \widetilde{B}uv\mathrm{d}s. \tag{3.5}$$

如果又有 $v \in C^2(\bar{\Omega}), \widetilde{B}u = 0, \widetilde{B}v = 0$, 则

$$\langle \widetilde{L}u, v\rangle = \langle u, \widetilde{L}v\rangle = F(u,v). \tag{3.6}$$

(3) 若记 $F(u) = F(u,u)$, 则

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\right) = \sum_{k,s=1}^{n} c_k c_s F(\varphi_k, \varphi_s), \tag{3.7}$$

$$F(\varphi + \alpha\psi) = F(\varphi) + 2\alpha F(\varphi, \psi) + \alpha^2 F(\psi). \tag{3.8}$$

由此可证得

引理 2.3.5 (1) 问题 (3.2) 的特征值全是实数.

(2) 问题 (3.2) 的不同特征值 λ 与 λ^* 对应的特征函数 u 与 u^* 正交, 即 $\langle u, u^*\rangle = 0$.

证明留给读者.

2. **特征值的极值性质**

如果 λ 是问题 (3.2) 的特征值, u 是相应的特征函数, 将它归范化, 即 $\|u\|_2 = 1$. 由 (3.6) 式得

$$F(u,u) = \langle \widetilde{L}u, u\rangle = \lambda\langle u, u\rangle = \lambda,$$

即

$$\lambda = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + qu^2\right) \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} b(x)u^2 \mathrm{d}S.$$

引进泛函

$$F(\varphi) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} + q\varphi^2\right) \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} b(x)\varphi^2 \mathrm{d}S,$$

其定义域如下:

当边界条件为 (3.3) 时,

$$D(F) = \{\varphi(x) : \varphi \in C(\bar{\Omega}), \text{ 且分块连续可微}, \ \varphi|_{\partial\Omega} = 0\};$$

当边界条件为 (3.4) 时,

$$D(F) = \{\varphi(x) : \varphi \in C(\bar{\Omega}), \text{ 且分块连续可微}\}.$$

并把属于 $D(F)$ 的函数称为泛函 F 的可取函数. 若边界条件是 $u|_{\partial\Omega} = 0$, 则 $F(\varphi)$ 中的项 $\displaystyle\int_{\partial\Omega} b(x)\varphi^2 \mathrm{d}S$ 自然消失. 下面将证明特征值是泛函的极小值.

定理 2.3.6 (特征值的极小原理) 在条件 $\langle\varphi,\varphi\rangle = 1$ 之下, 使得 $F(\varphi)$ 为最小的可取函数 u_1 是问题 (3.2) 的特征函数, F 的最小值 $F(u_1) = \lambda_1$ 是相应的特征值. 在条件 $\langle\varphi,\varphi\rangle = 1$ 及正交条件 $\langle\varphi, u_i\rangle = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, k-1, k \geqslant 2)$ 之下, 使 $F(\varphi)$ 为最小的可取函数 u_k 是问题 (3.2) 的特征函数, 最小值 $F(u_k) = \lambda_k$ 是相应的特征值.

证明 可以证明上述极小问题的解存在且二阶连续可微, 参见 [CoH]. 下面以此为前提给出定理的证明.

对任意 $\eta \in D(F)$ 及任意常数 ε, 有

$$F\left(\frac{u_1+\varepsilon\eta}{\|u_1+\varepsilon\eta\|_2}\right) \geqslant \lambda_1,$$

$$F(u_1+\varepsilon\eta) \geqslant \lambda_1\langle u_1+\varepsilon\eta, u_1+\varepsilon\eta\rangle.$$

由 (3.8) 式知

$$2\varepsilon F(u_1,\eta)+\varepsilon^2F(\eta) \geqslant 2\lambda_1\varepsilon\langle u_1,\eta\rangle+\lambda_1\varepsilon^2\langle\eta,\eta\rangle,$$

$$2\varepsilon\{F(u_1,\eta)-\lambda_1\langle u_1,\eta\rangle+\frac{\varepsilon}{2}[F(\eta)-\lambda_1\langle\eta,\eta\rangle]\} \geqslant 0.$$

先取 $\varepsilon > 0$, 约去 ε, 再令 $\varepsilon \to 0$ 得

$$F(u_1,\eta)-\lambda_1\langle u_1,\eta\rangle \geqslant 0.$$

再取 $\varepsilon < 0$, 类似可得

$$F(u_1,\eta)-\lambda_1\langle u_1,\eta\rangle \leqslant 0.$$

因此, 对任意 $\eta \in D(F)$, 有

$$F(u_1,\eta)-\lambda_1\langle u_1,\eta\rangle = 0. \tag{3.9}$$

再由 (3.5) 式得

$$\begin{aligned}F(u_1,\eta) &= \int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}+qu_1\eta\right)\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}bu_1\eta\mathrm{d}S\\ &= \int_\Omega(\tilde{L}u_1)\eta\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\cos\langle\boldsymbol{n},x_i\rangle+bu_1\right)\eta\mathrm{d}S\\ &= \int_\Omega(\tilde{L}u_1)\eta\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}(\tilde{B}u_1)\eta\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

将它代入 (3.9) 式得

$$\int_\Omega(\widetilde{L}u_1-\lambda_1u_1)\eta\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}(Bu_1)\eta\mathrm{d}S = 0.$$

由 η 的任意性可得

$$\widetilde{L}u_1 = \lambda_1 u_1, \quad x \in \Omega; \quad \widetilde{B}u_1 = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

现考虑第二个极小问题. 对任意满足 $\langle \zeta, u_1 \rangle = 0$ 的可取函数 ζ, 如同 (3.9) 式, 有

$$F(u_2, \zeta) - \lambda_2 \langle u_2, \zeta \rangle = 0. \tag{3.10}$$

对任意可取函数 η, 总可取一个数 t, 使得 $\zeta = \eta + tu_1$ 并满足 $\langle \zeta, u_1 \rangle = 0$. 于是由 (3.10) 式得

$$F(u_2, \eta) - \lambda_2 \langle u_2, \eta \rangle + t\{F(u_2, u_1) - \lambda_2 \langle u_2, u_1 \rangle\} = 0.$$

因为 $\langle u_2, u_1 \rangle = 0$, 在 (3.9) 式中取 $\eta = u_2$ 便知 $F(u_1, u_2) = 0$. 因此, 由上式推出

$$F(u_2, \eta) - \lambda_2 \langle u_2, \eta \rangle = 0.$$

同上可知

$$\widetilde{L}u_2 = \lambda_2 u_2, \quad x \in \Omega; \quad \widetilde{B}u_2 = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

如此继续下去可证一般结论. 证毕.

定理 2.3.6 说明:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \min\{F(\varphi) : \varphi \in D(F), \|\varphi\|_2 = 1\} = F(u_1), \\ \lambda_n &= \min\{F(\varphi) : \varphi \in D(F), \langle \varphi, u_k \rangle = 0, (k = 1, \cdots, n-1, \|\varphi\|_2 = 1)\}. \end{aligned}$$

推论 2.3.7 按上述方法得到的特征值 λ_i 和特征函数 u_i 具有下面的性质:

$$\begin{aligned} &F(u_i) = \lambda_i, \quad F(u_i, u_j) = 0, \quad i \neq j, \\ &\langle u_i, u_i \rangle = 1, \quad \langle u_i, u_j \rangle = 0, \quad i \neq j, \\ &F(u_n, \zeta) - \lambda_n \langle u_n, \zeta \rangle = 0, \end{aligned}$$

其中 $\langle \zeta, u_i \rangle = 0$, $i = 1, \cdots, n-1$.

推论 2.3.8 按上述方法得到的特征值 λ_i 满足 $\lambda_{n-1} \leqslant \lambda_n$, 因此可按大小顺序排列为

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots.$$

现在任意给定 $n-1$ 个在 $\bar{\Omega}$ 上分块连续的函数 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$, 把此集合记为 V_{n-1}. 定义

$$d(v_1, \cdots, v_{n-1}) = \inf\{F(\varphi) : \varphi \in D(F),\ \|\varphi\|_2 = 1,\ \langle \varphi,\ v \rangle = 0,\ \forall v \in V_{n-1}\}.$$

定理 2.3.9 (特征值的极大–极小原理) 当函数 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$ 取遍所有的可取函数时, λ_n 为 d 所能取的最大值, 当 $\varphi = u_n, v_1 = u_1, \cdots, v_{n-1} = u_{n-1}$ 时, d 达到这个最大值, 即

$$\lambda_n = \sup_{V_{n-1}} d(v_1, \cdots, v_{n-1}) = d(u_1, \cdots, u_{n-1}).$$

证明 对于给定的 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$, 先证存在可取函数 φ 使得 $\langle\varphi,\varphi\rangle = 1$, $\langle\varphi, v_i\rangle = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$, 并有 $F(\varphi) \leqslant \lambda_n$.

事实上, 令 $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i u_i$, 则有

$$\langle\varphi,\varphi\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i^2, \quad \langle\varphi, v_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \langle u_j, v_i\rangle, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

总可以取 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 使得

$$\langle\varphi, v_i\rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1), \quad \langle\varphi,\varphi\rangle = 1.$$

又因为 $F(u_i, u_j) = 0$ $(i \neq j)$, $F(u_i, u_i) = F(u_i) = \lambda_i$, 所以由 (3.7) 式有

$$\begin{aligned} F(\varphi) - \lambda_n &= F\left(\sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right) - \lambda_n \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j F(u_i, u_j) - \lambda_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 (\lambda_i - \lambda_n) \leqslant 0, \end{aligned}$$

即 $F(\varphi) \leqslant \lambda_n$. 由此得, 对于任意给定 V_{n-1}, 都有

$$d(v_1, \cdots, v_{n-1}) \leqslant \lambda_n.$$

这说明 λ_n 是 $d(v_1, \cdots, v_{n-1})$ 的上界. 又

$$\lambda_n = d(u_1, \cdots, u_{n-1}) = F(u_n),$$

所以

$$\lambda_n = \sup_{V_{n-1}} d(v_1, \cdots, v_{n-1}) = d(u_1, \cdots, u_{n-1}).$$

证毕.

3. **特征值的变化**

利用特征值的极值性质容易讨论以下问题:

(1) 不同类型边界条件下特征值大小的比较;

(2) 特征值对方程的系数及边界条件的系数的依赖性;

(3) 特征值对区域的依赖性.

设有三个特征值问题:

$$\begin{cases} \widetilde{L}u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widetilde{L}u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \cos\langle \boldsymbol{n}, x_i\rangle + b_1(x) u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \widetilde{L}u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\cos\langle \boldsymbol{n}, x_i\rangle + b_2(x)u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

它们的第 n 个特征值分别记为 $\lambda_n, \mu_n^{(1)}, \mu_n^{(2)}$.

定理 2.3.10 设 $x \in \partial\Omega$ 时 $b_1(x) \leqslant b_2(x)$, 则

$$\mu_n^{(1)} \leqslant \mu_n^{(2)} \leqslant \lambda_n.$$

证明 显然有

$$\begin{aligned} &\inf\{F_2(\varphi) : \varphi \in D(F_2),\ \|\varphi\|_2 = 1,\ \langle\varphi, v\rangle = 0,\ \forall v \in V_{n-1}\} \\ \leqslant &\inf\{F_2(\varphi) : \varphi \in D(F_2),\ \|\varphi\|_2 = 1,\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0,\ \langle\varphi, v\rangle = 0,\ \forall v \in V_{n-1}\}, \end{aligned}$$

其中

$$F_2(\varphi) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\varphi_{x_i}\varphi_{x_j} + q\varphi^2\right)\mathrm{d}s + \int_{\partial\Omega} b_2(x)\varphi^2 \mathrm{d}S.$$

再取上确界后立即得 $\mu_n^{(2)} \leqslant \lambda_n$. 同理可证另一不等式. 证毕.

再考察两个特征值问题:

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + q(x)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.11}$$

和

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{n} (\widetilde{a}_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \widetilde{q}(x)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

它们的第 n 个特征值分别记为 λ_n 和 $\widetilde{\lambda}_n$.

定理 2.3.11 假设 $q(x) \leqslant \widetilde{q}(x)$, 并且对于所有的 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 和$x \in \Omega$, 都有 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \sum\limits_{i,j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(x)\xi_i\xi_j$, 则 $\lambda_n \leqslant \widetilde{\lambda}_n$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. 如果又有 $q(x) \not\equiv \widetilde{q}(x)$, 则 $\lambda_n < \widetilde{\lambda}_n$, $n = 1, 2, \cdots$.

定理前半部分的证明留作练习, 现证定理的后半部分.

与问题 (3.11) 相应的泛函记为 $F(\varphi)$, 与特征值 λ_n 相应的特征函数记为 $\varphi_n(x)$. 令 $\widetilde{q}(x) = q(x) + h(x)$, 则 $h(x) \geqslant 0$, $h(x) \not\equiv 0$. 考察特征值问题

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \widetilde{q}(x)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ \widetilde{B}u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

记它的特征值为 $\hat{\lambda}_n$, 相应的泛函为 $\hat{F}(\varphi)$. 取

$$V_{n-1} = \{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}\},$$

注意到特征函数在任意球上不能恒为零, 先利用特征值的极大–极小原理, 再利用特征值的极小原理, 有

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_n &\geqslant \hat{\lambda}_n \geqslant \inf\{\hat{F}(\varphi) : \varphi \in D(\hat{F}),\ \|\varphi\|_2 = 1,\ \langle \varphi, v\rangle = 0,\ \forall v \in V_{n-1}\} \\ &= \hat{F}(\psi) = F(\psi) + \int_\Omega h(x)\psi^2(x)\mathrm{d}x > F(\psi) \geqslant \lambda_n.\end{aligned}$$

证毕.

注 3.3 问题 (3.2) 的特征值还连续地依赖于 $a_{ij}(x), q(x)$ 和 $b(x)$ (参见 [CoH1, 321–322]).

现在考察特征值对区域 Ω 的依赖性. 记

$$\begin{cases} \widetilde{L}u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ \widetilde{B}u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \widetilde{L}u = \lambda u, & x \in \Omega^*, \\ \widetilde{B}u = 0, & x \in \partial\Omega^* \end{cases}$$

的第 n 个特征值分别为 $\lambda_n(\Omega)$ 和 $\lambda_n(\Omega^*)$.

定理 2.3.12 如果边界条件是 (3.3), 那么 $\lambda_n(\Omega)$ 关于 Ω 是单减的, 即 $\Omega^* \subset \Omega$ 隐含 $\lambda_n(\Omega^*) \geqslant \lambda_n(\Omega)$, $\Omega^* \subsetneqq \Omega$ 隐含 $\lambda_n(\Omega^*) > \lambda_n(\Omega)$.

如果边界条件是 (3.4), 那么 $\lambda_k(\Omega)$ 关于 Ω 的单调性不一定成立. 关于 Neumann 边界条件的结果和反例可以参见文献 [NW], 关于 Robin 边界条件的结果和反例可以参见文献 [GS].

证明 记

$$F_\Omega(\varphi) = \int_\Omega [a_{ij}(x)\varphi_{x_i}\varphi_{x_j} + q\varphi^2]\mathrm{d}x.$$

设 $\{\varphi^*\}$ 是 $\bar{\Omega}^*$ 上的全体可取函数, 则 $\{\varphi\}$ 是 $\bar{\Omega}$ 上的部分可取函数, 其中

$$\varphi = \begin{cases} \varphi^*, & x \in \bar{\Omega}^*, \\ 0, & x \in \bar{\Omega}\backslash\bar{\Omega}^*, \end{cases}$$

而且 $F_\Omega(\varphi) = F_\Omega(\varphi^*)$. 若 $\|\varphi^*\|_2 = 1$, 则 $\|\varphi\|_2 = 1$. 任取 Ω 上的 $v_1, \cdots, v_{n-1}$ 组成集合 V_{n-1}, 自然也可看成 Ω^* 上的集合. 反之, 若它是 Ω^* 上的集合, 把这些函数零延拓到 $\Omega\backslash\bar{\Omega}^*$, 那么这些新的函数组成的集合也可看成 Ω 上的集合. 又记

$$\langle \psi_1, \psi_2\rangle_\Omega = \int_\Omega \psi_1\psi_2\mathrm{d}x,$$

则当 $v \in V_{n-1}$ 时,

$$\langle \varphi, v \rangle_\Omega = \langle \varphi^*, v \rangle_{\Omega^*}, \quad \forall\, \varphi \in \{\varphi\}.$$

因此

$$\begin{aligned}
&\inf\{F_\Omega(u) : u \in D(F_\Omega),\ \|u\|_2 = 1,\ \langle u, v\rangle_\Omega = 0,\ \forall v \in V_{n-1}\} \\
\leqslant\ &\inf\{F_\Omega(\varphi) : \varphi \in \{\varphi\},\ \|\varphi\|_2 = 1,\ \langle \varphi, v\rangle_\Omega = 0,\ \forall v \in V_{n-1}\} \\
=\ &\inf\{F_{\Omega^*}(\varphi^*) : \varphi^* \in \{\varphi^*\},\ \|\varphi^*\|_2 = 1,\ \langle \varphi^*, v\rangle_{\Omega^*} = 0,\ \forall v \in V_{n-1}\}.
\end{aligned}$$

两边对 V_{n-1} 取上确界得

$$\lambda_n(\Omega) \leqslant \lambda_n(\Omega^*).$$

证毕.

下面进一步说明 λ_n 对 Ω 的连续性.

设变换 $y = x + \varepsilon f(x)$ 将区域 Ω 及其边界逐点对应地变换为区域 Ω^* 及其边界, 其中 f 是 C^1 的. 若 f 的每个分量和它的各个偏导数的绝对值均小于 1, 则说区域 Ω^* 以准确度 ε 逼近于 Ω. 当 $\varepsilon \to 0$ 时, 就说 Ω^* 连续地变形为 Ω. 现可叙述下面的定理.

定理 2.3.13 假设边界条件是 (3.3) 或者 (3.4) 并且 $b(x) \geqslant 0, \not\equiv 0$. 那么, 当区域 Ω 在上述意义下连续变形时, 问题 (3.2) 的第 n 个特征值也连续地改变.

证明可参见 [CoH1, 323–325].

最后指出, 特征值是无限增大的.

定理 2.3.14 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

证明 若

$$\lambda_n = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} + q(x) u_n^2 \right) \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} b u_n^2 \mathrm{d}S$$

有上界, 则

$$\begin{aligned}
M \geqslant \lambda_n + c &\geqslant \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} + (q(x) + c) u_n^2 \right) \mathrm{d}x \\
&\geqslant a \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right)^2 \mathrm{d}x + \beta \int_\Omega u_n^2 \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

其中常数 c 满足

$$\beta = \min_{\overline{\Omega}} (q(x) + c) > 0.$$

由此得

$$\int_{\Omega} u_n^2 \mathrm{d}x, \quad \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right)^2 \mathrm{d}x$$

一致有界. 于是存在 $\{u_n\}$ 的子序列, 不妨还记为 $\{u_n\}$, 使得

$$\lim_{n,m\to\infty} \|u_n - u_m\|_2 = 0.$$

然而

$$\|u_n - u_m\|_2 = \langle u_n - u_m, u_n - u_m \rangle = 2, \quad n \neq m.$$

矛盾. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

4. **特征函数的完备性**

由泛函的极值问题确定了问题 (3.2) 的一串特征值:

$$\{\lambda_n\} : \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots \tag{3.12}$$

和相应的特征函数

$$\{u_n\}: \ \lambda_n = F(u_n), \quad \|u_n\|_2 = 1.$$

下面将证明 (3.12) 是问题 (3.2) 的全部特征值.

定理 2.3.15　对任意 $f \in L_2(\Omega)$, 令 $c_i = \langle f, u_i \rangle$, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \right\|_2 = 0, \quad \langle f, f \rangle = \|f\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2.$$

在证明该定理之前, 先给一个推论.

推论 2.3.16　由 (3.12) 给出的 $\{\lambda_n\}$ 是问题 (3.2) 的全部特征值.

证明　由引理 2.3.5 知, 问题 (3.2) 的不同特征值 λ 与 $\hat{\lambda}$ 所对应的特征函数 u 与 $\bar{u}$ 是正交的, 即 $\langle u, \bar{u} \rangle$=0. 若问题 (3.2) 还有特征值 $\lambda^*, \lambda^* \neq \lambda_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 相应的特征函数为 u^*, 则 $\langle u^*, u_i \rangle = c_i = 0$. 于是

$$\|u^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = 0,$$

即 $u^* \equiv 0$, 这便矛盾了. 证毕.

为了证明定理 2.3.15, 先证两个引理.

引理 2.3.17　设 $f \in L_2(\Omega)$ 并记 $c_i = \langle f, u_i \rangle$, 则

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2, \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leqslant \|f\|_2^2.$$

证明留给读者.

引理 2.3.18　如果 f 是可取函数, 那么定理 2.3.15 的结论成立.

证明　令 $\rho_n = f - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i u_i$, 则 ρ_n 是可取函数, 并且

$$\langle \rho_n, u_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

由 λ_{n+1} 的极小性质得

$$\lambda_{n+1} \langle \rho_n, \rho_n \rangle \leqslant F(\rho_n),$$

即

$$\langle \rho_n, \rho_n \rangle = \|\rho_n\|_2^2 \leqslant \frac{F(\rho_n)}{\lambda_{n+1}}.$$

因为

$$F(u_i, \rho_n) - \lambda_i \langle u_i, \rho_n \rangle = 0, \quad \langle u_i, \rho_n \rangle = 0, \quad i = 1, \cdots, n,$$

所以

$$F(u_i, \rho_n) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

于是

$$\begin{aligned} F(f) &= F(\rho_n + \sum_{i=1}^n c_i u_i) \\ &= F(\rho_n) + 2F\left(\rho_n, \sum_{i=1}^n c_i u_i\right) + F\left(\sum_{i=1}^n c_i u_i\right) \\ &= F(\rho_n) + F\left(\sum_{i=1}^n c_i u_i\right). \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} F\left(\sum_{i=1}^n c_i u_i\right) &= F(c_1 u_1) + 2F\left(c_1 u_1, \sum_{i=2}^n c_i u_i\right) + F\left(\sum_{i=2}^n c_i u_i\right) \\ &= c_1^2 F(u_1) + F\left(\sum_{i=2}^n c_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i, \end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned} F(\rho_n) &= F(f) - \sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i = F(f) - \sum_{i=1}^{n_0} c_i^2 \lambda_i - \sum_{i=n_0+1}^n c_i^2 \lambda_i \\ &\leqslant F(f) - \sum_{i=1}^{n_0} c_i^2 \lambda_i \leqslant M, \end{aligned}$$

其中 n_0 为某个固定的自然数, 使得当 $i > n_0$ 时 $\lambda_i > 0$, M 为正常数. 因此, 当 $n \geqslant n_0$ 时,

$$\langle \rho_n, \rho_n \rangle = \|\rho_n\|_2^2 \leqslant \frac{M}{\lambda_{n+1}}.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} \|\rho_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{i=1}^n c_i u_i \right\|_2 = 0.$$

注意到

$$\left\langle f-\sum_{i=1}^{n}c_iu_i,\ f-\sum_{i=1}^{n}c_iu_i\right\rangle=\|f\|_2^2-2\sum_{i=1}^{n}c_i^2+\sum_{i=1}^{n}c_i^2$$
$$=\|f\|_2^2-\sum_{i=1}^{n}c_i^2,$$

有 $\|f\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2$. 证毕.

现在证明定理 2.3.15. 对任意给定的 $f\in L_2(\Omega)$ 和任意给定的正常数 ε, 存在可取函数 g, 使得

$$\|f-g\|_2<\varepsilon/3.$$

令 $\langle g,u_i\rangle=c_i^*$, 则有

$$\left\|f-\sum_{i=1}^{n}c_iu_i\right\|_2\leqslant\|f-g\|_2+\left\|g-\sum_{i=1}^{n}c_i^*u_i\right\|_2+\left\|\sum_{i=1}^{n}(c_i-c_i^*)u_i\right\|_2.$$

由于 $\|u_i\|_2=1$, 并且当 $i\neq j$ 时 $\langle u_i,u_j\rangle=0$, 所以

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(c_i-c_i^*)u_i\right\|_2^2=\sum_{i=1}^{n}(c_i-c_i^*)^2\leqslant\|f-g\|_2^2<(\varepsilon/3)^2.$$

故有

$$\left\|f-\sum_{i=1}^{n}c_iu_i\right\|_2\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon+\left\|g-\sum_{i=1}^{n}c_i^*u_i\right\|_2.$$

因为 g 是可取函数, 由引理 2.3.18 知, 存在 N, 使得当 $n>N$ 时,

$$\left\|g-\sum_{i=1}^{n}c_i^*u_i\right\|_2<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因此, 当 $n>N$ 时,

$$\left\|f-\sum_{i=1}^{n}c_iu_i\right\|_2\leqslant\varepsilon.$$

证毕.

5. 最小 (实部最小) 特征值及相应的特征函数

我们最关心的是最小 (实部最小) 特征值及其相应的特征函数, 它们的正性对于构造上、下解和将来讨论平衡解的稳定性都是十分重要的.

为了证明最小(实部最小)特征值对应的特征函数的正性, 先引述Krein-Rutman定理, 它给出算子具有正特征值和相应特征向量具有正性的条件.

设 E 是 Banach 空间, E 的子集 P 叫做锥, 如果它满足:

(1) 若 $x,y\in P$, 则 $x+y\in P$;

(2) 若 $x \in P$, 实数 $\lambda \geqslant 0$, 则 $\lambda x \in P$;

(3) 若 $x \in P, x \neq 0$, 则 $-x \notin P$.

若 P 是 E 中的一个闭锥, 满足 $\mathrm{int}P$ (P的内域) $\neq \varnothing$, 则称 P 是 E 中的实心锥体.

设 A 是一个线性算子, 如果 $A(P\backslash\{\theta\}) \subset \mathrm{int}P$, 则称 A 关于 P 是强正的.

定理 2.3.19 (Krein-Rutman) ([Du3, 定理 1.2]) 设 P 是 E 中的一个实心锥体, A 是 E 上的紧线性算子, 并且关于 P 是强正的. 有

(1) $\mu = \sup\{|\lambda| : \lambda是\ A\ 的特征值\} > 0$ 是 A 的一个简单特征值 (即只对应一个线性无关的特征向量), 并且 A 在 $\mathrm{int}P$ 中恰有一个单位特征向量 v 与 μ 对应, 即唯一存在 $v \in \mathrm{int}P$ 使得

$$Av = \mu v, \quad \|v\| = 1;$$

(2) 如果 η 是 A 的特征值, $\eta \neq \mu$, 那么 $|\eta| < \mu$, 并且与 η 对应的特征向量不属于 $\mathrm{int}P$.

在应用中 E 常常是一个函数空间, A 是一个线性微分算子的逆算子, 即积分算子, P 是 E 中的非负函数构成的集合.

例 1 定义

$$Nu = Lu + c(x)u,$$

其中 L 由 (1.1) 式给出, L 的系数及 $c(x)$ 满足条件 (2.3), 且 $c(x) \geqslant 0$. 取 $E = C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$, 在 E 上按如下方式定义 $u = Av$: $v \in E$, u 是线性问题

$$\begin{cases} Nu = v(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.13}$$

的唯一解. 由引理 2.2.3 知, $A : E \to E$ 是线性紧算子.

定义

$$P = \mathrm{closure}\left\{u : u \in E,\ u(x) > 0,\ u|_{\partial\Omega} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_{\partial\Omega} < 0\right\},$$

那么 P 是 E 中的闭锥, 且 $\mathrm{int}P \neq \varnothing$. 由强最大值原理知, 当 $u \in P\backslash\{\theta\}$ 时, $Au \in \mathrm{int}P$, 即 A 关于 P 是强正的. 由 Krein-Rutman 定理知, 存在 $\mu > 0$ 和唯一的 $v \in \mathrm{int}P$, 使得

$$Av = \mu v, \quad \|v\| = 1,$$

即

$$Nv = \frac{1}{\mu}v.$$

这就证明了特征值问题

$$\begin{cases} Lu + c(x)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.14}$$

有特征值 $\lambda = 1/\mu > 0$, 相应的特征函数 $v(x) > 0,\ x \in \Omega$.

还可以证明问题 (3.14) 没有实部小于 $1/\mu$ 的特征值. 因为其证明篇幅较长, 故略去. 有兴趣的读者可以参看 [Du3, 定理 1.4, 注 1.5 和定理 2.7].

当边条件是 (3.4) 时, 有同样的结论. 至此证明了

定理 2.3.20　设有特征值问题

$$\begin{cases} Lu + c(x)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ \tilde{B}u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.15}$$

其中 L 由 (1.1) 给出, L 的系数, $c(x)$ 及 $b(x)$ 满足条件 (2.3), 边界条件 $\tilde{B}u = 0$ 是 (3.3) 或者 (3.4). 那么特征值问题 (3.15) 有简单的实特征值，还是实部严格最小的特征值，与它对应的特征函数在 Ω 内是正的或者负的，并且只有这一个特征值对应于实的、不变号的特征函数. 通常把对应的特征函数不变号的特征值称为主特征值或第一特征值. 这说明问题 (3.15) 的主特征值是唯一的并且还是实的和简单的. 利用紧算子的特征值理论又知，特征值问题 (3.15) 至多有可数个特征值：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m, \cdots$.

如果特征值都是实的，可以把它们按照从小到大的顺序排列成

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m < \cdots,$$

或者

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m \leqslant \cdots.$$

前者记重数，而后者不记重数. 此时，λ_1 是主特征值 (第一特征值)，也是最小特征值.

证明　实际上前面已经证明了, 不过这里不假设 $c(x) \geqslant 0$, 但总可取正数 c_0 使得 $c(x) + c_0 > 0\ (x \in \Omega)$. 通过讨论辅助问题

$$\begin{cases} Lu + (c(x) + c_0)u = (\lambda + c_0)u, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ 或 } \left[\dfrac{\partial u}{\partial n} + b(x)u\right]_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

即可证明.

推论 2.3.21　设 λ_1 是

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0 \text{ 或 } \dfrac{\partial u}{\partial n} + b(x)u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的最小特征值, 其中 $b \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega),\ b(x) \geqslant 0,\ q \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$. 则有

(1) λ_1 是简单的;

(2) 存在与 λ_1 对应的正特征函数 $\varphi_1(x)$，即 $\varphi_1(x) > 0,\ x \in \Omega$.

注 3.4　当边界条件是 $\left[\dfrac{\partial u}{\partial n} + b(x)u\right]_{\partial\Omega} = 0$ 时,

$$\varphi_1(x) > 0, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

关于最小特征值的正性, 有以下结论.

定理 2.3.22 设 $q(x) \geqslant 0$, λ_1 是

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ a\dfrac{\partial u}{\partial n} + b(x)u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的最小特征值, 其中 $a = 0, b = 1$ 或 $a = 1, b(x) \geqslant 0$. 如果 $q(x) \not\equiv 0$ 或 $b(x) \not\equiv 0$, 则 $\lambda_1 > 0$. 如果 $q(x) \equiv 0$, $b(x) \equiv 0$, 则 $\lambda_1 = 0$.

证明留给读者.

2.3.3 应用 —— 一个平衡解的分叉问题

现在利用上、下解方法讨论边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + g(u, \lambda), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

的正 (负) 解的存在唯一性与分叉问题, 其中 $\lambda \geqslant 0$ 为参数.

假设对于任意给定的 $\lambda \geqslant 0$,

(H.1) $g \in C^1, g(u, \lambda) = o(u)(u \to 0)$;

(H^+.2) 存在正数 M^+, 当 $u > M^+$ 时, $\lambda u + g(u, \lambda) < 0$;

(H^+.3) 当 $0 < u \leqslant M^+$ 时, $\dfrac{g(u, \lambda)}{u}$ 对 u 严格单调下降;

(H^-.2) 存在负数 M^-, 当 $u < M^-$ 时, $\lambda u + g(u, \lambda) > 0$;

(H^-.3) 当 $M^- \leqslant u < 0$ 时, $\dfrac{g(u, \lambda)}{u}$ 对 u 严格单调上升.

设 λ_1 是

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

的最小特征值, 则 $\lambda_1 > 0$, 相应的正特征函数 $\varphi_1(x) > 0$, $x \in \Omega$.

引理 2.3.23 设 (H^+.2) ((H^-.2)) 成立. 若 $u(x)$ 是问题 (3.16) 的非负解 (非正解), 则 $0 \leqslant u(x) \leqslant M^+$ ($M^- \leqslant u(x) \leqslant 0$).

证明留给读者.

定理 2.3.24 设 (H.1) 和 (H^+.2) ((H.1) 和 (H^-.2)) 成立. 若 $\lambda > \lambda_1$, 则问题 (3.16) 存在最大正解 $u^+(x)$ (最小负解 $u^-(x)$), 且满足

$$0 < u^+(x) \leqslant M^+ \quad (M^- \leqslant u^-(x) < 0), \quad x \in \Omega.$$

证明 设 (H.1) 和 (H^+.2) 成立, $\lambda > \lambda_1$. 令

$$\underline{u} = \delta\varphi_1(x), \quad \bar{u} = M^+,$$

并取 $\delta > 0$ 充分小, 使得 $\underline{u} \leqslant \bar{u}$. 显然 $\bar{u}$ 是上解. 又取 $\delta > 0$ 充分小, 使得

$$\begin{cases} -\Delta\underline{u} - \lambda\underline{u} - g(\underline{u}, \lambda) = \delta\varphi_1(x)\left((\lambda_1 - \lambda) - \dfrac{g(\delta\varphi_1, \lambda)}{\delta\varphi_1(x)}\right) < 0, \quad x \in \Omega, \\ \underline{u}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

这说明 $\underline{u}$ 是下解. 因此问题 (3.16) 存在解 $u^+(x)$:

$$u^+(x) = \lim_{n\to\infty} T^n\bar{u}, \quad \delta\varphi_1(x) \leqslant u^+(x) \leqslant M^+,$$

其中 T 是单调方法中的迭代算子.

若 $u(x)$ 是问题 (3.16) 的任意非负解, 则

$$0 \leqslant u(x) \leqslant \bar{u}(x) = M^+.$$

于是

$$u(x) = T^n u(x) \leqslant T^n \bar{u}(x).$$

令 $n \to \infty$ 得

$$u(x) \leqslant u^+(x),$$

即 $u^+(x)$ 是问题 (3.16) 的最大正解. 另一结论类似可证. 证毕.

定理 2.3.25 设 (H.1), (H$^+$.2) 和 (H$^+$.3) ((H.1), (H$^-$.2) 和 (H$^-$.3)) 成立. 若 $\lambda > \lambda_1$, 则问题 (3.16) 存在唯一正解 $u^+(x)$ (唯一负解 $u^-(x)$), 且满足

$$0 < u^+(x) \leqslant M^+ \quad (M^- \leqslant u^-(x) < 0), \quad x \in \Omega.$$

证明 设 (H.1), (H.2$^+$) 和 (H$^+$3) 成立, $\lambda > \lambda_1$. 若 $u(x)$ 是 (3.16) 的任意正解: $u(x) \geqslant 0, u(x) \not\equiv 0$, 那么由引理 2.3.24 易知 $u(x) \leqslant u^+(x)$. 再根据引理 2.1.5 得 $u(x) > 0$.

再证 $u(x) \equiv u^+(x)$. 由散度定理得

$$0 = \int_\Omega (u\Delta u^+ - u^+\Delta u)\mathrm{d}x = \int_\Omega uu^+\left(\frac{g(u,\lambda)}{u} - \frac{g(u^+,\lambda)}{u^+}\right)\mathrm{d}x.$$

因为被积函数连续且不变号, 所以

$$u(x)u^+(x)\left(\frac{g(u(x),\lambda)}{u(x)} - \frac{g(u^+(x),\lambda)}{u^+(x)}\right) \equiv 0.$$

因此

$$u(x) \equiv u^+(x).$$

证毕.

定理 2.3.26 给定 $\lambda \leqslant \lambda_1$. 假设函数

$$G(u)=\begin{cases} g(u,\lambda)/u, & u\neq 0,\\ g_u(0,\lambda), & u=0\end{cases}$$

在 $(-\infty,\infty)$ 上连续、非正, 且在任意子区间上 $g(u,\lambda)$ 不恒为零, 则问题 (3.16) 无非零解.

证明 假设问题 (3.16) 有非零解 u, 则

$$\begin{cases} -\Delta v+q(x)v=\mu v, & x\in\Omega,\\ v|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

有特征值 $\mu=\lambda\leqslant\lambda_1$, u 是对应的特征函数. 所以它的最小特征值 $\mu_1\leqslant\lambda_1$, 其中

$$q(x)=\begin{cases} -g(u(x),\lambda)/u(x), & u(x)\neq 0,\\ -g_u(0,\lambda), & u(x)=0.\end{cases}$$

因为 $q(x)\geqslant 0$, $q(x)\not\equiv 0$, 利用特征值的单调性得 $\mu_1>\lambda_1$. 这是一个矛盾. 因此问题 (3.16) 无非零解. 证毕.

类似可证

定理 2.3.27 给定 $\lambda\leqslant\lambda_1$. 假设函数

$$G(u)=\begin{cases} g(u,\lambda)/u, & u>0,\\ g_u(0,\lambda), & u=0\end{cases}$$

在 $[0,\infty)$ 连续、非正, 在 $[0,\infty)$ 的任意子区间上 $g(u,\lambda)$ 不恒为零. 若 $u(x)\geqslant 0$ 是问题 (3.16) 的解, 则 $u(x)\equiv 0$.

例 2 考察含参数 $\lambda\geqslant 0$ 的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u=\lambda u-au^k, & x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}\tag{3.17}$$

其中 $a>0$ 为常数, $k\geqslant 2$ 为自然数.

利用定理 2.3.25—2.3.27, 容易得到

定理 2.3.28 (1) 设 $k\geqslant 3$ 为奇数, 则当 $\lambda>\lambda_1$ 时, 问题 (3.17) 存在唯一正解 $u_\lambda^+(x)$ 和唯一负解 $u_\lambda^-(x)$, 当 $\lambda\leqslant\lambda_1$ 时, 问题 (3.17) 只有零解;

(2) 设 $k\geqslant 2$ 为偶数, 则当 $\lambda>\lambda_1$ 时问题 (3.17) 存在唯一正解, 无负解, 当 $\lambda\leqslant\lambda_1$ 时无正解.

进一步考察问题 (3.17) 的唯一正解 $u_\lambda^+(x)$ 关于参数 λ 的依赖性, 有

定理 2.3.29 (1) 如果 $\lambda>\mu>\lambda_1$, 则 $u_\lambda^+(x)>u_\mu^+(x)$;

(2) 设 $\mu>\lambda_1$, 则 $\lim\limits_{\lambda\to\mu}u_\lambda^+(x)=u_\mu^+(x)$;

(3) $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_1+0}u_\lambda^+(x)=0$;

(4) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} u_\lambda^+(x)=\infty,\quad x\in\Omega.$

这就证明了：当 λ 单调增加通过 λ_1 时, 问题 (3.17) 从零解分支出两个非零解 —— 正解和负解, 或一个非零解 —— 正解. λ_1 是分支解 (图 2.3.1).

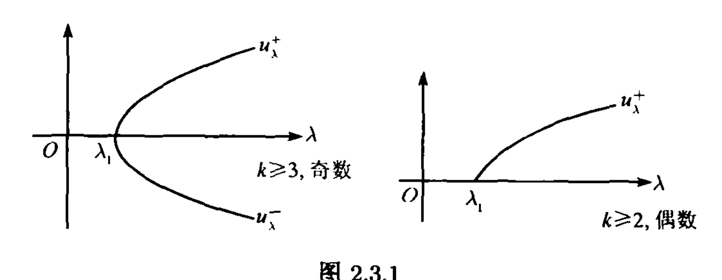


图 2.3.1

2.4 抛物型方程初边值问题的比较方法

2.4.1 抛物型方程初边值问题的比较原理

现在起考虑以下的初边值问题

$$\begin{cases}\mathscr{L}u\equiv u_t+L_tu=f(x,t,u), & (x,t)\in Q_T,\\ B_tu=g(x,t), & (x,t)\in S_T,\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\Omega.\end{cases}\tag{4.1}$$

总是假定: $a_{ij},b_i\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar Q_T)$, $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$, $\varphi(x)\in C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$, 函数 $b(x,t),g(x,t)$ 可延拓为 $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar Q_T)$ 中的函数, 使得

$$\varphi(x)|_{x\in\partial\Omega}=g(x,0)|_{x\in\partial\Omega}\quad 当\ B_tu=u\ 时,$$

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}}+b(x,0)\varphi\right]_{x\in\partial\Omega}=g(x,0)|_{x\in\partial\Omega}\quad 当\ B_tu=\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}+bu\ 时.$$

此外, 还假设对 $M>m$, 存在常数 K, 使得当 (x,t), $(y,s)\in\bar Q_T$, $u\in[m,M]$ 时,

$$|f(x,t,u)-f(y,s,u)|\leqslant K(|x-y|^\alpha+|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}).\tag{4.2}$$

又假设

$$f_u(x,t,u)\in C(\bar Q_T\times[m,M]).\tag{4.3}$$

先建立比较原理.

引理 2.4.1　设 $u,v\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\bar Q_T)$, 满足

$$\begin{cases} \mathscr{L}u - f(x,t,u) \geqslant \mathscr{L}v - f(x,t,v), & (x,t) \in Q_T, \\ B_t u \geqslant B_t v, & (x,t) \in S_T, \\ u(x,0) \geqslant v(x,0), & x \in \Omega. \end{cases}$$

又设 $(x,t) \in \bar{Q}_T$ 时 $u, v \in [m, M]$, 那么

$$u(x,t) \geqslant v(x,t), \quad (x,t) \in Q_T.$$

如果又有

$$u(x,0) \not\equiv v(x,0), \quad x \in \Omega,$$

则

$$u(x,t) > v(x,t), \quad (x,t) \in Q_T.$$

证明 令 $w = u - v$, 则有

$$\mathscr{L}w \geqslant f(x,t,u) - f(x,t,v), \quad (x,t) \in Q_T.$$

于是

$$\begin{cases} \mathscr{L}w + h(x,t)w(x,t) \geqslant 0, & (x,t) \in Q_T, \\ B_t w \geqslant 0, & (x,t) \in S_T, \\ w(x,0) \geqslant 0, & x \in \Omega, \end{cases}$$

其中

$$h(x,t) = -\left(\int_0^1 \frac{\partial f(x,t,\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi = v + s(u-v)} \mathrm{d}s \right).$$

由引理 2.1.8 得结论.

推论 2.4.2 假设对任意的常数 $m < M$, (4.3) 式成立, 那么问题 (4.1) 至多有一个解.

2.4.2 上、下解方法——初边值问题解的存在唯一性

类似于椭圆型方程的边值问题, 这里也可引进抛物型方程初边值问题 (4.1) 的上、下解.

定义 2.4.3 函数 $\bar{u}, \underline{u} \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ 分别叫做问题 (4.1) 的上、下解, 如果

$$\begin{cases} \mathscr{L}\bar{u} \geqslant f(x,t,\bar{u}), & (x,t) \in Q_T, \\ B_t \bar{u} \geqslant g(x,t), & (x,t) \in S_T, \\ \bar{u}(x,0) \geqslant \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathscr{L}\underline{u} \leqslant f(x,t,\underline{u}), & (x,t) \in Q_T, \\ B_t \underline{u} \leqslant g(x,t), & (x,t) \in S_T, \\ \underline{u}(x,0) \leqslant \varphi(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

利用比较原理即得

推论 2.4.4 (上、下解的有序性) 设 $f_u \in C(\bar{Q}_T \times \mathbb{R})$. 若 $\bar{u}$, $\underline{u}$ 分别是问题 (4.1) 的上、下解, 则

$$\underline{u}(x,t) \leqslant \bar{u}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T.$$

如果又有 $\bar{u}(x,0) \not\equiv \underline{u}(x,0)$, 则

$$\underline{u}(x,t) < \bar{u}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T.$$

推论 2.4.5 设 $f_u \in C(\bar{Q}_T \times \mathbb{R})$, $\bar{u}$, $\underline{u}$ 分别是问题 (4.1) 的上、下解. 如果 $u(x,t)$ 是问题 (4.1) 的解, 则

$$\underline{u}(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant \bar{u}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T.$$

利用上、下解, 可以构造单调迭代序列使之收敛到问题 (4.1) 的解.

定理 2.4.6 设 $\bar{u}$, $\underline{u}$ 分别是问题 (4.1) 的上、下解, $m = \min\limits_{\bar{Q}_T} \underline{u} < M = \max\limits_{\bar{Q}_T} \bar{u}$. 又设在 $\bar{Q}_T \times [m, M]$ 上 f 满足条件 (4.2) 与 (4.3), 那么问题 (4.1) 存在满足

$$\underline{u}(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant \bar{u}(x,t), \quad (x,t) \in \bar{Q}_T$$

的唯一解 $u(x,t)$.

证明 只证边界条件是

$$B_t u = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + b(x,t)u$$

的情况. 首先, 存在常数 $K > 0$, 使得

$$|f(x,t,u_2) - f(x,t,u_1)| \leqslant K|u_1 - u_2|, \quad \forall\ (x,t,u_i) \in \bar{Q}_T \times [m,M], \quad i = 1,2.$$

对于任意给定的值域属于 $[m,M]$ 的函数 $u \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ (或$C(\bar{Q}_T)$), 线性问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}v + Kv = Ku + f(x,t,u), & (x,t) \in Q_T, \\ B_t v = g(x,t), & (x,t) \in S_T, \\ v(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

有唯一解 v, 由此定义一个非线性算子 $v = Tu$.

现在构造迭代序列

$$u_1 = T\bar{u},\ u_2 = Tu_1, \cdots,\ u_n = Tu_{n-1}, \cdots,$$

$$v_1 = T\underline{u},\ v_2 = Tv_1, \cdots,\ v_n = Tv_{n-1}, \cdots.$$

类似于定理 2.3.2 的证明, 利用引理 2.4.4 可证: 对任意自然数 n,

$$\underline{u} \leqslant v_1 \leqslant v_2 \leqslant \cdots \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant \cdots \leqslant u_2 \leqslant u_1 \leqslant \bar{u}.$$

因而存在点点收敛的极限

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x,t)=\tilde{u}(x,t), \quad \lim_{n\to\infty} v_n(x,t)=\tilde{v}(x,t).$$

显然有

$$\underline{u}(x,t)\leqslant\tilde{v}(x,t)\leqslant\tilde{u}(x,t)\leqslant\bar{u}(x,t), \quad (x,t)\in Q_T.$$

下面证明 $\tilde{u},\tilde{v}$ 都是问题 (4.1) 的解.

取基本空间 $E=C(\bar{Q}_T)$. 先证 $T:D\to C(\bar{Q}_T)$ 是紧算子, 其中

$$D=\{u:\ u\in E,\ \underline{u}(x,t)\leqslant u(x,t)\leqslant\bar{u}(x,t),\ \forall\ (x,t)\in\bar{Q}_T\}.$$

事实上, 对于 $u_i\in E,\ i=1,2$, 令 $v_i=Tu_i,\ w=v_2-v_1$, 则有

$$\begin{cases}\mathscr{L}w+Kw=K(u_2-u_1)+f(x,t,u_2)-f(x,t,u_1), & (x,t)\in Q_T,\\ B_tw=0, & (x,t)\in S_T,\\ w(x,0)=0, & x\in\Omega.\end{cases}$$

由 L_p 估计得, 对任意 $p\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\|w\|^{(2)}_{p,Q_T}\leqslant & C_1(\|u_2-u_1\|_p+\|f(x,t,u_2)-f(x,t,u_1)\|_{p,\bar{Q}_T})\\ \leqslant & C_2|u_2-u_1|^{(0)}_{\bar{Q}_T}.\end{aligned}$$

再由嵌入定理得

$$|w|^{(0)}_{\bar{Q}_T}\leqslant|w|^{(\alpha)}_{\bar{Q}_T}\leqslant|u_2-u_1|^{(0)}_{\bar{Q}_T},$$

即 T 连续.

同样可证: 对于任意给定的正常数 M_1, 存在与 u 无关的正常数 M_2, 使得当 $|u|^{(0)}_{\bar{Q}_T}\leqslant M_1$ 时, $|Tu|^{(\alpha)}_{\bar{Q}_T}\leqslant M_2$, 即 T 映 $C(\bar{Q}_T)$ 中的有界集为 $C(\bar{Q}_T)$ 中的列紧集. 因此, $T:D\to C(\bar{Q}_T)$ 是紧算子.

因为 $|u_n(x,t)|\leqslant M$, 所以 $u_n=Tu_{n-1}$ 在 $C(\bar{Q}_T)$ 中有收敛的子列. 由 u_n 的单调性知, u_n 在 $C(\bar{Q}_T)$ 中收敛到 $\tilde{u}(x,t)$. 因此 $\tilde{u}=T\tilde{u}$, 故 $\tilde{u}(x,t)$ 是问题 (4.1) 在 $W^{2,1}_p(Q_T)$ 中的解.

因为当 p 充分大时,

$$W^{2,1}_p(Q_T)\hookrightarrow W^1_p(Q_T)\hookrightarrow C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T),$$

所以 $\tilde{u}(x,t)$ 是问题 (4.1) 的古典解.

同理可证 $\tilde{v}(x,t)$ 也是问题 (4.1) 的古典解.

最后证明解的唯一性. 已经知道 $\tilde{v}\leqslant\tilde{u}$. 再由比较原理又可得 $\tilde{u}\leqslant\tilde{v}$. 于是得 $\tilde{u}=\tilde{v}$. 如果 $u(x,t)$ 是问题 (4.1) 的解, 并满足 $\underline{u}\leqslant u(x,t)\leqslant\bar{u}$, 则 $u=Tu$. 利用归纳法, 同于上面的证明可得

$$v_n = T^n \underline{u} \leqslant T^n u = u \leqslant T^n \bar{u} = u_n.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x,t) = \tilde{u}(x,t) = \lim_{n\to\infty} v_n(x,t) = \tilde{v}(x,t),$$

所以 $\tilde{u}(x,t) = u(x,t) = \tilde{v}(x,t)$. 证毕.

注 4.1 上述的唯一性只是说值域落在区间 $[\underline{u}, \bar{u}]$ 中的解是唯一的, 不排除存在其他解 u, 它在某点的值不属于区间 $[\underline{u}, \bar{u}]$. 但是, 如果 $f_u(x,t,u) \in C(\bar{Q}_T \times \mathbb{R})$, 那么问题 (4.1) 的解是唯一的.

定理 2.4.7 设对任意 $m < M$, f 满足条件 (4.2) 与 (4.3). 又设 $\bar{u}$, $\underline{u}$ 分别是问题 (4.1) 上、下解, 则问题 (4.1) 存在唯一解 $u(x,t)$, 并满足

$$\underline{u}(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant \bar{u}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T.$$

证明留给读者.

作为定理 2.4.6 与定理 2.4.7 的推论, 可得问题 (4.1) 的非负解的存在唯一性.

推论 2.4.8 假设当 $(x,t) \in Q_T$ 时 $\varphi(x) \geqslant 0$, $f(x,t,0) \geqslant 0$, 当 $(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$ 时 $g(x,t) \geqslant 0$. 又设 $\bar{u}(x,t)$ 是问题 (4.1) 的非负上解, $\rho = \max\limits_{\bar{Q}_T} \bar{u}(x,t)$, 在 $Q_T \times [0,\rho]$ 上 f 满足条件 (4.2) 与 (4.3), 则问题 (4.1) 存在满足 $0 \leqslant u(x,t) \leqslant \bar{u}(x,t)$ 的唯一非负解 $u(x,t)$.

证明 只需注意 $\underline{u} = 0$ 是问题 (4.1) 的下解.

推论 2.4.9 在上述推论的条件下, 若对于任意 $\rho < \infty$, 在 $\bar{Q}_T \times [0,\rho]$ 上 f 满足条件 (4.2) 与 (4.3), 则问题 (4.1) 有唯一非负解的充要条件是它存在非负上解.

下面给出几个构造上、下解的例子. 方程中出现的非线性项、边界条件中出现的函数以及初值函数等的光滑性均满足定理 2.4.6 的要求.

例 1 设 $u = 0$ 时 $f(u) = 0$; $u \in (0,1)$ 时 $f(u) > 0$; $u = 1$ 时 $f(u) = 0$; $u > 1$ 时 $f(u) < 0$. 则对任意 $\varphi(x) \geqslant 0$, $\varphi(x) \not\equiv 0$ $(x \in \Omega)$, 初边值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u), & (x,t) \in Q_\infty, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, & (x,t) \in S_\infty, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{4.4}$$

存在唯一正解 $u(x,t)$, 并满足

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 1.$$

证明 对任意 $z_0 > 0$, 易证常微分方程初值问题

$$z'(t) = f(z), \quad z(0) = z_0$$

存在唯一解 $z = z(t; z_0)$, 并满足 $\lim\limits_{t\to\infty} z(t; z_0) = 1$. 令 $M_1 = \max\limits_{\bar{\Omega}} \varphi(x)$, 则 $M_1 > 0$, 函

数 $\bar{u} = z(t; M_1)$ 是问题 (4.4) 的上解. 又 $\underline{u} = 0$ 是下解, 所以问题 (4.4) 存在唯一非负解 $u(x,t)$, 并满足

$$0 \leqslant u(x,t) \leqslant z(t; M_1).$$

由强极值原理知

$$u(x,t) > 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t > 0.$$

取 $\delta > 0$, 则 $u(x,\delta) > 0$, $x \in \bar{\Omega}$. 令

$$m = \min_{\bar{\Omega}} u(x,\delta), \quad M = \max_{\bar{\Omega}} u(x,\delta),$$

则 $m > 0, M > 0$. 记 $w(x,t) = u(x, t+\delta)$, 则有

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = f(w), & (x,t) \in Q_\infty, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, & (x,t) \in S_\infty, \\ w(x,0) = u(x,\delta), & x \in \Omega. \end{cases}$$

由比较原理得

$$z(t;m) \leqslant w(x,t) = u(x,t+\delta) \leqslant z(t;M), \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

又 $\lim\limits_{t\to\infty} z(t;m) = \lim\limits_{t\to\infty} z(t;M) = 1$, 所以 $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t+\delta) = 1$, 故

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 1.$$

例 2 设 $\underline{u}(x,t)$ 是问题 (4.1) 的下解, $m = \min\limits_{\bar{Q}_T} u(x,t)$. 又设对任意的常数 $M > m$, f 满足条件 (4.2) 与 (4.3), 并且在 $\bar{Q}_T \times (m,\infty)$ 上 f 有上界 $\widetilde{M}$. 则问题 (4.1) 存在唯一解 $u(x,t)$, 并满足

$$u(x,t) \geqslant \underline{u}(x,t), \quad (x,t) \in \bar{Q}_T.$$

证明 线性问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = \widetilde{M}, & (x,t) \in Q_\infty, \\ B_t u = g(x,t), & (x,t) \in S_\infty, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

有唯一解 $u = \bar{u}(x,t)$, 它是问题 (4.1) 的上解. 因此, 问题 (4.1) 存在唯一解 $u(x,t)$, 并满足 $u(x,t) \geqslant \underline{u}(x,t)$.

例 3 设常数 $a > 0, k > 1$, 连续函数 $\varphi(x) \geqslant 0, \neq 0$, 则问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \lambda u - a u^k, & (x,t) \in Q_\infty, \\ Bu = 0, & (x,t) \in S_\infty, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{4.5}$$

存在唯一正解 $u(x,t)$ 且是有界的. 又设 λ_1 是特征值问题

$$-\Delta u=\lambda u,\quad x\in\Omega;\quad Bu|_{\partial\Omega}=0$$

的最小特征值, 则当 $\lambda<\lambda_1$ 时,

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=0\quad \text{对 } x\in\bar{\Omega} \text{ 一致成立.}$$

证明　显然 $\underline{u}=0$ 是下解. 可取 M 充分大使 $\bar{u}=M$ 是上解. 因此, 问题 (4.5) 存在唯一正解 $u(x,t)$ 并满足

$$0\leqslant u(x,t)\leqslant M,\quad x\in\bar{\Omega},\quad t\geqslant 0.$$

记与 λ_1 对应的特征函数为 $\varphi_1(x)$. 那么当 $Bu=\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+b(x)u$ 时, $\varphi_1(x)>0$, $x\in\bar{\Omega}$. 令 $\bar{u}=p(t)\varphi_1(x)$, 其中 $p(t)>0$ 待定. 显然, $B\bar{u}|_{S_\infty}=0$. 直接计算知

$$\begin{aligned}&\bar{u}_t-\Delta\bar{u}=p'(t)\varphi_1(x)+p(t)\lambda_1\varphi_1(x),\quad (x,t)\in Q_\infty,\\&\bar{u}(x,0)=p(0)\varphi_1(x),\quad x\in\Omega.\end{aligned}$$

欲使 $\bar{u}$ 是问题 (4.5) 的上解, 只需

$$\begin{aligned}&p'(t)\varphi_1(x)+\lambda_1p(t)\varphi_1(x)\geqslant\lambda\bar{u}=\lambda p(t)\varphi_1(x),\quad (x,t)\in Q_\infty,\\&p(0)\varphi_1(x)\geqslant\varphi(x),\quad x\in\Omega.\end{aligned}$$

取 $p(t)$ 满足

$$\begin{cases}p'(t)+(\lambda_1-\lambda)p(t)=0,\quad t>0,\\ p(0)=p_0\end{cases}$$

即可, 其中 p_0 满足

$$p_0>0,\quad p_0\min_{\bar{\Omega}}\varphi_1(x)\geqslant\max_{\bar{\Omega}}\varphi(x).$$

由此解出

$$p(t)=p_0\mathrm{e}^{(\lambda-\lambda_1)t}.$$

这说明 $\bar{u}(x,t)$ 是问题 (4.5) 的上解, 从而问题 (4.5) 的解 u 满足

$$0\leqslant u(x,t)\leqslant\bar{u}(x,t)=p_0\mathrm{e}^{(\lambda-\lambda_1)t}\varphi_1(x).$$

因此, 当 $\lambda<\lambda_1$ 时,

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=0,\quad \text{对 } x\in\bar{\Omega} \text{ 一致成立.}$$

当 $Bu=u$, $\lambda<\lambda_1$ 时, 取 $\Omega_1\supset\bar{\Omega}$, 使得特征值问题

$$-\Delta u=\lambda u,\quad x\in\Omega_1;\quad u|_{\partial\Omega_1}=0$$

的最小特征值 λ' 满足 $\lambda < \lambda' < \lambda_1$, 其相应的特征函数记为 $\psi_1(x)$, 则 $\psi_1(x) > 0,\ x \in \bar{\Omega}$. 同前可证

$$0 \leqslant u(x,t) \leqslant \bar{u}(x,t) := p_0 e^{(\lambda-\lambda')t}\psi_1(x).$$

因此

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0, \quad 对\ x \in \bar{\Omega}\ 一致成立.$$

注 4.2 若对任意 $T > 0$, 均可得到问题 (4.1) 的唯一解 $u(x,t)$, 那么它的定义域就是 $\bar{\Omega} \times [0,\infty)$, 称它为整体解.

注 4.3 条件 (4.3) 中 $f_u(x,t,u) \in C(\bar{Q}_T \times [m,M])$ 可减弱为: 存在常数 $K > 0$, 使得对任意 $(x,t) \in \bar{Q}_T$ 和 $u_1,\ u_2 \in [m,M]$, 均有

$$|f(x,t,u_2) - f(x,t,u_1)| \leqslant K|u_2 - u_1|.$$

这一点从各定理的证明中均可看出.

2.4.3 爆炸现象

问题 (4.1) 不一定有整体解, 甚至其解有可能在有限时间内爆炸 (blow up). 研究反应扩散方程的爆炸现象是有实际意义的.

定义 2.4.10 若存在 $0 < T_0 < \infty$, 使得问题 (4.1) 的解 $u(x,t)$ 在 $\bar{Q} \times [0,T_0)$ 上存在, 且有

$$\lim_{T\to T_0^-} \max_{(x,t)\in\bar{Q}_T} |u(x,t)| = \infty, \quad 或者 \quad \lim_{t\to T_0^-} \max_{x\in\bar{Q}} |u(x,t)| = \infty,$$

则称 $u(x,t)$ 在有限时间内爆炸.

定理 2.4.11 设问题 (4.1) 有非负下解 $\underline{u}(x,t)$ 定义在 $\bar{\Omega} \times [0,\infty)$ 上. 如果对任意 $T > 0$ 和 $\bar{\rho} > \rho_T$, f 在 $Q_T \times [\rho_T, \bar{\rho}]$ 上满足条件 (4.2) 与 (4.3), 其中 $\rho_T = \min\limits_{\bar{Q}_T} \underline{u}(x,t)$. 那么, 或者问题 (4.1) 存在整体解, 或者存在 $T_0 > 0$, 使得在 $[0,T_0)$ 上问题 (4.1) 存在解 $u(x,t)$, 且满足

$$\lim_{T\to T_0^-} \max_{(x,t)\in\bar{Q}_T} u(x,t) = \infty.$$

证明 任意给定 $T > 0$, 任取 $N > \max\limits_{\bar{Q}_T} \underline{u}(x,t)$. 定义函数

$$f_N(x,t,u) = \begin{cases} f(x,t,u), & u \leqslant N, \\ f(x,t,N), & u > N, \end{cases}$$

并考察辅助问题

$$\begin{cases} u_t + L_t u = f_N(x,t,u), & (x,t) \in Q_T, \\ Bu = g(x,t), & (x,t) \in S_T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.6$_N$}$$

由前面的例 2 知, 问题 (4.6_N) 存在唯一解 $u_N(x,t) \geqslant \underline{u}(x,t),\ (x,t) \in \bar{Q}_T$.

对于给定的 $T>0$, 只有以下两种情形之一发生:

(1) 存在一个 N, 使得当 $(x,t) \in \bar{Q}_T$ 时, $u_N(x,t) \leqslant N$. 那么 $u_N(x,t)$ 就是问题 (4.1) 定义在 Q_T 上的唯一解.

(2) 对每一个 $N > \max\limits_{\bar{Q}_T} \underline{u}(x,t)$, 都存在 $(x_N, \widetilde{T}_N) \in \bar{Q}_T$, 使得 $u_N(x_N, \widetilde{T}_N) > N$.

如果对每个 $T>0$, 都出现第一种情形, 则问题 (4.1) 有整体解.

如果存在一个 $T>0$, 出现第二种情形, 因为 $\max\limits_{\bar{Q}_\tau} u_N(x,t)$ 是 $\tau \in [0,T]$ 的连续函数, 并且 $\lim\limits_{t\to 0} u_N(x,t) = \varphi(x)$ 关于 $x \in \Omega$ 一致成立, 所以当 $\tau>0$ 充分小时, $\max\limits_{\bar{Q}_\tau} u_N(x,t) < N$ (N 适当大). 又 $\max\limits_{\bar{Q}_T} u_N(x,t) > N$, 故存在 $T_N < T$, 使得

$$\max_{\bar{Q}_{T_N}} u_N(x,t) = N.$$

这说明 $u_N(x,t)$ 是问题 (4.1) 定义在 $\bar{Q}_{T_N}$ 上的唯一解.

因为当 $M > N > \max\limits_{\bar{Q}_T} \underline{u}(x,t)$ 时, $\max\limits_{\bar{Q}_{T_N}} u_N(x,t) = N < M$, 所以 $u_N(x,t)$ 是问题 (4.6_M) 在 Q_{T_N} 上的解. 由解的唯一性知, 在 Q_{T_N} 上 $u_M(x,t) = u_N(x,t) < M$, 因此 T_N 是 N 的单调上升序列, $T_N \leqslant T$. 故存在极限 $\lim\limits_{N\to\infty} T_N = T_0,\ T_0 \leqslant T$.

对于任意固定的 $T^* < T_0$, 存在 $N_0 > \max\limits_{\bar{Q}_T} \underline{u}(x,t)$, 使得 $T_{N_0} > T^*$, 从而当 $N \geqslant N_0$ 时, $T_N > T^*$. 因此

$$u_N(x,t) = u_{N_0}(x,t), \quad \forall\, (x,t) \in \bar{Q}_{T^*}, \quad N \geqslant N_0.$$

由此, 可以在 Q_{T_0} 上定义函数 $u(x,t)$, 使得当 $t < T_N$ 时, $u(x,t) = u_N(x,t)$. 显然, 这样定义的 $u(x,t)$ 是问题 (4.1) 在 $\bar{\Omega} \times [0, T_0)$ 的解, 而且

$$\lim_{T\to T_0^-} \max_{\bar{Q}_T} u(x,t) = \infty.$$

证毕.

如果把问题 (4.1) 有下解改为有上解或改为对任意 $T>0$ 和任意的 $m<M$, f 满足条件 (4.2) 与 (4.3), 你能得到什么结论?

给定问题 (4.1), 怎样判定它的解一定在有限时间内爆炸呢? 即能否给出一些使得问题 (4.1) 的解在有限时间内爆炸的充分条件. 另外, 虽然给出确切的爆炸时刻 T_0 是困难的, 但能否给出 T_0 的估计呢? 下面就来讨论这些问题.

从定理 2.4.11 的证明中可以看到, 若问题 (4.1) 的下解 $\underline{u}(x,t)$ 本身就有

$$\lim_{T\to T^*} \max_{\bar{Q}_T} \underline{u}(x,t) = \infty,$$

则问题 (4.1) 的解 $u(x,t)$ 也一定在有限时间内爆炸, 而且可以用 T^* 作为爆炸时刻 T_0 的估计值.

利用这种方法考虑下面的例子.

例

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = c(\mathrm{e}^{au} - b), & (x,t) \in Q_\infty, \\ Bu \equiv \beta \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + u = 0, & (x,t) \in S_\infty, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.7}$$

其中 a, b, c, β 均为正常数且 $b \leqslant 1$.

记 λ_1 是特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ Bu = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的最小特征值, 相应的特征函数为 $\varphi_1(x)$, 则 $\varphi_1(x) > 0,\ x \in \bar{\Omega}$.

如果

$$ca \geqslant \lambda_1, \quad 且存在\ \delta > 0, 使得\ \varphi(x) \geqslant \delta\varphi_1(x),$$

则存在 $T_0 \leqslant 1/\gamma$, 使得问题 (4.1) 有唯一非负解 $u(x,t)$ 定义在 $\bar{\Omega} \times [0, T_0)$ 上, 并满足

$$u(x,t) \geqslant \delta(1-\gamma t)^{-1}\varphi_1(x), \quad \lim_{T \to T_0^-} \max_{\bar{Q}_T} u(x,t) = \infty,$$

其中

$$\gamma = \frac{1}{2} c\delta a^2 \min_{\bar{\Omega}} \varphi_1(x).$$

证明 只需寻求一个在有限时间内爆炸的下解 $\underline{u}(x,t) = p(t)\varphi_1(x)$, 并且可以取 $p(t) = \delta(1-\gamma t)^{-1}$. 为此, 要求

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta)p(t)\varphi_1(x) = [p'(t) + \lambda_1 p(t)]\varphi_1(x) &\leqslant c(\mathrm{e}^{ap(t)\varphi_1(x)} - b), \\ p(0) &\leqslant \delta. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} c(\mathrm{e}^{ap\varphi_1} - b) \geqslant c(\mathrm{e}^{ap\varphi_1} - 1) &\geqslant cap\varphi_1 + \frac{1}{2}ca^2p^2\varphi_1^2 \\ &\geqslant (cap + \frac{1}{2}ca^2p^2 \min_{\bar{\Omega}} \varphi_1(x))\varphi_1, \end{aligned}$$

所以只需取 $p(t) > 0$ 满足

$$p'(t) + (\lambda_1 - ca)p \leqslant \frac{1}{2}ca^2p^2 \min_{\bar{\Omega}} \varphi_1(x), \quad p(0) \leqslant \delta.$$

又因 $\lambda_1 - ca \leqslant 0$, 所以只需取 p 满足

$$p' = \frac{1}{2}ca^2p^2 \min_{\bar{\Omega}} \varphi_1(x), \quad p(0) = \delta,$$

解得

$$p(t) = \frac{\delta}{1-\gamma t}, \quad t \in [0, 1/\gamma).$$

由此得到问题 (4.7) 的一个在有限时间内爆炸的下解 $\underline{u}(x,t) = p(t)\varphi_1(x)$. 证毕.

注 4.4　还可用其他方法讨论爆炸问题, 例如"凸性方法".

利用凸性方法可以讨论下面的问题:

(1) 初边值问题解的不存在性;

(2) 若初边值问题的解在有限时间内爆炸, 解的最大存在时间 T_0 的估计.

所谓凸性方法的主要思想在于数学分析的以下事实:

引理 2.4.12　设 $J(t) \in C^2[0,T) \cap C[0,T]$, $J(0) > 0$, $J'(0) < 0$, $J''(t) \leqslant 0$, $T \geqslant -\dfrac{J(0)}{J'(0)}$, 则存在 $T_0: 0 < T_0 \leqslant -\dfrac{J(0)}{J'(0)}$, 使得 $J(T_0) = 0$.

证明留给读者.

为了突出凸性方法的思想, 并避免复杂的计算, 我们只考虑以下简单问题

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.8}$$

假设

(1) $u_0(x) \geqslant 0$, $u_0(x) \not\equiv 0$;

(2) $f(u_0(x)) + \Delta u_0(x) > 0$, $x \in \Omega$;

(3) $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$, $f(u) \geqslant 0$;

(4) 存在正整数 $l \geqslant 3$, 使得

$$uf'(u) - (l-1)f(u) \geqslant 0, \quad \forall\, u \geqslant 0.$$

如果问题 (4.8) 有解 $u(x,t) \in C^{3,2}(Q_T) \cap C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, 其中 $T > 0$ 是 $u(x,t)$ 的最大存在时间, 显然 $u(x,t)$ 非负. 引进

$$I(t) = \int_\Omega u^l(x,t)\mathrm{d}x, \quad l \geqslant 3,$$

$$J(t) = I(t)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

则有

$$I(0) > 0,$$

$$I'(0) = l\int_\Omega u_0^{l-1}[f(u_0) + \Delta u_0]\mathrm{d}x > 0.$$

于是

$$J(0) > 0, \quad J'(0) < 0.$$

又

$$J''(t) = -\alpha I^{-\alpha-2}[II'' - (\alpha+1)I'^2],$$

若能证明 $J''(t) \leqslant 0$, 由引理 2.4.12 便推出

$$T \leqslant -\frac{J(0)}{J'(0)} = \frac{I(0)}{\alpha I'(0)}.$$

下面证明

定理 2.4.13 设条件 (1)~(4) 成立.

① 若 $T > \hat{T} := \dfrac{l}{l-2}\dfrac{I(0)}{I'(0)}$, 则问题 (4.8) 不存在属于 $C^{3,2}(Q_T) \cap C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ 的解.

② 若 $u(x,t) \in C^{3,2}(Q_T) \cap C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ 是问题 (4.8) 的解, 其中 T 是 u 的最大存在时间, 则 $T < \hat{T}$ 并且 u 一定在时刻 T 爆炸.

证明 设 $u(x,t) \in C^{3,2}(Q_T) \cap C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ 是问题 (4.8) 的解, 对 $I(t)$ 求导并利用方程及散度定理得

$$\begin{aligned}
I'(t) =& \int_\Omega l u^{l-1} u_t \mathrm{d}x = -l(l-1)\int_\Omega u^{l-2}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x + l\int_\Omega u^{l-1} f(u)\mathrm{d}x,\\
I''(t) =& l(l-1)\int_\Omega u^{l-2}u_t^2 \mathrm{d}x + l\int_\Omega u^{l-1}u_{tt}\mathrm{d}x\\
=& 2l(l-1)\int_\Omega u^{l-2}u_t^2\mathrm{d}x - l(l-1)\int_\Omega u^{l-2}u_t[\Delta u + f(u)]\mathrm{d}x\\
&+l\int_\Omega u^{l-1}[\Delta u + f(u)]_t \mathrm{d}x\\
=& \int_\Omega \left[2l(l-1)u^{l-2}u_t^2 - l(l-1)u^{l-2}u_t f(u) + l u^{l-1} f'(u) u_t\right]\mathrm{d}x\\
&-l(l-1)\int_{\partial\Omega} u^{l-2}u_t \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S + l(l-1)(l-2)\int_\Omega u^{l-3}u_t|\nabla u|^2\mathrm{d}x\\
&+l(l-1)\int_\Omega u^{l-2}\sum_{i=1}^n u_{x_i}u_{x_it}\mathrm{d}x + l\int_{\partial\Omega} u^{l-1}\frac{\partial u_t}{\partial n}\mathrm{d}S\\
&-l(l-1)\int_\Omega u^{l-2}\sum_{i=1}^n u_{x_i}u_{x_it}\mathrm{d}x\\
=& 2l(l-1)\int_\Omega u^{l-2}u_t^2\mathrm{d}x + l\int_\Omega u^{l-2}u_t[uf'(u) - (l-1)f(u)]\mathrm{d}x\\
&+l(l-1)(l-2)\int_\Omega u^{l-3}u_t\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

令 $v = u_t$，则 v 满足

$$\begin{cases} v_t = \Delta v + f'(u)v, & (x,t) \in Q_T, \\ v = 0, & (x,t) \in S_T, \\ v|_{t=0} = f(u_0(x)) + \Delta u_0(x) > 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

由此易知 $v = u_t \geqslant 0$, 于是由假设条件得

$$I''(t) \geqslant 2l(l-1)\int_\Omega u^{l-2}u_t^2 \mathrm{d}x.$$

再由 Schwarz 公式,

$$\begin{aligned}[I'(t)]^2 &= l^2\left(\int_\Omega u^{l-1}u_t \mathrm{d}x\right)^2 = l^2\left(\int_\Omega u^{\frac{l-2}{2}+\frac{l}{2}}u_t \mathrm{d}x\right)^2 \\ &\leqslant l^2\int_\Omega u^l \mathrm{d}x\int_\Omega u^{l-2}u_t^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{l}{2(l-1)}I(t)I''(t),\end{aligned}$$

即

$$I(t)I''(t) \geqslant \frac{2(l-1)}{l}[I'(t)]^2.$$

若取 $\alpha = \dfrac{l-2}{l}$, 则有

$$J''(t) = -\alpha I^{-\alpha-2}[II'' - (\alpha+1)I'^2] \leqslant 0.$$

记

$$\hat{T} = \frac{l}{l-2}\frac{I(0)}{I'(0)} = -\frac{J(0)}{J'(0)},$$

由引理 2.4.12 知, 存在 $0 < T_0 \leqslant \hat{T}$ 使得 $J(T_0) = 0$, 即

$$\left(\int_\Omega u^l(x,T_0)\mathrm{d}x\right)^{-\alpha} = 0, \quad \Longrightarrow \lim_{t\to T_0^-}\int_\Omega u^l(x,t)\mathrm{d}x = \infty.$$

从而

$$\lim_{t\to T_0^-}\max_{\bar{\Omega}} u(x,t) = \infty.$$

证毕.

2.5 抛物型方程初值问题的比较方法

最后, 考虑初值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u), & (x,t) \in Q_T, & \text{(a)} \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, & \text{(b)} \end{cases} \tag{5.1}$$

其中

$$Q_T = \mathbb{R} \times (0, T),$$

T 为有限或 ∞. 在空间

$$C_b(\bar{Q}_T) = \{u(x,t) : u \in C(\bar{Q}_T) \text{ 且有界}\}$$

中求解初值问题 (5.1), 它的解记为 $u_\varphi(x,t)$.

2.5.1 初值问题的比较原理

由初值问题的强极值原理可导出初值问题的比较原理, 它是讨论初值问题的基本依据.

引理 2.5.1 (强极值原理) 设 $b(x,t), c(x,t)$ 在 $\bar{Q}_T$ 有界, $V \in C_b(\bar{Q}_T)$ 且满足

$$\begin{cases} V_t - V_{xx} - b(x,t)V_x - c(x,t)V \geqslant 0, & (x,t) \in Q_T, \\ V(x,0) \geqslant 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

则 $V \geqslant 0$. 又若 $V(x,0) \not\equiv 0$, 则 $V(x,t) > 0$, $(x,t) \in Q_T$.

引理 2.5.2 (比较原理) 设 $b(x,t), c(x,t)$ 在 $\bar{Q}_T$ 有界, $f \in C^1[m, M]$, $u, v \in C_b(\bar{Q}_T)$, 且当 $(x,t) \in \bar{Q}_T$ 时 $m \leqslant u, v \leqslant M$. 如果 u, v 满足

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} - b(x,t)u_x - f(u) \geqslant v_t - v_{xx} - b(x,t)v_x - f(v), \quad & (x,t) \in Q_T, \\ u(x,0) \geqslant v(x,0), \quad & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

则 $u(x,t) \geqslant v(x,t)$, $(x,t) \in \bar{Q}_T$. 如果又有 $u(x,0) \not\equiv v(x,0)$, 则 $u(x,t) > v(x,t)$, $(x,t) \in Q_T$.

证明 利用强极值原理.

2.5.2 上、下解与初值问题解的存在唯一性

初值问题的解是否存在唯一, 取决于对初值问题的解是否有先验估计.

定理 2.5.3 设 $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$, $\varphi(x) \in \mathring{C}(\mathbb{R})$. 又设若初值问题 (5.1) 有解 $u(x,t)$, 必有

$$|u(\cdot,t)|_0 \leqslant K(t), \quad 0 < t < T,$$

其中 $K(t)$ 是某正函数. 则初值问题 (5.1) 存在唯一解 $u_\varphi(x,t)$ 满足

$$|u_\varphi(x,t)| \leqslant K(t), \quad (x,t) \in Q_T.$$

利用上、下解可得解的先验估计.

定义 2.5.4 设 $\bar{u}(x,t)$ ($\underline{u}(x,t)$) 满足:

(1) $\bar{u}(\underline{u}) \in C_b(\bar{Q}_T), \bar{u}_t$ ($\underline{u}_t$) $\in C(Q_T)$, $\bar{u}_{xx}$ ($\underline{u}_{xx}$) $\in C(Q_T)$;

(2) $L\bar{u} := \bar{u}_t - \bar{u}_{xx} \geqslant f(\bar{u})$ $(L\underline{u} \leqslant f(\underline{u}))$, $(x,t) \in Q_T$.
则称 $\bar{u}$ ($\underline{u}$) 是方程 (5.1)–(a) 的上解 (下解).

如果又有

(3) $\bar{u}(x,0) \geqslant \varphi(x)$ $(\underline{u}(x,0) \leqslant \varphi(x))$, $x \in \Omega$.
则称 $\bar{u}$ ($\underline{u}$) 是初值问题 (5.1) 的上解 (下解).

由比较原理可得初值问题上、下解的有序性.

推论 2.5.5 若 $\bar{u}(x,t)$, $\underline{u}(x,t)$ 分别是问题 (5.1) 的上、下解, 则 $\bar{u}(x,t) \geqslant \underline{u}(x,t)$, $(x,t) \in Q_T$. 又若 $\bar{u}(x,0) \not\equiv \underline{u}(x,0)$, 则 $\bar{u}(x,t) > \underline{u}(x,t)$, $(x,t) \in Q_T$.

定理 2.5.6 设 $f \in C^1(\mathbb{R})$, $\varphi(x) \in C_b(\mathbb{R})$, 并且问题 (5.1) 存在上解 $\bar{u}(x,t)$ 和下解 $\underline{u}(x,t)$, 那么问题 (5.1) 存在唯一解 $u(x,t)$, 并满足

$$\underline{u}(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant \bar{u}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T.$$

证明留给读者.

推论 2.5.7 设 $\varphi(x) \in C_b(\mathbb{R})$, 问题 (5.1) 存在上解 $\bar{u}$ 和下解 $\underline{u}$. 令 $m = \inf\limits_{\bar{Q}_T} \underline{u}(x,t)$, $M = \sup\limits_{\bar{Q}_T} \bar{u}(x,t)$, 又设 $f \in C^1[m,M]$, 则问题 (5.1) 存在满足

$$\underline{u}(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant \bar{u}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T$$

的唯一解.

证明 作辅助问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f^*(u), & (x,t) \in Q_T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

其中 $f^*(u) \in C^1(\mathbb{R})$, 使得当 $u \in [m,M]$ 时 $f^*(u) = f(u)$. 利用定理 2.5.6 可得结论.

2.6 评 注

从本章和以后各章中讨论的问题 (例子) 都可以看出, 二阶线性椭圆型方程的特征值问题, 在偏微分方程 (尤其是椭圆型方程和抛物型方程) 的研究中起非常重要的作用. 二阶线性椭圆型方程的特征值, 尤其是方程组的特征值, 目前还有许多问题没有解决. 2.3.2 节只是对二阶线性椭圆型方程式的特征值问题做了一个简单介绍, 该方面的较详细介绍可以参看文献 [Du3] 和 [W4].

求解抛物型方程的初边值问题, 初值问题以及椭圆型方程边值问题的单调方法是一种迭代法. 它把求解非线性问题转化为求解线性问题, 先得到近似解序列, 然后证明它单调有界, 从而极限存在, 再证极限函数是解.

利用单调方法可以讨论如下问题：抛物型方程定解问题解 (包括整体解) 的存在唯一性、椭圆型方程边值问题解的存在性与分叉、平衡解的稳定性 (第 3 章)、解的爆炸问题等, 参见文献 [Sa1] 和 [Pao1-3].

应用单调方法的关键是求出上、下解, 其常见的方法有：求常数上解或下解 (见 2.3.3 节); 利用线性问题的解 (2.4.2 节的例 2); 利用第一特征函数 (2.3.3 节及 2.4.2 节的例 3); 利用相应的常微分方程 (2.4.2 节的例 1); 利用变分方法 ([Ra]) 求下解.

单调方法有以下推广：

(1) 把单调方法推广到方程组 (见第 4 章).

(2) 考虑反应项 f 依赖于未知函数的导数项 ([FTa]).

(3) 讨论反应扩散方程周期解的存在性, 例如：

$$\begin{cases} \mathscr{L}u + c(x,t)u = f(x,t,u,\mathrm{grad}u), & x\in\Omega,\quad t>0,\\ Bu=0, & x\in\partial\Omega,\quad t>0,\end{cases}$$

见文献 [Am3].

(4) 讨论退化的非线性反应扩散问题, 如

$$\begin{cases} u_t=(u^m)_{xx}+f(u), & -l<x<l,\quad t>0,\\ u(\pm l,t)=0, & t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), & -l\leqslant x\leqslant l,\end{cases}$$

见文献 [ACP].

本章前面引进的上、下解称为古典的上、下解或正规的上、下解. 对于这种上、下解, 从微分不等式的要求, 它需要一定的光滑性, 这对于研究问题是不方便的, 需要放松光滑性的限制, 又使得比较定理仍然成立. 为此, 不少作者推广了上、下解的概念.

1. 引进不正规的上、下解

Fife 在 [F] 中分别定义

$$\bar u(x)=\min_{\Omega}\{\bar u_1(x),\cdots,\bar u_N(x)\},$$
$$\underline{u}(x)=\max_{\Omega}\{\underline{u}_1(x),\cdots,\underline{u}_N(x)\}$$

为 (不正规的) 上、下解, 其中 $\bar u_i$, $\underline{u}_i$ 分别为正规的上、下解. 在 [FTa] 中把取 max 与 min 的集合换成 $x\in\Omega$ 的任意邻域 Δ_x, 即把

$$\bar u(x)=\min_{\Delta_x}\{\bar u_1(x),\cdots,\bar u_N(x)\},$$
$$\underline{u}(x)=\max_{\Delta_x}\{\underline{u}_1(x),\cdots,\underline{u}_N(x)\}$$

分别称为不正规的上、下解.

2. 引进弱上、下解

为了研究弱解, 引进弱上、下解, 文献 [ACP] 中给出了下面的弱上、下解的定义.

若 $u:[0,\infty)\to L_1(\Omega)$ $(\Omega=(-l,l))$ 满足:

(1) $u\in C([0,\infty);L_1(\Omega))\cap L_\infty\ (\Omega_T),\quad \forall\, T>0$;

(2) 对任意 $\varphi\in C^2(Q_T)$, $\varphi\geqslant 0$, $\varphi|_{\pm l}=0$ 及 $T>0$ 有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u(x,T)\varphi(x,T)\mathrm{d}x-\int_{Q_T}(u\varphi_t+u^m\varphi_{xx})\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ \geqslant(\leqslant)&\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)\mathrm{d}x+\int_{Q_T}f(u)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

则称 u 是问题

$$\begin{cases}u_t=(u^m)_{xx}+f(u), & -l<x<l,\quad t>0,\\ u(\pm l,t)=0, & t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), & -l\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$

的弱上 (下) 解.

推广弱上、下解的基本原则是必须保证弱比较原理成立, 进而得到弱解的存在性. 上、下解概念的推广, 给许多问题的研究带来方便. 对于某些具体的反应扩散方程的研究, 单调方法常常是有效的.

文献 [W4] 给出了椭圆型方程上、下解方法更为详细的讨论和更多的应用例子.

习 题 二

2.1 设 $u(x),v(x)$ 是边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=(1-u^2-v^2)u, & x\in\Omega,\\ -\Delta v=(1-u^2-v^2)v, & x\in\Omega,\\ u=v=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{2-1}$$

的解.

(1) 求 $\Delta(u^2+v^2)$;

(2) 证明 $u^2(x)+v^2(x)\leqslant 1,\ x\in\Omega$.

2.2 设边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=\alpha uv,\quad \Delta v=\beta uv, & x\in\Omega,\\ u=\varphi(x),\quad v=\psi(x), & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

有非负解 $(u(x),v(x))$ 和 $(\bar u(x),\bar v(x))$, 其中 α,β 为正常数. 证明

(1) $\beta u - \alpha v = \beta \bar{u} - \alpha \bar{v}$;

(2) $u(x) = \bar{u}(x),\ v(x) = \bar{v}(x)$.

2.3 证明引理 2.1.4 与引理 2.1.5.

2.4 设 $f \in C^1$, $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta v \geqslant f(v), \quad -\Delta u \leqslant f(u), & x \in \Omega, \\ v \geqslant u,\ v \not\equiv u, & x \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

证明:

(1) $v(x) > u(x),\ x \in \Omega$;

(2) 若又有 $v|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$, 则 $\left.\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega} < \left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega}$.

2.5 若 $w_n(x)$ 在 $C^{k+\mu}(\bar{\Omega})$ 中有界, 又

$$\lim_{n\to\infty} w_n(x) = w(x) \quad (x \in \Omega,\ \text{逐点收敛}).$$

证明: 对任意 $0 < \alpha < \mu$, $w(x) \in C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$ 且在 $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中 $w_n(x)$ 收敛到 $w(x)$.

2.6 设 $f \in C^1$, 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解集合为 S, 并令 $E = C(\bar{\Omega})$. 试证明:

(1) 集合 $\{u : u \in S,\ \|u\|_E \leqslant R\}$ 在 E 中是列紧的;

(2) 若 $u_n \in S$, 且在 E 中 $u_n \to u\ (n \to \infty)$, 则 $u \in S$.

2.7 假设存在 $v \in C^2(\bar{\Omega})$, $v \geqslant 0, \not\equiv 0$, 满足

$$-\Delta v + q(x)v \geqslant 0, \not\equiv 0, \quad x \in \Omega; \quad v = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

其中 $q(x) \in C(\bar{\Omega})$. 求证特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2-2}$$

的最小特征值 $\lambda_1 > 0$.

2.8 设 $u(x), v(x)$ 是边值问题 (2-1) 的解, $u \not\equiv 0, v \not\equiv 0$. 证明:

(1) 若 u 或 v 在 Ω 内不变号, 则存在 $\alpha \in \mathbb{R}$, 使得 $v = \alpha u$;

(2) 设 $q(x) \equiv 0$ 时 (2-2) 的全体特征值为 $\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots$. 若 $\lambda_2 > 1$, 则 u 和 v 在 Ω 内无零点.

2.9 设 $u(x,t), v(x,t) \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0,\infty))$ 且非负、有界, 又满足

$$u_t + v_t - a\Delta u - b\Delta v \leqslant 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty),$$

其中 a, b 为正常数. 如果

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\partial\Omega}[u(x,t)+v(x,t)]\mathrm{d}S \to 0,$$

证明:

(1) $\lim\limits_{t\to\infty}\int_{\Omega}[u(x,t)+v(x,t)]\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$, 其中 $\varphi(x)$ 是问题 (2-2) 当 $q(x)\equiv 0$ 时的第一特征函数;

(2) $\lim\limits_{t\to\infty}\int_{\Omega}[u(x,t)+v(x,t)]\mathrm{d}x = 0$.

2.10　设 $q_n(x), q(x)\in C(\bar{\Omega})$, $n\to\infty$ 时在 Ω 上 $q_n(x)$ 一致收敛到 $q(x)$. 又设问题 (2-2) 的最小特征值为 0, 对任意 n, $\lambda=0$ 是

$$\begin{cases} -\Delta u + q_n(x)u = \lambda u, & x\in\Omega, \\ u = 0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{2-3}$$

的特征值. 证明: 存在 N, 使得当 $n>N$ 时, $\lambda=0$ 是问题 (2.3) 的最小特征值.

2.11　设 $u\geqslant 0$ 时 $f(u)$ 是局部 Lipschitz 的, $f(0)\geqslant 0$. 考察边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u), & x\in\Omega, \\ u = 0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{2-4}$$

证明:

(1) 存在 $\lambda^*>0$, 使得当 $\lambda\in(0,\lambda^*)$ 时, 问题 (2-4) 存在一个非负解;

(2) 如果又有 $f(0)>0$, 当 $u>0$ 时 $f(u)$ 是增函数, 则

$$\frac{8n}{d^2}\sup_{t>0}\frac{t}{f(t)} \leqslant \lambda^* \leqslant \lambda_1\sup_{t>0}\frac{t}{f(t)},$$

其中 n 是空间 $\mathbb{R}^n$ 的维数, d 为 Ω 的直径, λ_1 是特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x\in\Omega, \\ u = 0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{2-5}$$

的最小特征值;

(3) 若 $f(u)$ 有界, 证明: 对任意 $\lambda>0$, 问题 (2-4) 存在一个非负解.

2.12　考察边值问题

$$\begin{cases} Lu + c(x)u = f(x,u), & x\in\Omega, \\ Bu = 0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{2-6}$$

其中 $c(x)\in C^{\alpha}(\bar{\Omega}), c(x)\geqslant 0$. 设

(H_1)　存在常数 $M>0$, 使得当 $x\in\Omega$, $u>M$ 时, $f(x,u)<0$;

(H_2) $f(x,u)$ 在 $\bar{\Omega}\times[0,\infty)$ 是局部 Lipschitz 的;

(H_3) 在 $\bar{\Omega}$ 上, $f(x,0)>0$.

证明:

(1) 若 $u(x)$ 是问题 (2-6) 的非负解, 又设 f 满足 (H_1), 则 $0\leqslant u\leqslant M,\ x\in\bar{\Omega}$;

(2) 若 (H_1) $\sim$ (H_3) 成立, 则问题 (2-6) 存在最大正解 $\bar{u}(x)$, 且满足 $0<\bar{u}(x)\leqslant M,\ x\in\Omega$.

2.13 设常数 $M>0, f_u(x,u)\in C(\Omega\times[0,M])$, 并且在 Ω 内 $f(x,M)\leqslant 0$ (取等号时 $c(x)$ 与 $b(x)$ 不同时恒为零). 若 $u(x)$ 是问题 (2-6) 的正解, 试证

$$|u|_0=\max_{\Omega}|u(x)|\neq M.$$

2.14 设 $u(x)$ 是问题 (2-6) 的解, 当 $x\in\Omega,\ u<0$ 时, $f(x,u)\geqslant 0$ (取等号时要求 $c(x)$ 与 $b(x)$ 不同时恒为零). 证明 $u(x)\geqslant 0$.

2.15 证明定理 2.3.28.

2.16 证明定理 2.3.29.

2.17 设 $g(u)\in C^1(\mathbb{R})$, 且

$$g(u)/u\leqslant 1,\quad \forall\, u\in\mathbb{R}.$$

又设 $f(x)\in C[0,\pi]$, 满足 $\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x=0$. 证明: 边值问题

$$\begin{cases}-u''(x)=g(u)+f(x), & x\in(0,\pi),\\ u(0)=u(\pi)=0\end{cases}$$

存在解.

2.18 记特征值问题 (2-5) 的最小特征值为 λ_1. 假设 $f\in C^1(\mathbb{R})$ 并且

$$\limsup_{|t|\to\infty}\frac{f(t)}{t}<\lambda_1.$$

证明: 初边值问题

$$\begin{cases}u_t=\Delta u=f(u), & x\in\Omega,\quad t>0,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\quad t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega\end{cases}$$

存在唯一解且有界.

第 3 章　平衡解的稳定性

本章利用比较方法讨论半线性抛物型方程的初边值问题以及初值问题平衡解的稳定性.

3.1　平衡解与稳定性概念

设有半线性抛物型方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t + Lu = f(x,t,u), & (x,t) \in Q_\infty, & \text{(a)} \\ Bu = g(x), & (x,t) \in S_\infty, & \text{(b)} \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega, & \text{(c)} \end{cases} \tag{1.1}$$

它的特殊情形是

$$\begin{cases} u_t + Lu = f(x,u), & (x,t) \in Q_\infty, & \text{(a)} \\ Bu = g(x), & (x,t) \in S_\infty, & \text{(b)} \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega, & \text{(c)} \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $Q_\infty = \Omega \times (0,\infty)$, $S_\infty = \partial\Omega \times (0,\infty)$, L, B, g 满足第 2 章中条件 (2.3), $\varphi(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 满足相容性条件.

若 $u = w(x)$ 满足 (1.2) 中 (a), (b), 则称 $w(x)$ 是问题 (1.2) 中 (a), (b) 的平衡解, 也称为是 (1.2) 的平衡解. $w(x)$ 是问题 (1.2) 中 (a), (b) 的平衡解的充要条件是: $w(x)$ 是椭圆型边值问题

$$Lu = f(x,u), \quad x \in \Omega; \quad Bu = g(x), \quad x \in \partial\Omega$$

的解.

对任意固定的 $t \geqslant 0$, $u(\cdot,t)$ 作为 $C(\bar{\Omega})$ 空间中的元素, 定义范数

$$\|u(\cdot,t)\|_C = \max_{\bar{\Omega}} |u(x,t)|$$

作为 $W_2^1(\Omega) = H^1(\Omega)$ 中的元素, 定义范数

$$\|u(\cdot,t)\|_{1,2} = \left(\int_\Omega |u(x,t)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} + \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

考察初值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u), & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \quad \text{(a)} \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \quad \text{(b)} \end{cases} \tag{1.3}$$

若 $u = w(x)$ 满足

$$w'' + f(w) = 0,$$

则称 $w(x)$ 为问题 (1.3)-(a) 的平衡解, 也称为问题 (1.3) 的平衡解.

对于任意固定的 $t \geqslant 0$, $u(\cdot,t)$ 作为 $\mathring{C}(-\infty,\infty)$ 中的元素, 定义范数

$$\|u(\cdot,t)\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x,t)|.$$

下面给出稳定性的定义.

以 $u_\varphi(x,t)$ 表示问题 (1.1), 或 (1.2), 或 (1.3) 的解, 并认为 $u_\varphi(x,t)$ 整体存在, $w(x)$ 是问题 (1.1), 或 (1.2), 或 (1.3) 的平衡解, $\|\cdot\|$ 代表某种模.

定义 3.1.1 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $\|u(x,0) - w(x)\| = \|\varphi(x) - w(x)\| < \delta$ 时, 对所有的 $t \geqslant 0$ 有

$$\|u_\varphi(x,t) - w(x)\| < \varepsilon,$$

则称 $w(x)$ 为稳定的. 若存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $\|\varphi(x) - w(x)\| < \delta_1$ 时, 有

$$\lim_{t\to\infty} \|u_\varphi(x,t) - w(x)\| = 0,$$

则称 $w(x)$ 是吸引的. 集合

$$\left\{\varphi(x) : \lim_{t\to\infty} \|u_\varphi(x,t) - w(x)\| = 0\right\}$$

称为 $w(x)$ 的吸引区域. 若 $w(x)$ 既是稳定的又是吸引的, 则称 $w(x)$ 为 (局部) 渐近稳定的. 若 $w(x)$ 不是稳定的, 则称为不稳定的.

同于常微分方程，也可引进全局渐近稳定性的概念.

不同的空间对应着不同的稳定性. 在初值问题中, 可以给出 $\mathring{C}(\mathbb{R})$ 空间中的稳定性. 在初边值问题中, 可以给出 $C(\Omega)$ 空间, $H^1(\Omega)$ 空间或 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 空间中的稳定性等. 我们还常常在 $C(\Omega)$ 空间中的某个集合上考虑稳定性, 如

$$C^+(\bar{\Omega}) = \{\varphi(x) : \varphi(x) \in C(\bar{\Omega}),\ \varphi(x) \geqslant 0,\ \ x \in \bar{\Omega}\},$$

即考虑非负解的稳定性. 有时只考虑在逐点收敛意义下的渐近稳定性, 即

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = w(x).$$

自然会问，各种收敛性之间有什么联系？我们先引述一个引理然后回答这个问题.

引理 3.1.2 ([BDG]) 设 $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$, $\delta > 0$, $u(x,t)$ 是

$$\begin{cases} u_t + Lu = f(u), & (x,t) \in Q_\infty, \\ Bu = g(x), & (x,t) \in S_\infty, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{1.4}$$

的有界解, 并且对任意 $T > 0$, 有 $u(x,t) \in C^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(\bar{\Omega} \times [\delta, T])$. 则存在与 t 无关的常数 $M > 0$, 使得对所有 $t \geqslant \delta > 0$, 有

$$|u(\cdot,t)|_{2+\beta} \leqslant M. \tag{1.5}$$

利用这个引理可以证明

定理 3.1.3　在引理 3.1.2 的条件下, 则有

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = w(x)(\text{逐点意义下}) \tag{1.6}$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty} |u(x,t) - w(x)|_{2+\alpha} = 0 \tag{1.7}$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty} \|u(x,t) - w(x)\|_{1,2} = 0, \quad (w(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})), \tag{1.8}$$

这里 $w(x)$ 是问题 (1.4) 的平衡解.

证明　先设 (1.6) 式成立. 因为当 $0 < \alpha < \beta$ 时, $C^{2+\beta}(\bar{\Omega}) \overset{紧}{\hookrightarrow} C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, 所以由 (1.5) 式知 (1.7) 式成立.

利用 $u(x,t)$ 的一致有界性及估计式 (1.5) 知, 对任意的 $p \geqslant 2$, 存在常数 M_1, 使得

$$\|u(x,t) - w(x)\|_{1,p}^p \leqslant M_1 \|u(x,t) - w(x)\|_{1,2}^2, \quad t \geqslant \delta.$$

再利用嵌入定理, 存在常数 M_2, 使得

$$\|u(x,t) - w(x)\|_\alpha \leqslant M_2 \|u(x,t) - w(x)\|_{1,2}^{2/p}.$$

因此, 若 (1.8) 式成立, 则 (1.6) 式成立, 从而 (1.7) 式也成立. 证毕.

3.2　初边值问题平衡解的稳定性

3.2.1　基于第一特征值与第一特征函数的稳定性判别法

设 $\lambda_1 > 0$ 是

$$Lu = \lambda u, \quad x \in \Omega; \quad Bu|_{\partial\Omega} = 0$$

的第一特征值, 相应的特征函数 (第一特征函数) 记为 $\varphi_1(x)$, 那么 $\varphi_1(x) > 0$, $x \in \Omega$. 将 $\varphi_1(x)$ 规范化使 $\max\limits_{\bar{\Omega}} \varphi_1(x) = 1$. 在某些情形下, 可利用第一特征函数来构造上、下解, 从而判断问题 (1.1) 或 (1.2) 的平衡解的稳定性.

现设 $f(x,t,0)=0$, $g(x)=0$, 即 $u=0$ 是问题 (1.1) 中 (a), (b) 的平衡解, 下面讨论它的稳定性.

定理 3.2.1 假设 $f(x,t,0)=0$, $g(x)=0$, 对任意 $0<\rho<\infty$, 有 $f\in C^1(Q_\infty\times[0,\rho])$.

(1) 设 $\rho>0$. 若存在常数 $\alpha>0$, 使得对任意 $(x,t)\in Q_\infty$, $0<\eta\leqslant\rho$, 有

$$f(x,t,\eta)\leqslant(\lambda_1-\alpha)\eta, \tag{2.1}$$

则对于任意的 $\varphi(x):0\leqslant\varphi(x)\leqslant\rho\varphi_1(x)$, 问题 (1.1) 存在唯一正的整体解 $u(x,t)$, 且有

$$0\leqslant u(x,t)\leqslant\rho e^{-\alpha t}\varphi_1(x),\quad (x,t)\in\bar{Q}_\infty.$$

(2) 若存在 $\alpha>0$, 使得对任意的 $(x,t)\in\bar{Q}_\infty$, $\eta\geqslant0$, 有

$$f(x,t,\eta)\geqslant(\lambda_1+\alpha)\eta, \tag{2.2}$$

则对于任意的 $\delta>0$, 只要 $\varphi(x)\geqslant\delta\varphi_1(x)$, 问题 (1.1) 存在唯一正解 $u(x,t)$，或定义在 $[0,\infty)$ 上或在有限时间内爆炸. 并且在存在区间上，$u(x,t)$ 还满足

$$u(x,t)\geqslant\delta e^{\alpha t}\varphi_1(x).$$

证明 (1) 取 $\bar{u}=\rho e^{-\alpha t}\varphi_1(x)$, 则

$$(\partial_t+L)\bar{u}=(\lambda_1-\alpha)\rho e^{-\alpha t}\varphi_1(x)\geqslant f(x,t,\bar{u}),$$
$$B\bar{u}|_{S_\infty}=0,\quad \bar{u}|_{t=0}=\rho\varphi_1(x)\geqslant\varphi(x),$$

即 $\bar{u}$ 是一个上解. 又 $\underline{u}=0$ 是一个下解. 因此存在唯一解 $u(x,t)$, 满足 $0\leqslant u(x,t)\leqslant\bar{u}(x,t)=\rho e^{-\alpha t}\varphi_1(x)$.

(2) 取 $\underline{u}=\delta e^{\alpha t}\varphi_1$, 同样计算可得

$$(\partial_t+L)\underline{u}=(\lambda_1+\alpha)\underline{u}\leqslant f(x,t,\underline{u}),$$
$$B\underline{u}|_{S_\infty}=0,\quad \underline{u}(x,0)=\delta\varphi_1\leqslant\varphi(x),$$

故 $\underline{u}$ 是一个下解. 根据定理 3.4.11 得结论. 证毕.

当 $Bu=\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+b(x)u$ 时, 在 $\bar{\Omega}$ 上 $\varphi_1(x)>0$, 于是 $\min\limits_{\bar{\Omega}}\varphi_1=\beta_0>0$. 所以, 当 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant\rho\beta_0$ 时, 有 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant\rho\varphi_1(x)$.

当 $Bu=u$ 时, 把 L 的系数开拓到 $\bar{\Omega}_1$ 上使之保持原有的光滑性, 其中 $\Omega_1\supset\bar{\Omega}$, Ω_1 是有界区域, $\partial\Omega_1$ 足够光滑. 考察特征值问题

$$Lu=\lambda u,\quad x\in\Omega_1;\quad Bu|_{\partial\Omega_1}=0. \tag{2.3}$$

任给 $0<\varepsilon<\alpha$, 可取 Ω_1 真包含 Ω, 使得问题 (2.3) 有最小特征值 $\lambda_1-\varepsilon$, 相应的特征函数为 $\phi_1(x)$. 同前面一样可证: 当条件 (2.1) 成立时, 对任意的 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant\rho\phi_1(x)$, 问题 (1.1) 存在唯一整体解 $u(x,t)$, 且有

$$0 \leqslant u(x,t) \leqslant \rho e^{-(\alpha-\varepsilon)t}\phi_1(x),$$

这里 $\phi_1(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 有正的最小值.

这样, 就得到下面的定理.

定理 3.2.2　设 $f(x,t,0)=0$, $g(x)=0$, $f \in C^1(Q_\infty \times [0,\infty))$. 若对于任意的 $\rho > 0$, 都存在常数 $\alpha = \alpha(\rho) > 0$, 使得对所有 $(x,t) \in \bar{Q}_\infty$ 和 $0 < \eta \leqslant \rho$ 有

$$f(x,t,\eta) \leqslant (\lambda_1 - \alpha)\eta,$$

则存在 $\delta = \delta(\rho) > 0$, 使得当 $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \delta$ 时, 问题 (1.1) 存在唯一正解 $u(x,t)$, 且有

$$|u(0,t)|_0 \leqslant \rho, \quad \lim_{t\to\infty} |u(\cdot,t)|_0 = 0.$$

在定理 3.2.1 中, 若条件 (2.1) 成立, 则 $u=0$ 在空间 $C^+(\bar{\Omega})$ 中是局部渐近稳定的; 若条件 (2.2) 成立, 则 $u=0$ 在空间 $C^+(\bar{\Omega})$ 中是不稳定的.

例 1　在热点火的简化模型中, 有一种模型可转化为求解下列问题

$$\begin{cases} (\partial_t + L)u = c(e^{au} - b), & (x,t) \in Q_\infty, \\ Bu \equiv \beta \dfrac{\partial u}{\partial n} + u = 0, & (x,t) \in S_\infty, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

其中 a, b, c 为正常数且 $b \leqslant 1$, 边界条件中的 β 为非负常数. 现在讨论 $b=1$ 的情形, 这时 $u=0$ 是问题 (2.4) 的一个常数平衡解.

(1) 设 $ca < \lambda_1$, 则存在 $\rho > 0$, 使得当 $(x,t) \in \bar{Q}_\infty$, $0 < \eta \leqslant \rho$ 时,

$$\frac{f(x,t,\eta)}{\eta} = \frac{e^{a\eta} - 1}{a\eta} ca < \lambda_1,$$

且

$$\frac{f(x,t,\eta)}{\eta} \leqslant \frac{e^{a\rho} - 1}{a\rho} ca.$$

取 α 使得

$$c(e^{a\rho} - 1)\rho^{-1} = \lambda_1 - \alpha,$$

则 $\alpha > 0$. 于是

$$f(x,t,\eta) \leqslant (\lambda_1 - \alpha)\eta, \quad (x,t) \in \bar{Q}_\infty, \quad \eta \in [0,\rho].$$

因此, 当 $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \rho\varphi_1(x)$ 时, 问题 (2.4) 有唯一解且满足

$$0 \leqslant u(x,t) \leqslant \rho e^{-\alpha t}\varphi_1(x), \quad (x,t) \in \bar{Q}_\infty,$$

所以 $u=0$ 是渐近稳定的.

(2) 设 $ca \geqslant \lambda_1$. 因为

$$\frac{f(x,t,\eta)}{\eta}=\frac{c(\mathrm{e}^{a\eta}-1)}{a\eta}a\geqslant ca,$$

所以当 $ca>\lambda_1$ 时, 由定理 3.2.1 知, $u=0$ 是不稳定的.

注 2.1 如果 $\beta>0$, 则当 $ca=\lambda_1$ 时, $u=0$ 也是不稳定的. 证明留作习题.

注 2.2 显然, 例 1 的结论 (2) 对 $0<b\leqslant 1$ 均成立.

注 2.3 用同样的方法可以对参数 c, a, b 的变化及吸引区域等进行类似的讨论而得到更多的结果, 有兴趣的读者可参看 [Pao1, Pao3].

定理 3.2.3 设 $u_s(x)$ 是问题 (1.2) 的平衡解, 又设存在 $\delta>0$, $0<\alpha<\lambda_1$, 使得当 $x\in\bar{\Omega}$, $u_s(x)-\delta\leqslant u\leqslant u_s(x)+\delta$ 时, $f\in C^1$ 且

$$\left|\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|\leqslant\lambda_1-\alpha.$$

则存在 $\rho>0$, $\alpha_1>0$, 当 $|\varphi(x)-u_s(x)|\leqslant\rho\varphi_1(x)$ 时, 问题 (1.2) 有唯一解 $u_\varphi(x,t)$, 满足

$$|u_\varphi(x,t)-u_s(x)|\leqslant\rho\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}\varphi_1(x).$$

证明留作练习.

例 2 在生态学、生物学中有一些简单的一维模型, 其形式为

$$\begin{cases} u_t-(D(x)u_x)_x=f(u), & (x,t)\in(0,l)\times\mathbb{R}_+,\\ Bu|_{x=0}=g_1, & Bu|_{x=l}=g_2,\\ u(x,0)=\varphi(x). \end{cases}\tag{2.5}$$

在不可逆的单酶反应中, f 的形式为

$$f(u)=-\frac{\sigma u}{1+Au},$$

其中 σ, A 为正常数, σ 充分小.

显然 $f(0)=0$. 当 $g_1=g_2=0$ 时, $u=0$ 是常数平衡解. 又设边值问题

$$\begin{cases} (D(x)u')'=\dfrac{\sigma u}{1+Au}, & 0<x<l,\\ Bu|_{x=0}=g_1, & Bu|_{x=l}=g_2 \end{cases}$$

有一非负解 $u_s(x)\neq 0$, 它是问题 (2.5) 的平衡解. 因为当 $u\geqslant 0$ 时,

$$|f_u|=\frac{\sigma}{(1+Au)^2}\leqslant\sigma,$$

若 $\sigma<\lambda_1$, 则由定理 3.2.3 知, 存在 $\rho>0$ 和 $\alpha_1>0$, 使得当 $|\varphi(x)-u_s(x)|\leqslant\rho\varphi_1(x)$ 时, 问题 (2.5) 存在唯一解 $u_\varphi(x,t)$, 且满足

$$|u_\varphi(x,t)-u_s(x)|\leqslant\rho\mathrm{e}^{-\alpha_1 t}\varphi_1(x).$$

这说明平衡解 $u_s(x)$ 是稳定的.

在核反应器动力学的研究中, 对于中子流密度的一个简单模型可取 $f(u)=-\sigma u^n$, 其中 $n\geqslant 1$, σ 为实常数. 对于该模型, 可证明类似的稳定性结果, 并且可以讨论 $\sigma<0, n>1$ 时的爆炸现象. 有兴趣的读者可以参看文献 [Pao2].

3.2.2 基于单调序列的稳定性判别法

设 $\bar\psi$, $\underline{\psi}$ 分别是边值问题

$$\begin{cases} Lu=f(x,u), & x\in\Omega, \\ u|_{\partial\Omega}=g(x) \end{cases} \tag{2.6}$$

的上、下解, 且满足 $\bar\psi\geqslant\underline{\psi}$. 若 $\underline{\psi}(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant\bar\psi(x)$, 则 $\bar\psi$, $\underline{\psi}$ 也分别是抛物型方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t+Lu=f(x,u), & (x,t)\in Q_\infty, \\ u=g(x), & (x,t)\in S_\infty, \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\Omega \end{cases} \tag{2.7}$$

的上、下解. 记 $m=\min\limits_{\bar\Omega}\underline{\psi}$, $M=\max\limits_{\bar\Omega}\bar\psi$. 如果 $f\in C^1(\bar\Omega\times[m,M])$, 则问题 (2.7) 存在唯一解 $u_\varphi(x,t)$ 满足

$$\underline{\psi}(x)\leqslant u_{\underline{\psi}}(x,t)\leqslant u_\varphi(x,t)\leqslant u_{\bar\psi}(x,t)\leqslant\bar\psi(x).$$

下面讨论函数 $u_{\bar\psi}$ 和 $u_{\underline{\psi}}$ 关于 t 的单调性以及当 $t\to\infty$ 时它们的极限.

引理 3.2.4　函数 $u_{\bar\psi}(x,t)$ 和 $u_{\underline{\psi}}(x,t)$ 关于 $t>0$ 分别单调下降和单调上升.

证明　显然, 当 $t>0$ 时, $u_{\bar\psi}(x,t)\leqslant\bar\psi(x)$. 于是对任意 $\delta>0$, $u_{\bar\psi}(x,\delta)\leqslant\bar\psi(x)$. 在 (2.7) 中取 $\varphi(x)=\bar\psi(x)$, 那么 $u_{\bar\psi}(x,t+\delta)$ 是问题 (2.7) 的下解, $u_{\bar\psi}(x,t)$ 是问题 (2.7) 的解, 所以

$$u_{\bar\psi}(x,t+\delta)\leqslant u_{\bar\psi}(x,t).$$

因此 $u_{\bar\psi}(x,t)$ 对 $t>0$ 单调下降. 证毕.

因为 $u_{\bar\psi}(x,t)$ 和 $u_{\underline{\psi}}(x,t)$ 关于 $t>0$ 单调且有界, 所以存在极限

$$\lim_{t\to\infty}u_{\bar\psi}(x,t)=U(x),\quad \lim_{t\to\infty}u_{\underline{\psi}}(x,t)=V(x).$$

下面证明 $U(x)$, $V(x)$ 是问题 (2.6) 的解.

引理 3.2.5　设 $u(x,t)$ 是问题 (2.7) 的解. 若存在极限 $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)=U(x)$, 则 $U(x)$ 是问题 (2.6) 的解.

证明　设 $\psi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ (表示 $\psi(x)$ 在 Ω 内无穷次可微且有紧支集), 则

$$\int_\Omega u_t\psi\mathrm{d}x=-\int_\Omega Lu\psi\mathrm{d}x+\int_\Omega f\psi\mathrm{d}x.$$

因为 ψ 有紧支集, 分部积分得

$$\int_\Omega u_t\psi \mathrm{d}x = -\int_\Omega uL^*\psi \mathrm{d}x + \int_\Omega f\psi \mathrm{d}x,$$

其中 L^* 是 L 的共轭算子, L^* 的定义域是 $\{u\in W_p^2(\Omega): u|_{\partial\Omega}=g\}$. 上式两边除以 T, 再从 0 到 T 对 t 积分得

$$\frac{1}{T}\int_0^T\int_\Omega u_t\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\frac{1}{T}\int_0^T\int_\Omega uL^*\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T\int_\Omega f\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{2.8}$$

因为 $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)=U(x)$, $\lim\limits_{t\to\infty} f(x,u(x,t))=f(x,U(x))$, 所以

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\mathrm{d}t = U(x), \quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x,u(x,t))\mathrm{d}t = f(x,U(x)).$$

由控制收敛定理知, 当 $T\to\infty$ 时, (2.8) 式右端的极限是

$$\int_\Omega[-UL^*\psi + f(x,U)\psi]\mathrm{d}x.$$

又因为当 $T\to\infty$ 时,

$$\frac{1}{T}\int_0^T\int_\Omega u_t\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_\Omega \frac{u(x,T)-u(x,0)}{T}\psi \mathrm{d}x \to 0,$$

所以

$$\int_\Omega[-UL^*\psi + f(x,U)\psi]\mathrm{d}x = 0. \tag{2.9}$$

这说明 $U(x)$ 是问题 (2.6) 的弱解.

再证明 U 是问题 (2.6) 的古典解. 由强极值原理知, 若

$$Lu=0, \quad x\in\Omega; \quad u|_{\partial\Omega}=0,$$

则 $u\equiv 0$, 即算子 L 是可逆的. 因为 L 的值域是 L_p, 所以算子 L^* 也可逆且 $(L^*)^{-1}=(L^{-1})^*$. 由 (2.9) 式得

$$\begin{aligned}\int_\Omega (L^*\psi)U\mathrm{d}x &= \int_\Omega f(x,U)\psi \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega f(x,U)L^*(L^*)^{-1}\psi \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega L^{-1}f(x,U)L^*\psi \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

故对任意 $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega [L^{-1}f(x,U)-U]L^*\psi \mathrm{d}x = 0.$$

于是

$$L^{-1}f(x,U)-U=0,\quad x\in\Omega. \tag{2.10}$$

因为 $U\in L_p(\Omega)$(任意 $p\geqslant 1$), 所以 $f(x,U(x))\in L_p(\Omega)$. 由定理 2.2.2 知, $L^{-1}f(x,U(x))\in W_p^2(\Omega)$, 即 $U\in W_p^2(\Omega)$. 由嵌入定理, $U\in C^{\alpha}(\bar\Omega)$, $f(x,U(x))\in C^{\alpha}(\bar\Omega)$. 再利用定理 2.2.2 知, $L^{-1}f(x,U(x))\in C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$, 即 $U\in C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$. 故可用算子 L 作用于方程 (2.10) 的两边, 进而得到

$$-LU+f(x,U)=0,\quad x\in\Omega.$$

显然有 $U|_{\partial\Omega}=g$. 因此 U 是问题 (2.6) 的古典解.

同理可证 V 也是问题 (2.7) 的古典解.

定理 3.2.6　设 $\bar\psi$, $\underline{\psi}$ 分别是问题 (2.6) 的上、下解, 当 $x\in\bar\Omega$ 时 $m\leqslant\underline{\psi}(x)\leqslant\bar\psi(x)\leqslant M$. 又设 $f\in C^1(\bar\Omega\times[m,M])$, 并且分别以 $\bar\psi$ 和 $\underline{\psi}$ 为初值的迭代序列 $T^n\bar\psi$ 和 $T^n\underline{\psi}$ 有相同的极限 w, 其中 T 是定理 2.3.2 中定义的映射. 那么 w 是问题 (2.6) 的解, 同时当 $\underline{\psi}\leqslant\varphi(x)\leqslant\bar\psi$ 时, 必有

$$\lim_{t\to\infty}u_{\varphi}(x,t)=w(x).$$

证明　当 $\underline{\psi}\leqslant\varphi\leqslant\bar\psi$ 时,

$$\underline{\psi}(x)\leqslant u_{\underline{\psi}}(x,t)\leqslant u_{\varphi}(x,t)\leqslant u_{\bar\psi}(x,t)\leqslant\bar\psi(x),$$

由引理 3.2.5 知, 存在极限

$$\lim_{t\to\infty}(u_{\bar\psi}(x,t),u_{\underline{\psi}}(x,t))=(U(x),V(x)),$$

并且 U 和 V 都是问题 (2.6) 的解, 同时还有

$$\underline{\psi}\leqslant V\leqslant U\leqslant\bar\psi.$$

由推论 2.3.3 得 $V=U=w$, 从而

$$\lim_{t\to\infty}u_{\varphi}(x,t)=w(x).$$

证毕.

注 2.4　已经知道存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}T^n\bar\psi=\overline{V}$, $\lim\limits_{n\to\infty}T^n\psi=\underline{V}$ 且 $\overline{V}\geqslant\underline{V}$. 在此基础上, 若能证明 $\overline{V}\leqslant\underline{V}$, 那么定理 3.2.6 可被应用.

注 2.5　对于第二、第三边界条件的情形也有类似的结论.

例 3　考察初边值问题

$$\begin{cases} u_t=\Delta u+\mu u-u^3, & (x,t)\in Q_\infty,\\ u=0, & (x,t)\in S_\infty,\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\bar\Omega, \end{cases} \tag{2.11}$$

其中 $\varphi(x)$ 满足单调方法的要求.

记特征值问题

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi, \quad x \in \Omega; \quad \varphi|_{\partial\Omega} = 0$$

的最小特征值为 λ_1, 相应的正特征函数为 φ_1. 特征值问题

$$-\Delta\psi = \mu\psi, \quad x \in \Omega_1; \quad \psi|_{\partial\Omega_1} = 0$$

的最小特征值为 μ_1, 相应的正特征函数为 ψ_1, 其中 $\Omega_1 \supset \bar{\Omega}$.

(1) 当 $\mu < \lambda_1$ 时, 存在常数 $K > 0$ 和 $\alpha > 0$, 使得问题 (2.11) 的解满足

$$|u(x,t)| \leqslant K\mathrm{e}^{-\alpha t} \max_{\bar{\Omega}} \psi_1(x).$$

证明参见 2.4.2 节的例 3.

(2) 当 $\mu > \lambda_1$ 时, 在定理 2.3.28 中证明了问题 (2.11) 存在唯一正的平衡解 u^+ 和唯一负的平衡解 u^-. 下面证明: 若 $\varphi(x) \geqslant 0\ (\leqslant 0)$, $\varphi(x) \not\equiv 0$, 则 (2.11) 存在唯一非负解 $u(x,t)$ (非正解 $u(x,t)$), 且满足

$$u(x,t) > 0\ (< 0), \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$
$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = u^+(x)\ (u^-(x)).$$

只对 $\varphi(x) \geqslant 0$, $\varphi(x) \not\equiv 0$ 的情形给出证明. 记问题 (2.11) 的解为 $u_\varphi(x,t)$. 对充分大的正常数 M 和充分小的正常数 δ, 函数 $\bar{\varphi} = Mu^+$ 和 $\underline{\varphi} = \delta\varphi_1$ 分别是问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u - u^3, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的上解与下解. 若存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$, 使得

$$\underline{\varphi}(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \bar{\varphi}(x),$$

则问题 (2.11) 存在唯一非负解 $u_\varphi(x,t)$, 满足

$$\underline{\varphi}(x) \leqslant u_{\underline{\varphi}}(x,t) \leqslant u_\varphi(x,t) \leqslant u_{\bar{\varphi}}(x,t) \leqslant \bar{\varphi}(x).$$

因为

$$\lim_{t\to\infty} u_{\bar{\varphi}}(x,t) = \lim_{t\to\infty} u_{\underline{\varphi}}(x,t) = u^+(x),$$

所以

$$\lim_{t\to\infty} u_\varphi(x,t) = u^+(x).$$

下面证明当 $\varphi(x) \geqslant 0$, $\varphi(x) \not\equiv 0$ 时, 上式也成立. 利用强极值原理和 Hopf 边界点引理 (导数形式的最大值原理) 可证, 当 $x \in \Omega$, $t > 0$ 时, $u_\varphi(x,t) > 0$, 并且当 $t > 0$ 时, $\left.\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega} < 0$. 令 $u_\varphi(x,\sigma) = \varphi^*(x)$, 其中 $\sigma > 0$ 为常数, 则有

$$\varphi^*|_\Omega > 0, \quad \varphi^*|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial \varphi^*}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} < 0.$$

于是存在 $\delta > 0$ 充分小, $M > 0$ 充分大, 使得

$$\underline{\varphi}(x) = \delta\varphi_1(x) \leqslant \varphi^*(x) \leqslant Mu^+(x) = \bar{\varphi}(x),$$

见习题 3.3. 因此

$$\lim_{t\to\infty} u_{\varphi*}(x,t) = u^+(x).$$

又因为

$$u_{\varphi^*}(x,t) = u_\varphi(x, t+\sigma),$$

故

$$\lim_{t\to\infty} u_\varphi(x,t) = u^+(x).$$

证毕.

例 4 设 $\bar{u}$ 是边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = u^2, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.12}$$

的任一解. 因为 $\Delta\bar{u} = -\bar{u}^2 \leqslant 0$, $\bar{u}|_{\partial\Omega} = 0$, 由极值原理得 $\bar{u} \geqslant 0$. 若 $\bar{u} \not\equiv 0$, 令 $\varphi = \varepsilon\bar{u}$, $\varepsilon > 0$, 则有

$$-\Delta\varphi - \varphi^2 = \varepsilon(1-\varepsilon)\bar{u}^2, \quad x \in \Omega.$$

若取 $\varepsilon > 1$, 则 $\varphi = \varepsilon\bar{u}$ 是问题 (2.12) 的下解. 记 $u_\varepsilon(x,t)$ 是初边值问题

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^2, & (x,t) \in Q_\infty, \\ u = 0, & (x,t) \in S_\infty, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

的解, 则 $u_\varepsilon(x,t)$ 对 t 单调上升. 因此, $\bar{u}$ 不是渐近稳定的.

3.3 初值问题常数平衡解的稳定性

3.3.1 基本引理

假设 $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$. 初值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, & \text{(a)} \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} & \text{(b)} \end{cases} \tag{3.1}$$

的解记为 $u_\varphi(x,t)$. 现给出充分条件使得

$$\lim_{t\to\infty} u_\varphi(x,t) = \tau(x),$$

而 $\tau(x)$ 是问题 (3.1) 中 (a) 的平衡解.

先引述关于解的导数的内估计的结论.

引理 3.3.1 设 $u(x,t)$ 是 (3.1) 中 (a) 的解. 若存在常数 $M>0$, 使得 $|u(x,t)|\leqslant M$ $(t\geqslant 0, x\in\mathbb{R})$, 则对任意 $A>0$, $\delta>0$, 存在常数 $M_1>0$, 使得当 $x\in[-A,A]$, $t\in[\delta,\infty]$ 时,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\leqslant M_1,\quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|\leqslant M_1,\quad \sup_{\substack{-A\leqslant x,y\leqslant A\\ \delta\leqslant t,s\leqslant\infty\\ (x,t)\neq(y,s)}}\frac{|u_{xx}(x,t)-u_{xx}(y,s)|}{|x-y|^\alpha+|t-s|^{\alpha/2}}\leqslant M_1.$$

证明 先利用文献 [LSU] 中第 3 章定理 10.1 得到 u 的 C^α 模估计, 再利用文献 [Fr] 第 3 章定理 5 即得结论. 这里略去细节.

引理 3.3.2 设问题 (3.1) 的解 $u_\varphi(x,t)$ 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 上有界且对 t 单调上升 (下降), 则存在极限 $\lim\limits_{t\to\infty}u_\varphi(x,t)=\tau(x)$ (在 $\mathbb{R}$ 的每个有界闭区间上一致成立), $\tau(x)$ 是问题 (3.1) 中 (a) 的平衡解, 且是 $\mathbb{R}$ 上满足

$$\tau(x)\geqslant\varphi(x)\quad(\tau(x)\leqslant\varphi(x))$$

的最小平衡解 (最大平衡解).

证明 不妨设 $u_\varphi(x,t)=u(x,t)$ 对 t 单调上升, 那么存在极限 $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)=\tau(x)$ 是显然的.

任取 $A>0$, $t_n\to\infty$, 由引理 3.3.1 知, 序列 $\{u(x,t_n)\}$, $\{u_x(x,t_n)\}$ 和 $\{u_{xx}(x,t_n)\}$ 在 $[-A,A]$ 上一致有界且等度连续. 再由 Arzela 定理, 必有子列 $t'_n\to\infty$ 和函数 $w(x)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}u(x,t'_n)=w(x),\quad \lim_{n\to\infty}u_x(x,t'_n)=w'(x),\quad \lim_{n\to\infty}u_{xx}(x,t'_n)=w''(x)$$

在 $[-A,A]$ 上一致成立. 显然 $w(x)=\tau(x)$, 而且与 t_n 无关. 因此

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=\tau(x),\quad \lim_{t\to\infty}u_{xx}(x,t)=\tau''(x).$$

对 u 满足的方程两边取极限得

$$\lim_{t\to\infty}u_t=\tau''(x)+f(\tau(x))=0,\quad x\in[-A,A].$$

再由 A 的任意性知, $\tau(x)$ 是问题 (3.1) 中 (a) 的平衡解.

若 $\sigma(x)\geqslant\varphi(x)$ 是问题 (3.1) 中 (a) 的平衡解, 由比较原理知 $\sigma(x)\geqslant u_\varphi(x,t)$. 再令 $t\to\infty$ 得 $\sigma(x)\geqslant\tau(x)$. 证毕.

在什么条件下, 函数 $u_\varphi(x,t)$ 对 t 单调有界? 不难证明

引理 3.3.3 设 $\varphi(x)$ 是问题 (3.1) 中 (a) 的上解 (下解), $f\in C^1$. 则对任意固定的 x, 问题 (3.1) 的解 $u_\varphi(x,t)$ 对 t 单调下降 (上升).

利用引理 3.3.2 与 3.3.3 易证下面的结论.

推论 3.3.4　设问题 (3.1) 中 (a) 存在有界的上、下解 $\bar{\varphi}$ 和 $\underline{\varphi}$, 并且 $\underline{\varphi} \leqslant \bar{\varphi}, f \in C^1$. 我们有

(1) 问题 (3.1) 中 (a) 存在平衡解 $\bar{\tau}(x)$ 和 $\underline{\tau}(x)$, 并且 $\bar{\tau}(x)$ 是不大于 $\bar{\varphi}(x)$ 的最大平衡解, $\underline{\tau}(x)$ 是不小于 $\underline{\varphi}(x)$ 的最小平衡解, 同时还有 $\underline{\tau}(x) \leqslant \bar{\tau}(x)$.

(2) 对任意 $\varphi \in C(\mathbb{R})$. 若 $\underline{\varphi}(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \bar{\varphi}(x)$, 那么问题 (3.1) 必有唯一解 $u_\varphi(x,t)$, 并且满足

$$\underline{\varphi}(x) \leqslant u_\varphi(x,t) \leqslant \bar{\varphi}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0.$$

又若 $\underline{\varphi}(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \underline{\tau}(x)$, 必有

$$\lim_{t\to\infty} u_\varphi(x,t) = \underline{\tau}(x).$$

若 $\bar{\tau}(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \bar{\varphi}(x)$, 必有

$$\lim_{t\to\infty} u_\varphi(x,t) = \bar{\tau}(x).$$

若在 $[\underline{\varphi}, \bar{\varphi}]$ 中问题 (3.1) 中 (a) 有唯一平衡解 $\tau(x)$, 则

$$\lim_{t\to\infty} u_\varphi(x,t) = \tau(x).$$

这样, 讨论平衡解的存在性与稳定性就转化为寻求上、下解 $\bar{\varphi}(x)$ 和 $\underline{\varphi}(x)$ 及讨论平衡解的唯一性, 或者直接讨论比较函数 $u_{\bar{\varphi}}$ 与 $u_{\underline{\varphi}}$ 的极限.

下面介绍一种构造比较函数的方法.

引理 3.3.5　设 $f \in C^1[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $q(x) \in C[a,b]$ 是问题

$$\begin{cases} q'' + f(q) = 0, \quad a < x < b, \\ q(a) = q(b) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

的解, 并且当 $x \in [a,b]$ 时 $q(x) \in [0,1]$. 则初值问题

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + f(v), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ v(x,0) = \begin{cases} q(x), & x \in (a,b), \\ 0, & x \notin (a,b) \end{cases} \end{cases}$$

存在唯一解 $v(x,t) \in [0,1]$, 它对 t 单调上升, 并且在 $\mathbb{R}$ 的每个有界闭区间上

$$\lim_{t\to\infty} v(x,t) = \tau(x)$$

一致成立, 其中 $\tau(x)$ 是问题

$$\tau'' + f(\tau) = 0$$

的在整个 $\mathbb{R}$ 上满足

$$\tau(x) \geqslant q(x), \quad x \in (a,b)$$

的最小非负解.

证明 只需证 $v(x,t)$ 对 t 单调上升.

因为在 $x=a,b$ 处, $v(x,t)\geqslant 0$, 在 $[a,b]\times[0,\infty)$ 上利用比较原理得 $v(x,t)\geqslant q(x)$, 从而对任意 $h>0$, 有

$$v(x,h)\geqslant v(x,0),\quad x\in(-\infty,\infty).$$

再利用比较原理得

$$v(x,t+h)\geqslant v(x,t),\quad x\in\mathbb{R},\quad t\geqslant 0,$$

即 $v(x,t)$ 对 t 单调上升. 证毕.

这里的函数

$$\underline{q}(x)=\begin{cases} q(x), & x\in(a,b),\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases}$$

起到了下解的作用 (实际上, 它是一个广义下解), 利用它可以构造出对 t 单调上升的比较函数 $v(x,t)$, 并证明平衡解的存在性.

下面讨论这种 $q(x)$, 即边值问题 (3.2) 解的存在性. 假设:

$$\begin{cases} f\in C^1[0,1], \quad f(0)=0, \quad f'(0)>0,\\ 0<a<1, \quad 当\ u\in(0,a)\ 时\ f(u)>0. \end{cases} \tag{3.3}$$

平衡解方程 $q''+f(q)=0$ 的第一积分是

$$\frac{1}{2}(q')^2+F(q)=K,$$

其中 K 是任意常数, $F(q)=\int_0^q f(s)\mathrm{d}s$. 对任意 $\varepsilon\in(0,a)$, $F(q)$ 在 $(0,\varepsilon)$ 上严格上升, 更有 $F(\varepsilon)>0$. 因为 $F'(\varepsilon)=f(\varepsilon)>0$, 所以

$$b_\varepsilon=\sqrt{2}\int_0^\varepsilon\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{F(\varepsilon)-F(t)}}<\infty. \tag{3.4}$$

由此推得, 对任意 $\varepsilon\in(0,a)$, 初值问题

$$\begin{cases} q''+f(q)=0 \quad \left(\dfrac{1}{2}(q')^2+F(q)=F(\varepsilon)\right),\\ q(0)=0, \quad q'(0)=\sqrt{2F(\varepsilon)} \end{cases}$$

在 $[0,b_\varepsilon]$ 上有正解 $q_\varepsilon(x)$:

$$\int_0^{q_\varepsilon(x)}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2(F(\varepsilon)-F(t))}}=x,\quad x\in\left[0,\frac{1}{2}b_\varepsilon\right],$$

并且 $q_\varepsilon(x)$ 关于 $x=\dfrac{1}{2}b_\varepsilon$ 是对称的. 于是

$$0\leqslant q_\varepsilon(x)\leqslant\varepsilon,\quad q_\varepsilon(0)=q_\varepsilon(b_\varepsilon)=0.$$

引理 3.3.6 设 f 满足条件 (3.3), 则对任意的 $\varepsilon: 0<\varepsilon<a$, 存在 b_ε (由 (3.4) 式给出), 使得

(1) 边值问题

$$\begin{cases} q''+f(q)=0, & 0<x<b_\varepsilon,\\ q(0)=0, & q(b_\varepsilon)=0\end{cases}$$

存在解 $q_\varepsilon(x)$, 它关于 $x=\dfrac{1}{2}b_\varepsilon$ 对称, 且有 $0\leqslant q_\varepsilon(x)\leqslant\varepsilon$;

(2) $\lim\limits_{\varepsilon\to0+}b_\varepsilon=\dfrac{\pi}{\sqrt{f'(0)}}$.

证明 结论 (1) 已经推出, 下面证明结论 (2). 在 (3.4) 式中令 $t=\varepsilon\tau$, 则有

$$b_\varepsilon=\sqrt{2}\int_0^1\frac{\varepsilon}{\sqrt{F(\varepsilon)-F(\varepsilon\tau)}}\mathrm{d}\tau.$$

利用 L'Hospital 法则得

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\varepsilon^2}{F(\varepsilon)-F(\varepsilon\tau)}=\frac{2}{(1-\tau^2)f'(0)},$$

从而

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\varepsilon}{\sqrt{F(\varepsilon)-F(\varepsilon\tau)}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1-\tau^2)f'(0)}}.$$

把 $F(\varepsilon)$ 和 $F(\varepsilon\tau)$ 在零点做二阶展开, 并注意到 $f'(0)>0$, 易证存在 $\varepsilon_0>0$ 和正常数 $C=C(\varepsilon_0)$, 使得当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时, 有

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{F(\varepsilon)-F(\varepsilon\tau)}}\leqslant\frac{C}{\sqrt{1-\tau^2}},\quad \forall\, 0<\tau<1.$$

由控制收敛定理得

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0^+}b_\varepsilon&=\sqrt{2}\int_0^1\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\varepsilon}{\sqrt{F(\varepsilon)-F(\varepsilon\tau)}}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{2}{\sqrt{f'(0)}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{\pi}{\sqrt{f'(0)}}.\end{aligned}$$

证毕.

3.3.2 常数平衡解的 $\mathring{C}$ 稳定性

设 $u=u_0$ 是问题 (3.1) 中 (a) 的常数平衡解, 则 $u=u_0$ 是常微分方程

$$u'(t)=f(u) \tag{3.5}$$

的平衡点. 下面讨论两者稳定性之间的关系.

定理 3.3.7 设 $f\in C^1$, $f(u_0)=0$. 那么 $u=u_0$ 是问题 (3.1) 中 (a) 的 $\mathring{C}$ 稳定 (渐近稳定) 平衡解的充要条件是: $u=u_0$ 是常微分方程 (3.5) 的稳定 (渐近稳定) 平衡点.

证明 设 $u=u_0$ 是常微分方程 (3.5) 的稳定平衡点, 则对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $u_\pm(0)=u_0\pm\delta$ 时, 对应的 (3.5) 的解 $u_\pm(t)$ 定义于 $[0,\infty)$, 且满足

$$|u_\pm(t)-u_0|<\varepsilon.$$

于是, 若 $\varphi(x)\in\mathring{C}(-\infty,\infty)$, $|\varphi(x)-u_0|\leqslant\delta$, 则 $u_\pm(t)$ 分别是问题 (3.1) 的上、下解. 因而问题 (3.1) 存在解 $u_\varphi(x,t)$ 满足

$$u_-(t)\leqslant u_\varphi(x,t)\leqslant u_+(t),$$

从而

$$-\varepsilon<u_-(t)-u_0<u_\varphi(x,t)-u_0<u_+(t)-u_0<\varepsilon.$$

这说明 $u=u_0$ 是问题 (3.1) 中 (a) 的 $\mathring{C}$ 稳定平衡解.

现设 $u=u_0$ 是问题 (3.1) 中 (a) 的 $\mathring{C}$ 稳定平衡解. 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\varphi(x)\in\mathring{C}(-\infty,\infty)$ 且 $|\varphi(x)-u_0|<\delta$ 时, 对一切 $t>0$ 有 $|u_\varphi(x,t)-u_0|<\varepsilon$. 当 $|z_0-u_0|<\delta$ 时, 取 $\varphi(x)=z_0$. 由唯一性知, $u_\varphi(x,t)=u(t,z_0)$, 其中 $u(t,z_0)$ 是常微分方程 (3.5) 取初值 $u(0)=z_0$ 的解. 于是

$$\|u_\varphi(x,t)-u_0\|=|u(t,z_0)-u_0|<\varepsilon,$$

即 $u=u_0$ 是常微分方程 (3.5) 的稳定平衡点. 另一结论类似可证. 证毕.

定理 3.3.7 没有回答问题 (3.1) 中 (a) 的常数平衡解的吸引区域. 下面, 对某些类型的方程讨论这个问题.

假定: $f\in C^1[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$, 并分别考虑以下情形:

(1) 当 $u\in(0,1)$ 时,

$$f(u)>0; \tag{3.6}$$

(2) $0<a<1$,

$$\text{当 } u\in(0,a) \text{ 时 } f(u)>0, \quad \text{当 } u\in(a,1) \text{ 时 } f(u)<0; \tag{3.7}$$

(3) $0<a<1$,

$$\text{当 } u \in [0,a) \text{ 时 } f(u) < 0, \quad \text{当 } u \in (a,1) \text{ 时 } f(u) > 0. \tag{3.8}$$

引理 3.3.8　设 $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$.

(1) 若 $f(\alpha) = 0$, $u \in (\alpha, \beta]$ 时 $f(u) < 0$, 则当 $z_0 \in [\alpha, \beta]$ 时,

$$\lim_{t \to \infty} u(t, z_0) = \alpha;$$

(2) 若 $f(\beta) = 0$, $u \in [\alpha, \beta)$ 时 $f(u) > 0$, 则当 $z_0 \in [\alpha, \beta]$ 时,

$$\lim_{t \to \infty} u(t, z_0) = \beta.$$

这里, $u(t, z_0)$ 是常微分方程 (3.5) 取初值 $u(0) = z_0$ 的解.

证明留给读者.

利用引理 3.3.8 可以直接推出下面的定理.

定理 3.3.9　(1) 设 f 满足 (3.6), 常数 $\beta \in (0,1)$. 则当 $\beta \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ 时, 问题 (3.1) 存在唯一解 $u_\varphi(x,t)$, 并有

$$\lim_{t \to \infty} u_\varphi(x,t) = 1$$

关于 $x \in \mathbb{R}$ 一致成立;

(2) 设 f 满足 (3.7), 常数 $\beta \in (0, 1-a)$. 则当 $a \leqslant \varphi(x) \leqslant 1 - \beta$ 时, 问题 (3.1) 存在唯一解 $u_\varphi(x,t)$, 并有

$$\lim_{t \to \infty} u_\varphi(x,t) = a$$

关于 $x \in \mathbb{R}$ 一致成立;

(3) 设 f 满足 (3.8), 常数 $\beta : 0 < \beta < \min\{a, 1-a\}$. 则当 $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant a - \beta$ 时, 问题 (3.1) 存在唯一解 $u_\varphi(x,t)$, 并有

$$\lim_{t \to \infty} u_\varphi(x,t) = 0$$

关于 $x \in \mathbb{R}$ 一致成立. 而当 $a + \beta \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ 时, 问题 (3.1) 存在唯一解 $u_\varphi(x,t)$, 并有

$$\lim_{t \to \infty} u_\varphi(x,t) = 1$$

关于 $x \in \mathbb{R}$ 一致成立.

3.3.3　常数平衡解 (逐点收敛意义下) 的稳定性

现在适当加强非线性函数 f 的条件, 放宽初始函数 φ 的条件, 使得 $t \to \infty$ 时, $u_\varphi(x,t)$ 趋于 $a, 0$ 或 1.

先证明一个引理.

引理 3.3.10　设 f 满足 (3.7), $\tau(x)$ 是

$$q'' + f(q) = 0$$

的不恒为零的非负解, 则 $\tau(x) \geqslant a$.

证明 首先断言: $\tau(x) > 0$. 事实上, 如果存在 x^* 使得 $\tau(x^*) = 0$, 因为 $\tau(x)$ 非负, 所以 $\tau'(x^*) = 0$, 由解的唯一性得 $\tau(x) \equiv 0$. 此与 $\tau(x) \not\equiv 0$ 的条件矛盾.

如果 $\tau(x) \geqslant a$ 不成立, 则存在 x_0 使得 $0 < \tau(x_0) = \beta < a$. 因为 $\tau(x)$ 满足

$$\frac{1}{2}(\tau')^2 + F(\tau) = k,$$

其中常数 $k \geqslant F(\beta)$. 又 $[k - F(t)]^{-\frac{1}{2}}$ 在 $[0, \beta]$ 上可积, 所以 $\tau(x)$ 满足

$$x = x_0 \pm \int_{\tau(x)}^{\beta} [2(k - F(t))]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t,$$

其中 "±" 由 $\tau'(x_0)$ 的符号决定. 因为 $\int_0^{\beta} [2(k - F(t))]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t$ 收敛, 利用解的延拓定理知, 存在 $\tilde{x}$ 使得

$$\tilde{x} - x_0 = \pm \int_{\tau(\tilde{x})=0}^{\beta} [2(k - F(t))]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t.$$

由于 $\tau(x) \geqslant 0$, 故 $\tau'(\tilde{x}) = 0$. 由唯一性得 $\tau(x) \equiv 0$, 与已知 $\tau(x) \not\equiv 0$ 矛盾. 因此 $\tau(x) \geqslant a$. 证毕.

定理 3.3.11 设 f 满足 (3.7) 且 $f'(0) > 0, f'(1) > 0$. 若 $\varphi(x) \in C(-\infty, \infty)$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$, 并且 $\varphi(x) \not\equiv 0$, $\varphi(x) \not\equiv 1$, 则问题 (3.1) 存在唯一解 $u_\varphi(x, t)$, 且满足

$$\lim_{t \to \infty} u_\varphi(x, t) = a.$$

证明 前面已经指出, 在 $(0, b_\varepsilon)$ 上存在非负平衡解 $q_\varepsilon(x)$:

$$0 \leqslant q_\varepsilon(x) \leqslant \varepsilon, \quad q_\varepsilon(0) = q_\varepsilon(b_\varepsilon) = 0.$$

显然 (3.1) 存在唯一解 $u_\varphi(x, t)$, 且满足 $0 \leqslant u_\varphi(x, t) \leqslant 1$.

因为 $\varphi(x) \not\equiv 0$, 对任意 $h > 0$ 有 $u_\varphi(x, h) > 0$. 由定理 3.3.6 知, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 当 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 时, $b_\varepsilon < \dfrac{2\pi}{\sqrt{f'(0)}}$. 取定 $H > \dfrac{2\pi}{\sqrt{f'(0)}}$ 及 $h > 0$, 则 $\min\limits_{[-H, H]} u_\varphi(x, h) = \delta > 0$. 再取 $0 < \varepsilon \leqslant \min\{\varepsilon_0, \delta\}$, 则在 $[0, b_\varepsilon]$ 上

$$u_\varphi(x, h) \geqslant \delta \geqslant \varepsilon \geqslant q_\varepsilon(x),$$

在 $(-\infty, \infty)$ 上

$$u_\varphi(x, h) \geqslant \bar{q}_\varepsilon(x) = \begin{cases} q_\varepsilon(x), & x \in (0, b_\varepsilon), \\ 0, & x \notin (0, b_\varepsilon). \end{cases}$$

由比较定理及基本引理 (引理 3.3.5) 得

$$u_\varphi(x,t+h) \geqslant u_{\bar{q}_\varepsilon}(x,t),$$
$$\lim_{t\to\infty}\inf u_\varphi(x,t) \geqslant \lim_{t\to\infty} u_{\bar{q}_\varepsilon}(x,t) = \tau(x),$$

其中 $\tau(x)$ 是方程 $q''+f(q)=0$ 的解, 并且 $\tau(x) \geqslant q_\varepsilon(x)$, $x \in (0,b_\varepsilon)$. 再由引理 3.3.10 知 $\tau(x) \geqslant a$. 因此,

$$\lim_{t\to\infty}\inf u_\varphi(x,t) \geqslant a. \tag{3.9}$$

因为 $\varphi(x) \not\equiv 1$, 令 $\varphi_0 = 1-\varphi$, $v = 1-u_\varphi(x,t)$. 那么 $\varphi_0 \not\equiv 0$, $0 \leqslant \varphi_0 \leqslant 1$, v 满足

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + f_0(v), & (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \\ v(x,0) = \varphi_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

其中 $f_0(v) = -f(1-v)$. 显然 f_0 满足

$$f_0(0) = 0, \quad f_0'(0) = f'(1) > 0,$$

$$\text{当 } v \in (0,1-a) \text{ 时}, \quad f_0(v) > 0,$$
$$\text{当 } v \in (1-a,1) \text{ 时}, \quad f_0(v) < 0.$$

利用上面已经证得的结论可知

$$\begin{aligned} 1-a \leqslant &\lim_{t\to\infty}\inf v(x,t) = 1 + \lim_{t\to\infty}\inf(-u_\varphi) \\ = &1 - \lim_{t\to\infty}\sup u_\varphi(x,t), \end{aligned}$$

故

$$\lim_{t\to\infty}\sup u_\varphi(x,t) \leqslant a. \tag{3.10}$$

结合 (3.9) 和 (3.10) 得

$$\lim_{t\to\infty}\sup u_\varphi(x,t) = \lim_{t\to\infty}\inf u_\varphi(x,t) = a,$$

即

$$\lim_{t\to\infty} u_\varphi(x,t) = a.$$

证毕.

利用定理 3.3.11 可以证明

定理 3.3.12　设 f 满足 (3.6) 且 $f'(0) > 0$. 若 $\varphi(x) \in C(-\infty,\infty)$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$, $\varphi(x) \not\equiv 0$, 则问题 (3.1) 存在唯一解 $u_\varphi(x,t)$, 且满足

$$\lim_{t\to\infty} u_\varphi(x,t) = 1.$$

证明留作练习.

定理 3.3.13 设 f 满足 (3.8). 若 $\varphi(x) \in C(-\infty,\infty)$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$, 并且对某个 $0 \leqslant \rho < a$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x)-\rho]^+ \mathrm{d}x < \left(\frac{2\pi}{s(\rho)\mathrm{e}}\right)^{1/2} (a-\rho),$$

其中

$$s(\rho) = \sup_{u\in(a,1)} \frac{f(u)}{u-\rho}, \quad [\mu]^+ = \max\{\mu, 0\},$$

则问题 (3.1) 有唯一解 $u_\varphi(x,t)$, 且满足

$$\lim_{t\to\infty} u_\varphi(x,t) = 0 \ (\text{对 } x \in \mathbb{R} \text{ 一致成立}).$$

证明 因为 $\rho \in [0,a)$, 所以 $s(\rho) > 0$. 令 $w(x,t)$ 是

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} + s(\rho)w, & (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \\ w(x,0) = [\varphi(x)-\rho]^+ \geqslant 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

的解, 则 $\tilde{w} = w\mathrm{e}^{-s(\rho)t}$ 满足

$$\begin{cases} \tilde{w}_t = \tilde{w}_{xx}, & (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \\ \tilde{w}(x,0) = [\varphi(x)-\rho]^+, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

由 Poisson 公式, 得

$$w = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{s(\rho)t} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(\xi)-\rho]^+ \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \mathrm{d}\xi. \tag{3.11}$$

由于当 $u > \rho$ 时 $s(\rho) \geqslant \dfrac{f(u)}{u-\rho}$, 令 $u(x,t) = u_\varphi(x,t), v(x,t) = u(x,t) - \rho$, 则有

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} - s(\rho)[v]^+ &\leqslant u_t - u_{xx} - f(u) \\ &= 0 = w_t - w_{xx} - s(\rho)w. \end{aligned}$$

记 $D=\{(x,t): v(x,t) > 0\}$. 对于区域 D, 比较原理仍然成立 ([Fr] 的第 2 章), 于是

$$[v(x,t)]^+ \leqslant w(x,t),$$

即

$$u(x,t) \leqslant w(x,t) + \rho.$$

再由 (3.11) 得

$$u\left(x, \frac{1}{2s(\rho)}\right) \leqslant w\left(x, \frac{1}{2s(\rho)}\right) + \rho \leqslant \left(\frac{s(\rho)\mathrm{e}}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x)-\rho]^+ \mathrm{d}x + \rho.$$

根据已知条件,

$$\left(\frac{s(\rho)\mathrm{e}}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)-\rho]^{+}\mathrm{d}x<a-\rho.$$

于是存在 $\varepsilon\in(0,a)$, 使得

$$u\left(x,\frac{1}{2s(\rho)}\right)\leqslant a-\varepsilon,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

记 $t_0=\dfrac{1}{2s(\rho)}$, 则 $0\leqslant u(x,t_0)<a-\varepsilon$, $\forall x\in\mathbb{R}$. 由定理 3.3.9 的 (3) 得

$$\lim_{t\to\infty}u_{\varphi}(x,t)=0\quad 对\ x\in\mathbb{R}\ 一致成立.$$

证毕.

现在假定 f 满足: $f\in C^1[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$, 当 $u\in(0,a)$ 时 $f(u)\leqslant 0$; 当 $u\in(a,1)$ 时 $f(u)>0$, 并且

$$\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u>0. \tag{3.12}$$

故存在 $k\in[a,1)$, 使得

$$F(k)=\int_0^k f(t)\mathrm{d}t=0,$$

而且对 $q\in(k,1)$, 有 $F(q)>0$, $F'(q)=f(q)>0$.

对任意 $\beta\in(k,1)$, 定义

$$b_\beta=\int_0^\beta\frac{1}{\sqrt{2[F(\beta)-F(s)]}}\mathrm{d}s,$$

显然它收敛. 考虑初值问题

$$\begin{cases} q''+f(q)=0, & x\in\mathbb{R},\\ q(0)=\beta, \quad q'(0)=0.\end{cases} \tag{3.13}$$

由方程的第一积分和 b_β 的定义知, 问题 (3.13) 在 $[-b_\beta,b_\beta]$ 上有解 $q_\beta(x)$, 且满足

$$q_\beta(-b_\beta)=q_\beta(b_\beta)=0,\quad 0\leqslant q_\beta(x)\leqslant\beta,$$

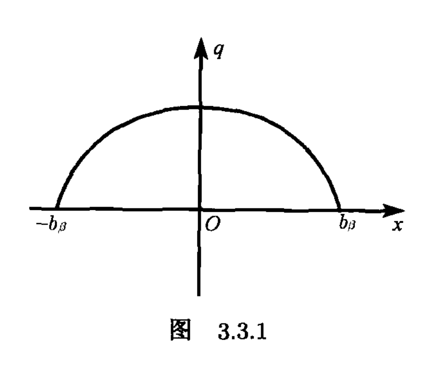


图 3.3.1

见图 3.3.1. 由于问题 (3.13) 是自治系统, 所以它的解具有平移不变性. 因此, $q_\beta(x-x_0)$ 是问题

$$\begin{cases} q''+f(q)=0,\\ q(x_0)=\beta, \quad q'(x_0)=0\end{cases}$$

的解, 并且满足

$$0 \leqslant q_\beta(x-x_0) \leqslant \beta, \quad x \in [x_0-b_\beta, x_0+b_\beta],$$
$$q_\beta(x-x_0)|_{x=x_0\pm b_\beta} = 0.$$

借助于这个函数可得下面的定理.

定理 3.3.14 设 f 满足条件 (3.12), $\varphi(x) \in C(-\infty,\infty)$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$, 并且

$$\varphi(x) \geqslant \begin{cases} q_\beta(x-x_0), & x \in (x_0-b_\beta, x_0+b_\beta), \\ 0, & x \notin (x_0-b_\beta, x_0+b_\beta). \end{cases}$$

则问题 (3.1) 存在唯一解 $u_\varphi(x,t)$, 并且满足

$$\lim_{t\to\infty} u_\varphi(x,t) = 1.$$

证明 首先, 初值问题

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + f(v), \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \\ v(x,0) = \begin{cases} q_\beta(x-x_0), & x \in (x_0-b_\beta, x_0+b_\beta), \\ 0, & x \notin (x_0-b_\beta, x_0+b_\beta) \end{cases} \end{cases}$$

有唯一解 $v(x,t)$. 由引理 3.3.5 知, 极限

$$\lim_{t\to\infty} v(x,t) = \tau(x)$$

存在, 并且 $\tau(x)$ 是方程 $q''+f(q)=0$ 在 $\mathbb{R}$ 上满足 $\tau(x) \geqslant q_\beta(x-x_0)$ ($x \in [x_0-b_\beta, x_0+b_\beta]$) 的最小非负解.

易知

$$v(x,t) \leqslant u_\varphi(x,t) \leqslant 1,$$

所以

$$q_\beta(x-x_0) \leqslant \tau(x) = \lim_{t\to\infty} v(x,t) \leqslant \lim_{t\to\infty} \inf u_\varphi(x,t) \leqslant \lim_{t\to\infty} \sup u_\varphi(x,t) \leqslant 1.$$

类似于引理 3.3.10, 可证 $\tau(x) \equiv 1$. 因此

$$\lim_{t\to\infty} u_\varphi(x,t) = 1.$$

证毕.

证明定理 3.3.11 及定理 3.3.14 时, 利用了同一种方法: 先分别构造平衡解 $q_\varepsilon(x)$ 和 $q_\beta(x-x_0)$ 及其相应的初值问题, 然后利用基本引理及比较方法证明稳定性并确定吸引区域. 这种方法在文献中被称为 Aronson-Weinberger 技巧.

3.4　方程组初边值问题常数平衡解的稳定性

讨论带有齐次 Neumann 边界条件的抛物型方程组初边值问题常数平衡解的稳定性, 也可以采用上、下解方法中的迭代思想, 从方程式出发构造迭代序列. 如果是 m 个方程构成的方程组, 就有 $2m$ 个迭代序列, 一组称为上序列, 一组称为下序列, 证明迭代序列收敛, 并且上序列与下序列有相同的极限. 仅以下面的问题

$$\begin{cases} u_t - d_1\Delta u = u^2\left(\dfrac{m}{mu+v} - k\right), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ v_t - d_2\Delta v = -av - bv^2 + \dfrac{uv}{mu+v}, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

为例, 其中 k, m 和 a 都是正常数, b 是非负常数, $u_0(x)$ 和 $v_0(x)$ 都是非负函数. 该问题的物理背景可以参看文献 [PaW3].

容易看出, 当且仅当 $ma < 1$ 时, 问题 (4.1) 有正常数平衡解, 记为 $(\tilde u, \tilde v)$, 并且

$$\tilde u = \frac{m}{k}(a + b\tilde v), \quad \tilde v = \frac{m(1-ma)}{k+m^2 b}.$$

定理 3.4.1 ([PaW3])　如果参数满足

$$k < 2bm^2 + 2mak, \tag{4.2}$$

那么正常数平衡解 $(\tilde u, \tilde v)$ 是全局渐近稳定的.

在证明该定理之前, 先给出一个关于方程式的结论. 利用常微分方程的相关结论和比较原理, 易证下面的引理.

引理 3.4.2　假设 $f(s) \in C^1([0,\infty))$, 常数 $d > 0, \beta \geqslant 0$, $T \in [0,\infty)$, 函数 $w \in C^{2,1}(\Omega \times (T,\infty)) \cap C^{1,0}(\bar\Omega \times [T,\infty))$ 是正的.

(1) 如果 w 满足

$$\begin{cases} w_t - d\Delta w \leqslant (\geqslant)\, w^{1+\beta} f(w)(\alpha - w), & (x,t) \in \Omega \times (T,\infty), \\ \dfrac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times [T,\infty), \end{cases}$$

常数 $\alpha > 0$, 那么

$$\limsup_{t\to\infty} \max_{\bar\Omega} w(\cdot,t) \leqslant \alpha \quad \left(\liminf_{t\to\infty} \min_{\bar\Omega} w(\cdot,t) \geqslant \alpha\right).$$

(2) 如果 w 满足

$$\begin{cases} w_t - d\Delta w \leqslant w^{1+\beta} f(w)(\alpha - w), & (x,t) \in \Omega \times (T, \infty), \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times [T, \infty), \end{cases}$$

常数 $\alpha \leqslant 0$, 那么

$$\limsup_{t\to\infty} \max_{\bar{\Omega}} w(\cdot, t) \leqslant 0.$$

定理 3.4.1 的证明 从问题 (4.1) 的第一个方程得 $u_t - d_1\Delta u \leqslant u(1-ku)$. 根据引理 3.4.2,

$$\limsup_{t\to\infty} \max_{\bar{\Omega}} u(\cdot, t) \leqslant 1/k := \bar{u}_1. \tag{4.3}$$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T_1^\varepsilon \gg 1$, 使得

$$u(x,t) \leqslant \bar{u}_1 + \varepsilon, \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}, \quad t \geqslant T_1^\varepsilon.$$

从 (4.1) 的第二个方程推得, 对于 $x \in \Omega$ 和 $t \geqslant T_1^\varepsilon$,

$$\begin{aligned} v_t - d_2\Delta v &\leqslant -av - bv^2 + \frac{(\bar{u}_1+\varepsilon)v}{m(\bar{u}_1+\varepsilon)+v} \\ &= -v\frac{bv^2 + [a + mb(\bar{u}_1+\varepsilon)]v - (1-ma)(\bar{u}_1+\varepsilon)}{m(\bar{u}_1+\varepsilon)+v} \\ &= vb\,\frac{(v - v_2^\varepsilon)(v_1^\varepsilon - v)}{m(\bar{u}_1+\varepsilon)+v}, \end{aligned}$$

其中

$$v_1^\varepsilon = \frac{-[a+mb(\bar{u}_1+\varepsilon)] + \{[a+mb(\bar{u}_1+\varepsilon)]^2 + 4b(1-ma)(\bar{u}_1+\varepsilon)\}^{1/2}}{2b} > 0,$$

$$v_2^\varepsilon = \frac{-[a+mb(\bar{u}_1+\varepsilon)] - \{[a+mb(\bar{u}_1+\varepsilon)]^2 + 4b(1-ma)(\bar{u}_1+\varepsilon)\}^{1/2}}{2b} < 0.$$

根据引理 3.4.2, $\limsup\limits_{t\to\infty} \max\limits_{\bar{\Omega}} v(\cdot,t) \leqslant v_1^\varepsilon$. 由 $\varepsilon > 0$ 的任意性,

$$\limsup_{t\to\infty} \max_{\bar{\Omega}} v(\cdot, t) \leqslant v_1^0 := \bar{v}_1,$$

其中

$$\bar{v}_1 = \frac{-(a+mb\bar{u}_1) + [(a+mb\bar{u}_1)^2 + 4b(1-ma)\bar{u}_1]^{1/2}}{2b} > 0.$$

直接计算知

$$k\bar{v}_1 < m \Longleftrightarrow k < 2bm^2 + 2mak.$$

利用条件 (4.2), 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得

$$m > k(\bar{v}_1 + \varepsilon), \quad \forall\, 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

因此, 存在 $T_2^\varepsilon \gg 1$, 使得

$$v(x,t) \leqslant \bar{v}_1 + \varepsilon, \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}, \quad t \geqslant T_2^\varepsilon.$$

从 u 的方程又得, 对于 $(x,t) \in \Omega \times [T_2^\varepsilon, \infty)$,

$$u_t - d_1 \Delta u \geqslant u^2 \left(\frac{m}{mu + \bar{v}_1 + \varepsilon} - k \right) = u^2 \frac{m - k(\bar{v}_1 + \varepsilon) - mku}{mu + \bar{v}_1 + \varepsilon}.$$

应用引理 3.4.2, $\liminf\limits_{t\to\infty} \min\limits_{\bar{\Omega}} u(\cdot,t) \geqslant [m - k(\bar{v}_1 + \varepsilon)]/(mk)$. 根据 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ 的任意性,

$$\liminf_{t\to\infty} \min_{\bar{\Omega}} u(\cdot,t) \geqslant (m - k\bar{v}_1)/(mk) := \underline{u}_1 > 0.$$

对于任意的 $0 < \varepsilon < \underline{u}_1$, 存在 $T_3^\varepsilon \gg 1$, 使得

$$u(x,t) \geqslant \underline{u}_1 - \varepsilon, \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}, \quad t \geqslant T_3^\varepsilon.$$

利用 (4.1) 的第二个方程又知, 对于 $x \in \Omega$ 和 $t \geqslant T_3^\varepsilon$,

$$\begin{aligned} v_t - d_2 \Delta v &\geqslant -av - bv^2 + \frac{(\underline{u}_1 - \varepsilon)v}{m(\underline{u}_1 - \varepsilon) + v} \\ &= -v \frac{bv^2 + [a + mb(\underline{u}_1 - \varepsilon)]v - (1 - ma)(\underline{u}_1 - \varepsilon)}{m(\underline{u}_1 - \varepsilon) + v} \\ &= vb \frac{(v - v_4^\varepsilon)(v_3^\varepsilon - v)}{m(\underline{u}_1 - \varepsilon) + v}, \end{aligned}$$

其中

$$v_3^\varepsilon = \frac{-[a + mb(\underline{u}_1 - \varepsilon)] + \{[a + mb(\underline{u}_1 - \varepsilon)]^2 + 4b(1 - ma)(\underline{u}_1 - \varepsilon)\}^{1/2}}{2b} > 0,$$

$$v_4^\varepsilon = \frac{-[a + mb(\underline{u}_1 - \varepsilon)] - \{[a + mb(\underline{u}_1 - \varepsilon)]^2 + 4b(1 - ma)(\underline{u}_1 - \varepsilon)\}^{1/2}}{2b} < 0.$$

运用引理 3.4.2, 有 $\liminf\limits_{t\to\infty} \min\limits_{\bar{\Omega}} v(\cdot,t) \geqslant v_3^\varepsilon$, 因而

$$\liminf_{t\to\infty} \min_{\bar{\Omega}} v(\cdot,t) \geqslant v_3^0 := \underline{v}_1,$$

其中

$$\underline{v}_1 = \frac{-(a + mb\underline{u}_1) + [(a + mb\underline{u}_1)^2 + 4b(1 - ma)\underline{u}_1]^{1/2}}{2b} > 0.$$

对于任意的 $0 < \varepsilon < \underline{v}_1$, 存在 $T_4^\varepsilon \gg 1$, 使得

$$v(x,t) \geqslant \underline{v}_1 - \varepsilon, \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}, \quad t \geqslant T_4^\varepsilon.$$

因此, 对于 $(x,t)\in\Omega\times[T_4^\varepsilon,\infty)$, 有

$$u_t-d_1\Delta u\leqslant u^2\left(\frac{m}{mu+\underline{v}_1-\varepsilon}-k\right)=u^2\frac{m-k(\underline{v}_1-\varepsilon)-mku}{mu+\underline{v}_1-\varepsilon}.$$

同上可证

$$\limsup_{t\to\infty}\max_{\bar\Omega}u(\cdot,t)\leqslant(m-k\underline{v}_1)/(mk):=\bar{u}_2.$$

令

$$\varphi(s)=\frac{m-ks}{mk},\quad \psi(s)=\frac{-(a+mbs)+[(a+mbs)^2+4b(1-ma)s]^{1/2}}{2b},\quad s>0.$$

则 $\varphi'(s)<0$, $\psi'(s)>0$, 并且前面构造的常数 $\bar{u}_1,\bar{v}_1,\underline{u}_1,\underline{v}_1,\bar{u}_2$ 满足

$$\underline{v}_1=\psi(\underline{u}_1)<\psi(\bar{u}_1)=\bar{v}_1,\quad \underline{u}_1=\varphi(\bar{v}_1)<\varphi(\underline{v}_1)=\bar{u}_2<\bar{u}_1, \tag{4.4}$$
$$\underline{u}_1\leqslant\liminf_{t\to\infty}\min_{\bar\Omega}u(\cdot,t)\leqslant\limsup_{t\to\infty}\max_{\bar\Omega}u(\cdot,t)\leqslant\bar{u}_2,$$
$$\underline{v}_1\leqslant\liminf_{t\to\infty}\min_{\bar\Omega}v(\cdot,t)\leqslant\limsup_{t\to\infty}\max_{\bar\Omega}v(\cdot,t)\leqslant\bar{v}_1.$$

利用归纳法, 可以按照如下方式构造 4 个序列 $\{\underline{u}_i\}$, $\{\underline{v}_i\}$, $\{\bar{u}_i\}$ 和 $\{\bar{v}_i\}$:

$$\bar{v}_i=\psi(\bar{u}_i),\quad \underline{u}_i=\varphi(\bar{v}_i),\quad \underline{v}_i=\psi(\underline{u}_i),\quad \bar{u}_{i+1}=\varphi(\underline{v}_i), \tag{4.5}$$

使得

$$\begin{cases}\underline{u}_i\leqslant\liminf\limits_{t\to\infty}\min_{\bar\Omega}u(\cdot,t)\leqslant\limsup\limits_{t\to\infty}\max_{\bar\Omega}u(\cdot,t)\leqslant\bar{u}_i,\\ \underline{v}_i\leqslant\liminf\limits_{t\to\infty}\min_{\bar\Omega}v(\cdot,t)\leqslant\limsup\limits_{t\to\infty}\max_{\bar\Omega}v(\cdot,t)\leqslant\bar{v}_i.\end{cases} \tag{4.6}$$

因为 $\varphi'(s)<0$, $\psi'(s)>0$ $(s>0)$, 从 (4.4) 和 (4.5) 可以归纳推出

$$\underline{v}_{i-1}<\underline{v}_i=\psi(\underline{u}_i)<\psi(\bar{u}_i)=\bar{v}_i<\bar{v}_{i-1},$$
$$\underline{u}_{i-1}<\underline{u}_i=\varphi(\bar{v}_i)<\varphi(\underline{v}_i)=\bar{u}_{i+1}<\bar{u}_i.$$

假设

$$\lim_{i\to\infty}\underline{u}_i=\underline{u},\quad \lim_{i\to\infty}\underline{v}_i=\underline{v},\quad \lim_{i\to\infty}\bar{u}_i=\bar{u},\quad \lim_{i\to\infty}\underline{u}_i=\underline{u}. \tag{4.7}$$

显然有 $0<\underline{u}\leqslant\bar{u}$, $0<\underline{v}\leqslant\bar{v}$, 并且 $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$ 满足

$$\underline{u}=\varphi(\bar{v}),\quad \bar{u}=\varphi(\underline{v}),\quad \underline{v}=\psi(\underline{u}),\quad \bar{v}=\psi(\bar{u}). \tag{4.8}$$

直接计算知, (4.8) 等价于

$$\underline{u}=\frac{m-k\bar{v}}{mk},\quad \bar{u}=\frac{m-k\underline{v}}{mk}, \tag{4.9}$$

$$a+b\underline{v}-\frac{\underline{u}}{m\underline{u}+\underline{v}}=0,\quad a+b\bar{v}-\frac{\bar{u}}{m\bar{u}+\bar{v}}=0. \tag{4.10}$$

利用 (4.9) 便推出

$$m\underline{u}+\bar{v}=m/k=m\bar{u}+\underline{v} \implies m(\bar{u}-\underline{u})=\bar{v}-\underline{v}. \tag{4.11}$$

下面证明 $\bar{v}=\underline{v}$, 从而由 (4.11) 得 $\bar{u}=\underline{u}$. 将 (4.9) 的第二式代入 (4.10) 的第二式, 得

$$a+b\bar{v}-\frac{m-k\underline{v}}{m(m-k\underline{v})+mk\bar{v}}=0,$$

即

$$ma(m-k\underline{v})+mak\bar{v}+mb(m-k\underline{v})\bar{v}+mbk\bar{v}^2=m-k\underline{v}. \tag{4.12}$$

类似地, 从 (4.9) 的第一式和 (4.10) 的第一式可得

$$ma(m-k\bar{v})+mak\underline{v}+mb(m-k\bar{v})\underline{v}+mbk\underline{v}^2=m-k\bar{v}. \tag{4.13}$$

结合 (4.13) 和 (4.12), 有

$$mbk(\bar{v}^2-\underline{v}^2)+bm^2(\bar{v}-\underline{v})+2mak(\bar{v}-\underline{v})=k(\bar{v}-\underline{v}). \tag{4.14}$$

用反证法来完成定理的证明. 如果 $\bar{v}\neq\underline{v}$, 则 $\bar{v}>\underline{v}$, 进而从 (4.14) 推出

$$k=mbk(\bar{v}+\underline{v})+bm^2+2mak. \tag{4.15}$$

由假设条件 (4.2), $k<2bm^2+2mak$. 利用 (4.15) 有 $bm^2>mbk(\bar{v}+\underline{v})$, 即 $\bar{v}+\underline{v}<m/k$. 由此及 (4.11),

$$m\underline{u}+\bar{v}=m/k>\bar{v}+\underline{v} \implies \underline{v}<m\underline{u}. \tag{4.16}$$

根据 (4.10) 又知

$$b(\bar{v}-\underline{v})=\frac{\bar{u}}{m\bar{u}+\bar{v}}-\frac{\underline{u}}{m\underline{u}+\underline{v}}=\frac{(\bar{u}-\underline{u})\underline{v}-\underline{u}(\bar{v}-\underline{v})}{(m\bar{u}+\bar{v})(m\underline{u}+\underline{v})}.$$

注意到 (4.11), 有

$$b(\bar{v}-\underline{v})=\frac{\frac{1}{m}(\bar{v}-\underline{v})\underline{v}-\underline{u}(\bar{v}-\underline{v})}{(m\bar{u}+\bar{v})(m\underline{u}+\underline{v})}=\frac{(\bar{v}-\underline{v})(\underline{v}-m\underline{u})}{m(m\bar{u}+\bar{v})(m\underline{u}+\underline{v})}.$$

因为 $\bar{v}-\underline{v}>0$, 由上式得 $\underline{v}>m\underline{u}$. 此与 (4.16) 矛盾.

故 $\bar{v}=\underline{v}$, $\bar{u}=\underline{u}$, 进而推出 $\bar{u}=\underline{u}=\tilde{u}$, $\bar{v}=\underline{v}=\tilde{v}$. 再结合 (4.6) 和 (4.7), 得

$$\lim_{t\to\infty}(u(x,t),v(x,t))=(\tilde{u},\tilde{v})$$

在 $\bar{\Omega}$ 上一致成立. 证毕.

3.5 评　注

单调方法是讨论平衡解稳定性的一种重要方法. 若 u_s 是系统的平衡解, φ_1 是相应的特征值问题的第一特征函数, 通常是寻求形如 $u_s(x) \pm p(t)\varphi_1(x)$ 的上、下解来讨论平衡解的稳定性, 并由此确定局部吸引区域.

利用上、下解也可以讨论平衡解的全局稳定性, 通常有以下几种情形:

1. *转化为讨论相应的常微分方程*

抛物型方程的初值问题或者是带有齐次 Neumann 边界条件的初边值问题的常数平衡解的稳定性, 可以转化为相应的常微分方程平衡点的稳定性.

2. *基于相应的椭圆型方程边值问题上、下解的判别方法 (定理 3.2.6)*

如果相应的椭圆型方程边值问题有 "任意大" 的正上解 $\bar{\varphi}$ 及 "任意小" 的正下解 $\underline{\varphi}$, 并满足定理 3.2.6 的条件, 那么可以得到正平衡解的全局稳定性, 如 3.2.2 节的例 3. 如果正平衡解是唯一的, 那么定理 3.2.6 中的条件 (2) 就自然满足. 正平衡解的唯一性是讨论正平衡解的全局稳定性的前提 (当然, 也可用其他方法证明正平衡解的全局稳定性, 从而得到正平衡解的唯一性). 在 2.3.3 节中我们讨论了一类问题, 并给出了正平衡解的唯一性的充分条件. 在那里, 是通过求上、下解并利用散度定理来证明正平衡解的唯一性的. 如果改用文献 [Sa2, p.40] 中所引述的定理 2.7.1 (Serrin) 来证明平衡解的唯一性, 把 2.3.3 节中边值问题 (3.17) 的 Laplace 算子改为一般的一致二阶线性椭圆算子, 那么定理 2.3.25 仍然成立. 文献 [Am1] 中给出了另一种方法证明方程式平衡解的唯一性.

平衡解的稳定性与线性化问题的第一特征值有密切联系. 事实上, 设 $f \in C^1$, $\bar{u}$ 是问题

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(x,u), & (x,t) \in Q_\infty, \\ u = 0, & (x,t) \in S_\infty, \\ \bar{u}(x,0) = \varphi(x), & (x,t) \in \Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

的平衡解. 问题 (5.1) 在 $\bar{u}$ 处的线性化特征值问题是

$$\begin{cases} -\Delta v - f_u(x,\bar{u}(x))v = \lambda v, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

记它的第一特征值为 λ_1, 相应特征函数为 $\varphi_1 > 0$. 若 $\lambda_1 > 0$, 则 $\bar{u}$ 是孤立平衡解 (将在第 6 章中证明这个结论). 进一步利用定理 3.2.6 可证:

定理 3.5.1　若 $\lambda_1 > 0$, 则存在 $\varepsilon > 0$, 使得当

$$|\varphi(x) - \bar{u}(x)| \leqslant \varepsilon\varphi_1(x)$$

时, 问题 (5.1) 存在唯一解 $u(x,t)$, 并且满足

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \bar{u}(x).$$

证明　令 $\bar{\psi} = \bar{u}(x) + \varepsilon\varphi_1(x)$, $\underline{\psi} = \bar{u}(x) - \varepsilon\varphi_1(x)$, 则当 $\varepsilon > 0$ 充分小时, 它们是有序上、下解. 又因为 $\bar{u}(x)$ 是孤立平衡解, 所以当 $\varepsilon > 0$ 充分小时, 在 $[\bar{u}(x) - \varepsilon\varphi_1(x), \bar{u}(x) + \varepsilon\varphi_1(x)]$ 中只有平衡解 $\bar{u}(x)$. 再利用定理 3.2.6 即可推得结论.

在第 9 章中, 利用抽象理论将会得到比这个结果更强的结论. 因此, 在平衡解稳定性问题的讨论中, 研究线性化特征值问题是十分重要的.

习　题　三

3.1　证明例 1 下面的注 1.

3.2　证明定理 3.2.3.

3.3　设 $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$, $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0$, $v|_{\Omega} > 0$, $\left.\dfrac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} < 0$. 试证明: 存在常数 $K > 0$, 使得当 $x \in \bar{\Omega}$ 时,

$$u(x) \leqslant Kv(x).$$

在习题 3.4~3.6 中, 考察线性问题

$$\begin{cases} u_t + Lu + c(x)u = f(x,t), & (x,t) \in Q_\infty, \\ u = g(x,t), & (x,t) \in S_\infty, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3-1}$$

并假设它满足单调方法的条件. 记 λ_0 是特征值问题

$$\begin{cases} Lu + c(x)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的主特征值, $\varphi_0(x) > 0$ 是相应的特征函数.

3.4　假设 $g(x,t) \equiv 0, \lambda_0 > 0$, 并且存在常数 M, $r > 0$, 使得 $|f(x,t)| \leqslant M\mathrm{e}^{-rt}$. 试证明问题 (3-1) 存在唯一解 $u(x,t)$, 且满足 $|u(x,t)| \leqslant A\mathrm{e}^{-\alpha t}$, 其中 A, α 为正常数.

3.5　假设存在正常数 M_1, M_2, r, β, 使得

$$|f(x,t) - f_0(x)| \leqslant M_1\mathrm{e}^{-\gamma t}, \quad (x,t) \in Q_\infty,$$

$$|g(x,t) - g_0(x)| \leqslant M_2\mathrm{e}^{-\beta t}, \quad (x,t) \in S_\infty.$$

又设对应的椭圆型方程边值问题

$$\begin{cases} Lu + c(x)u = f_0(x), & x \in \Omega, \\ u = g_0(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

有解 $\bar{u} \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. 试证明: 若 $\lambda_0 > 0$, 则问题 (3-1) 存在唯一解 $u(x,t)$, 并满足

$$|u(x,t) - \bar{u}(x)| \leqslant A\mathrm{e}^{-\alpha t},$$

其中 A, α 为正常数.

3.6 设 $f(x,t) \geqslant 0$, $g(x,t) \geqslant 0$, $\varphi(x) \geqslant 0$, $\varphi(x) \not\equiv 0$. 证明: 若 $\lambda_0 < 0$, $u(x,t)$ 是问题 (3-1) 的解, 则对 Ω 内的任一闭子域, 一致地成立

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \infty.$$

3.7 考察初边值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \lambda u - au^k, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < \pi, \end{cases} \tag{3-2}$$

其中 $a > 0$, $k > 1$ 为常数.

(1) 试证明: 当 $\lambda > 1$ 时, 问题 (3-2) 存在唯一正平衡解 $\bar{u}$, 并且满足 $\bar{u}(x) > 0$, $\bar{u}'(0) > 0$, $\bar{u}'(\pi) < 0$;

(2) 试证明: 当 $\lambda > 1$ 时, 对任意满足 $\varphi(x) \geqslant 0$, $\varphi(x) \not\equiv 0$ 的 φ, 问题 (3-2) 存在唯一正解, 并且成立

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \bar{u}(x), \quad x \in (0,\pi).$$

3.8 设 $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, $f'(0) < 0$. 证明问题

$$u_t = \Delta u + f(u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0$$

的零解在 X 中是局部渐近稳定的, 其中

$$X = \{\varphi(x) : \varphi(x) \in C(\mathbb{R}^n),\ \varphi(x) \text{ 有界}\}.$$

3.9 证明定理 3.3.12.

3.10 假设当 $u \geqslant 0$ 时 $f(u)$ 连续可微, $f(u) > 0$, 并且积分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{f(u)}$ 收敛. 证明: 对任意非负有界的连续函数 φ, 当 $\lambda > 0$ 时, 初值问题

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \lambda f(u), & (x,t) \in Q_\infty, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

存在唯一解, 其存在区间是有限的 (在有限时刻爆炸).

第 4 章　抛物型方程组和椭圆型方程组的比较方法及其应用

4.1　概　　述

本章讨论弱耦合的反应扩散方程组初边值问题

$$\begin{cases} u_{it} + L_i u_i = f_i(x,t,u_1,\cdots,u_m), & (x,t) \in Q_T, \\ B_i u_i = g_i(x,t), & (x,t) \in S_T, \\ u_i(x,0) = \varphi_i(x), & x \in \Omega, \\ i = 1,\cdots,m. \end{cases} \tag{1.1}$$

“弱耦合”的意思是指方程中只有未知函数的耦合, 而没有未知函数导数的耦合. 同时还讨论椭圆型方程组的边值问题

$$\begin{cases} L_i u_i = f_i(x,u_1,\cdots,u_m), & x \in \Omega, \\ B_i u_i = g_i(x), & x \in \partial\Omega, \\ i = 1,2,\cdots,m, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域, $\partial\Omega$ 光滑 ($\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$),

$$L_i \equiv -\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^{(i)}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j^{(i)}(x)\frac{\partial}{\partial x_j},$$

L_i 是 Ω 上的一致椭圆算子. 边界条件是

$$B_i u_i = u_i, \tag{1.3}$$

或

$$B_i u_i = \frac{\partial u_i}{\partial \boldsymbol{n}} + b_i(x)u_i, \tag{1.4}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向, $b_i(x) \geqslant 0$.

L_i, B_i 的系数以及 $g_i(x,t)$ ($g_i(x)$), $\varphi_i(x)$ 具有如第 2 章所指出的光滑性, 并且

满足相容性条件:

$$g_i(x,0)|_{\partial\Omega} = \varphi_i(x)|_{\partial\Omega},$$

$$\left[\frac{\partial\varphi_i(x)}{\partial \boldsymbol{n}} + b_i(x)\varphi_i(x) = g_i(x,0)\right]_{\partial\Omega} \quad \text{当边界条件是 (1.3) 时},$$

$$\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial \boldsymbol{n}} + b_i\varphi_i = g_i(x)\right]_{\partial\Omega} \quad \text{当边界条件是 (1.4) 时}.$$

简单起见, 只对 $m=2$ 的情形来叙述, 并简记

$$\mathscr{L}_i = \partial_t + L_i.$$

设 Σ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的某个有界区域, $f_i(x,t,u_1,u_2)$ 在 $\bar{Q}_T\times\Sigma$ 上对 x,t 是 Hölder 连续, 对 u_1,u_2 是 Lipschitz 连续, 即存在常数 $M>0$, 使得对任意 (x,t), $(y,s)\in \bar{Q}_T=\bar{\Omega}\times[0\times T]$, x, $y\in\bar{\Omega}$, (u_1,u_2), $(v_1,v_2)\in\Sigma$, 有

$$\begin{cases} |f_i(x,t,u_1,u_2)-f_i(y,s,v_1,v_2)| \leqslant M\left(|u_1-v_1|+|u_2-v_2|\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left.+|x-y|^\alpha+|t-s|^{\alpha/2}\right), \\ |f_i(x,u_1,u_2)-f_i(y,v_1,v_2)| \leqslant M\left(|u_1-v_1|+|u_2-v_2|+|x-y|^\alpha\right). \end{cases} \tag{1.5}$$

以后在书写中常把 $f_i(x,t,u_1,u_2)$ 简写为 $f_i(u_1,u_2)$.

首先把第 2 章中的比较方法推广到方程组, 并建立比较与存在定理. 构造迭代序列:

$$\begin{cases} \mathscr{L}_i u_i^{(k)} + Mu_i^{(k)} = f_i(x,t,u_1^{(k-1)},u_2^{(k-1)}) + Mu_i^{(k-1)}, \quad (x,t)\in Q_T, \\ B_i u_i^{(k)} = g_i(x,t), \quad (x,t)\in S_T, \\ u_i^{(k)}(x,0) = \varphi_i(x), \quad x\in\Omega, \quad i=1,2. \end{cases} \tag{1.6}$$

令 $w_i^{(k)} = u_i^{(k)} - u_i^{(k-1)}$, 则

$$\begin{cases} \mathscr{L}_1 w_1^{(k)} + Mw_1^{(k)} = Mw_1^{(k-1)} + f_1(u_1^{(k-1)},u_2^{(k-1)}) - f_1(u_1^{(k-2)},u_2^{(k-1)}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +f_1(u_1^{(k-2)},u_2^{(k-1)}) - f_1(u_1^{(k-2)},u_2^{(k-2)}), \\ \mathscr{L}_2 w_2^{(k)} + Mw_2^{(k)} = Mw_2^{(k-1)} + f_2(u_1^{(k-1)},u_2^{(k-1)}) - f_2(u_1^{(k-1)},u_2^{(k-2)}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +f_2(u_1^{(k-1)},u_2^{(k-2)}) - f_2(u_1^{(k-2)},u_2^{(k-2)}), \\ B_i w_i^{(k)} = 0, \quad w_i^{(k)}(x,0) = 0, \quad i=1,2. \end{cases}$$

若 $w_1^{(k-1)}\geqslant 0\ (\leqslant 0)$, $w_2^{(k-1)}\geqslant 0\ (\leqslant 0)$, $f_1(u_1,u_2)$ 关于 u_2 单调增加, $f_2(u_1,u_2)$

关于 u_1 单调增加, 则

$$\begin{cases} \mathscr{L}_i w_i^{(k)} + M w_i^{(k)} \geqslant 0 \ (\leqslant 0), & (x,t) \in Q_T, \\ B_i w_i^{(k)} = 0, & (x,t) \in S_T, \\ w_i^{(k)}(x,0) = 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

于是 $w_1^{(k)} \geqslant 0 \ (\leqslant 0)$, $w_2^{(k)} \geqslant 0 \ (\leqslant 0)$.

若 $w_1^{(k-1)} \geqslant 0 \ (\leqslant 0)$, $w_2^{(k-1)} \leqslant 0 \ (\geqslant 0)$, $f_1(u_1,u_2)$ 关于 u_2 单调减少, $f_2(u_1,u_2)$ 关于 u_1 单调减少, 则有

$$\begin{cases} \mathscr{L}_1 w_1^{(k)} + M w_1^{(k)} \geqslant 0 \ (\leqslant 0), & (x,t) \in Q_T, \\ B_1 w_1^{(k)} = 0, & (x,t) \in S_T, \\ w_1^{(k)}(x,0) = 0, & x \in \Omega \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \mathscr{L}_2 w_2^{(k)} + M w_2^{(k)} \leqslant 0 \ (\geqslant 0), & (x,t) \in Q_T, \\ B_2 w_2^{(k)} = 0, & (x,t) \in S_T, \\ w_2^{(k)}(x,0) = 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

于是 $w_1^{(k)} \geqslant 0 \ (\leqslant 0)$, $w_2^{(k)} \leqslant 0 \ (\geqslant 0)$.

因此, 为使 $u_i^{(k)}$ 对 k 有单调性, 要求 f_i 对 u_1, u_2 有某种单调性.

这里, 对一般情况 $(m \geqslant 2)$ 给出定义. 设 Σ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的子集, 并有定义在 $\bar{Q}_T \times \Sigma$ 上的函数组

$$\{f_i(x,t,u_1,\cdots,u_m)\}_{i=1}^m.$$

定义 4.1.1 若 $i \in \{1,2,\cdots,m\}$, f_i 关于每个 $u_j \ (j \neq i)$ 都是单调增加 (减少), 则称 f_i 是拟单调增加 (减少) 的, 简称为拟增 (减). 若 f_i 关于每个 $u_j \ (j \neq i)$ 是单调的, 则称 f_i 是拟单调的. 若 f_i 是拟单调的, 但不是拟增也不是拟减, 则称之为是混拟单调的.

定义 4.1.2 若对每个 $i \in \{1,2,\cdots,m\}$, f_i 都是拟单调的, 或都是拟单调增加的, 或都是拟单调减少的, 则分别称函数组 $\{f_i\}$ 是拟单调的, 拟单调增加的, 拟单调减少的. 若 $\{f_i\}$ 是拟单调的, 但不是拟增的, 也不是拟减的, 则称之为混拟单调的.

定义 4.1.3 若 $\{f_i\}$ 不是拟单调的, 则称为非拟单调的.

上面的分析指出: 按 (1.6) 的格式进行迭代, 函数组 $\{f_i\}$ $(i=1,2)$ 的拟增或拟减对保证迭代序列的单调性起着极为重要的作用.

下面还要讨论, 怎样把比较方法推广到混拟单调与非拟单调的情形中去.

在迭代过程中, 另一重要的问题是选取迭代初值, 这就要引进上、下解的概念. 当 $\{f_i\}$ 具有不同的拟单调性 (拟增的, 或拟减的, 或混拟单调的) 时, 上、下解的定义将是不同的, 这是方程组的比较方法的另一特点.

本章的重点是上、下解的定义与迭代格式, 以及对具体问题如何找上、下解. 至于迭代序列的存在性、单调性与收敛性的证明与第 3 章类似, 主要是利用线性方程式的最大值原理与线性方程式解的存在性与正则性理论, 对此在本章中就不再说明了.

4.2 拟单调增加和拟单调减少情形的比较方法

4.2.1 上、下解的定义与迭代格式

设 (1.1) 是拟单调增加或减少的, 定义 (1.1) 的上解 $U(x,t)=(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$ 和下解 $V(x,t)=(\underline{u}_1,\underline{u}_2)$ 至少与 (1.1) 的古典解有相同的光滑性. 引进上、下解是为了利用它作为迭代初值 $u_i^{(0)}$, 使得以 (1.6) 为迭代格式时有

$$w_i^{(1)}=u_i^{(1)}-u_i^{(0)}\geqslant 0\ (\leqslant 0),\quad i=1,2\quad (\text{拟单调增加情形})$$

或

$$\begin{aligned} w_1^{(1)}&=u_1^{(1)}-u_1^{(0)}\geqslant 0\ (\leqslant 0),\\ w_2^{(0)}&=u_2^{(1)}-u_2^{(0)}\leqslant 0\ (\geqslant 0).\end{aligned}\quad (\text{拟单调减少情形})$$

下面给出定义.

定义 4.2.1 设 $U(x,t)=(\bar{u}_1(x,t),\bar{u}_2(x,t))$, $V(x,t)=(\underline{u}_1(x,t),\underline{u}_2(x,t))$, 满足

$$\begin{cases} B_i\bar{u}_i\geqslant g_i(x,t)\geqslant B_i\underline{u}_i, & (x,t)\in S_T,\\ \bar{u}_i(x,0)\geqslant \varphi_i(x)\geqslant \underline{u}_i(x,0), & x\in\Omega, \end{cases}\tag{2.1}$$

同时还满足下列条件之一, 则称 U,V 是问题 (1.1) 的上解和下解.

(1) 当 $\{f_i\}$ 是拟单调增加时, 满足

$$\mathscr{L}_i\bar{u}_i-f_i(x,t,\bar{u}_1,\bar{u}_2)\geqslant 0\geqslant \mathscr{L}_i\underline{u}_i-f_i(x,t,\underline{u}_1,\underline{u}_2),\quad (x,t)\in Q_T,\quad i=1,2.$$

(2) 当 $\{f_i\}$ 是拟单调减少时, 满足

$$\begin{cases} \mathscr{L}_1\bar{u}_1-f_1(x,t,\bar{u}_1,\underline{u}_2)\geqslant 0\geqslant \mathscr{L}_1\underline{u}_1-f_1(x,t,\underline{u}_1,\bar{u}_2), & (x,t)\in Q_T,\\ \mathscr{L}_2\bar{u}_2-f_2(x,t,\underline{u}_1,\bar{u}_2)\geqslant 0\geqslant \mathscr{L}_2\underline{u}_2-f_2(x,t,\bar{u}_1,\underline{u}_2), & (x,t)\in Q_T. \end{cases}$$

对问题 (1.2) 有类似的定义.

定义 4.2.2 设 $U(x)=(\bar{u}_1(x),\bar{u}_2(x))$, $V(x)=(\underline{u}_1(x),\underline{u}_2(x))$ 满足

$$B_i\bar{u}_i\geqslant g_i(x)\geqslant B_i\underline{u}_i,\quad x\in\partial\Omega,$$

同时还满足下列条件之一, 则称 U,V 是问题 (1.2) 的上解和下解.

(1) 当 $\{f_i\}$ 是拟单调增加时, 满足

$$L_i\bar{u}_i-f_i(x,\bar{u}_1,\bar{u}_2)\geqslant 0\geqslant L_i\underline{u}_i-f_i(x,\underline{u}_1,\underline{u}_2),\quad x\in\Omega,\quad i=1,2.$$

(2) 当 $\{f_i\}$ 是拟单调减少时, 满足

$$\begin{aligned}&L_1\bar{u}_1-f_1(x,\bar{u}_1,\underline{u}_2)\geqslant 0\geqslant L_1\underline{u}_1-f_1(x,\underline{u}_1,\bar{u}_2),\quad x\in\Omega,\\&L_2\bar{u}_2-f_2(x,\underline{u}_1,\bar{u}_2)\geqslant 0\geqslant L_2\underline{u}_2-f_2(x,\bar{u}_1,\underline{u}_2),\quad x\in\Omega.\end{aligned}$$

现在假定:

(1) 问题 (1.1) 与问题 (1.2) 分别存在有序的上、下解:

$$V(x,t)\leqslant U(x,t),\quad (V(x)\leqslant U(x)).$$

(2) 定义

$$\Sigma_V^U=\{u:\ u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2,\ V(x,t)\leqslant u\leqslant U(x,t),\ (x,t)\in\bar{Q}_T\}\ \text{对于问题 (1.1)},$$
$$\Sigma_V^U=\{u:\ u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2,\ V(x)\leqslant u\leqslant U(x),\ x\in\bar{\Omega}\}\ \text{对于问题 (1.2)}.$$

下面构造迭代序列, 先考虑问题 (1.1). 假设 $\{f_1,f_2\}$ 在 Σ_V^U 上是拟单调增加或拟单调减少的, 且在 $Q_T\times\Sigma_V^U$ 上 (1.5) 成立.

当 $\{f_i\}$ 在 Σ_V^U 拟单调增加时, 令

$$(\bar{u}_1^{(0)},\bar{u}_2^{(0)})=(\bar{u}_1,\bar{u}_2),\quad (\underline{u}_1^{(0)},\underline{u}_2^{(0)})=(\underline{u}_1,\underline{u}_2),$$

$$\begin{cases}\mathscr{L}_i\bar{u}_i^{(k)}+M\bar{u}_i^{(k)}=M\bar{u}_i^{(k-1)}+f_i(x,t,\bar{u}_1^{(k-1)},\bar{u}_2^{(k-1)}),\quad (x,t)\in Q_T,\\ B_i\bar{u}_i^{(k)}=g_i(x,t),\quad (x,t)\in S_T,\\ \bar{u}_i^{(k)}(x,0)=\varphi_i(x),\quad x\in\Omega,\quad i=1,2,\end{cases}\tag{2.2}$$

$$\begin{cases}\mathscr{L}_i\underline{u}_i^{(k)}+M\underline{u}_i^{(k)}=M\underline{u}_i^{(k-1)}+f_i(x,t,\underline{u}_1^{(k-1)},\underline{u}_2^{(k-1)}),\quad (x,t)\in Q_T,\\ B_i\underline{u}_i^{(k)}=g_i(x,t),\quad (x,t)\in S_T,\\ \underline{u}_i^{(k)}(x,0)=\varphi_i(x),\quad x\in\Omega,\quad i=1,2.\end{cases}\tag{2.3}$$

由此确定了

$$\bar{U}^{(k)}=(\bar{u}_1^{(k)},\bar{u}_2^{(k)}),\quad \underline{V}^{(k)}=(\underline{u}_1^{(k)},\underline{u}_2^{(k)}),\quad k=1,2,3,\cdots.$$

令 $w_i^{(0)} = \bar{u}_i^{(1)} - \bar{u}_i^{(0)} = \bar{u}_i^{(1)} - \bar{u}_i$, 由上解的定义得

$$\begin{cases} \mathscr{L}_i w_i^{(0)} + M w_i^{(0)} \leqslant 0, & (x,t) \in Q_T, \\ B_i w_i^{(0)} \leqslant 0, & (x,t) \in S_T, \\ w_i^{(0)}(x,0) \leqslant 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

于是 $w_i^{(0)}(x,t) \leqslant 0,\ i = 1,2$. 同理可证

$$\underline{u}_i^{(1)} - \underline{u}_i^{(0)} \geqslant 0, \quad i = 1,2.$$

因此得到

$$\underline{u}_i \leqslant \underline{u}_i^{(1)} \leqslant \underline{u}_i^{(2)} \leqslant \cdots \leqslant \underline{u}_i^{(k)} \leqslant \bar{u}_i^{(k)} \leqslant \cdots \leqslant \bar{u}_i^{(2)} \leqslant \bar{u}_i^{(1)} \leqslant \bar{u}_i, \quad i = 1,2. \tag{2.4}$$

当 $\{f_i\}$ 是拟单调减少时, 令

$$(\bar{u}_1^{(0)}, \underline{u}_2^{(0)}) = (\bar{u}_1, \underline{u}_2), \quad (\underline{u}_1^{(0)}, \bar{u}_2^{(0)}) = (\underline{u}_1, \bar{u}_2),$$

$$\begin{cases} \mathscr{L}_1 \bar{u}_1^{(k)} + M \bar{u}_1^{(k)} = M \bar{u}_1^{(k-1)} + f_1(x,t,\bar{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}), & (x,t) \in Q_T, \\ \mathscr{L}_2 \underline{u}_2^{(k)} + M \underline{u}_2^{(k)} = M \underline{u}_2^{(k-1)} + f_2(x,t,\bar{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}), & (x,t) \in Q_T, \\ B_1 \bar{u}_1^{(k)} = g_1(x,t), \quad B_2 \underline{u}_2^{(k)} = g_2(x,t), \quad (x,t) \in S_T, \\ \bar{u}_1^{(k)}(x,0) = \varphi_1(x), \quad \underline{u}_2^{(k)}(x,0) = \varphi_2(x), \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathscr{L}_1 \underline{u}_1^{(k)} + M \underline{u}_1^{(k)} = M \underline{u}_1^{(k-1)} + f_1(x,t,\underline{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}), & (x,t) \in Q_T, \\ \mathscr{L}_2 \bar{u}_2^{(k)} + M \bar{u}_2^{(k)} = M \bar{u}_2^{(k-1)} + f_2(x,t,\underline{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}), & (x,t) \in Q_T, \\ B_1 \underline{u}_1^{(k)} = g_1(x,t), \quad B_2 \bar{u}_2^{(k)} = g_2(x,t), \quad (x,t) \in S_T, \\ \underline{u}_1^{(k)}(x,0) = \varphi_1(x), \quad \bar{u}_2^{(k)}(x,0) = \varphi_2(x), \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

由此可确定 $(\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)})$ 和 $(\underline{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)})$ 也满足 (2.4). 因此, 在 $\{f_i\}$ 是拟增的情形下, 存在极限

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} (\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}) = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \tilde{u}, \\ \lim\limits_{k\to\infty} (\underline{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}) = (\hat{u}_1, \hat{u}_2) = \hat{u}. \end{cases} \tag{2.5}$$

可以证明它们是 (1.1) 的解, 且满足

$$(\underline{u}_1, \underline{u}_2) = \underline{u} \leqslant \hat{u} \leqslant \tilde{u} \leqslant \bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2), \quad (x,t) \in \bar{Q}_T.$$

在 $\{f_i\}$ 是拟减情形下, 也存在极限

$$\lim_{k\to\infty} (\bar{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)}) = (\hat{u}_1, \hat{u}_2) = \hat{u},$$

$$\lim_{k\to\infty} (\underline{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)}) = (\check{u}_1, \check{u}_2) = \check{u}.$$

它们也是 (1.1) 的解, 而且满足

$$\underline{u}(x,t) \leqslant \check{u}(x,t), \quad \hat{u}(x,t) \leqslant \bar{u}(x,t), \quad (x,t) \in \bar{Q}_T.$$

至此, 解的存在性定理已经得到. 这里寻找问题 (1.1) 的上、下解是关键. 由定义知道, 对于拟增情形, 上解与下解是独立的, 它们可以被分别确定. 而对于拟减情形, 上解 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ 与下解 $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ 是有联系的, 但 $(\bar{u}_1, \underline{u}_2)$ 与 $(\underline{u}_1, \bar{u}_2)$ 是相互独立的, 也可以被分别确定.

4.2.2　抛物型方程组的比较原理

本节利用抛物型方程式的最大值原理讨论抛物型方程组初边值问题解的唯一性并建立比较原理.

给定 m 个一致抛物算子

$$\mathscr{L}_i = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}^{(i)}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k^{(i)}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad i = 1, \cdots, m$$

和 m 阶函数矩阵

$$H(x,t) = (h_{ij}(x,t)), \quad i,j = 1,2,\cdots,m.$$

现在对下列弱耦合抛物不等式组

$$\mathscr{L}_i u_i + \sum_{j=1}^{n} h_{ij} u_j \leqslant 0 \ (\geqslant 0), \quad i = 1,2,\cdots,m$$

建立比较原理.

假设 $a_{kj}^{(i)}, b_k^{(i)}, h_{ij}$ 在 $\bar{Q}_T$ 上连续 (实际上只需 h_{ij} 在 $\bar{Q}_T$ 上有界), 边界条件中的 $b_i(x) \geqslant 0$ 且连续. 记 $u(x,t) = (u_1(x,t), \cdots, u_m(x,t))$.

引理 4.2.3　设 $u_j(x,t) \in C(\bar{Q}_T)$, $j = 1,2,\cdots,m$. 若

(1)

$$h_{ij} \leqslant 0, \quad j \neq i, \quad i,j = 1,\cdots,m;$$

(2)

$$\mathscr{L}_i u_i + \sum_{j=1}^{m} h_{ij} u_i < 0 \ (> 0), \quad (x,t) \in Q_T, \quad i = 1,\cdots,m; \tag{2.6}$$

(3) 当 $x \in \bar{\Omega}$ 时, $u(x,0) < 0 \ (> 0)$;

(4) 在 $\partial\Omega \times (0,T]$ 上, $u(x,t) < 0 \ (> 0)$, 或 $\dfrac{\partial u_i}{\partial \boldsymbol{n}} + b_i(x) u_i \leqslant 0 \ (\geqslant 0)$, $i = 1,\cdots,m$.

则

$$u(x,t) < 0 \ (> 0), \quad (x,t) \in Q_T.$$

证明 令 $u_j = v_j e^{\alpha t}$, 常数 $\alpha > 0$ 待定. 由 (2.6) 式得

$$\mathscr{L}_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \tilde{h}_{ij} v_j < 0, \quad (x,t) \in Q_T, \quad i = 1, \cdots, m, \tag{2.7}$$

其中

$$\begin{cases} \tilde{h}_{ii} = h_{ii} + \alpha > 0, & i = 1, \cdots, m, \\ \tilde{h}_{ij} = h_{ij} \leqslant 0, & i \neq j, \quad i,j = 1, \cdots, m. \end{cases} \tag{2.8}$$

令 $v = (v_1, \cdots, v_m)$. 因为 $v(x,0) = u(x,0) < 0$ $(x \in \bar{\Omega})$, 所以存在 $\delta > 0$, 当 $x \in \bar{\Omega}$, $0 \leqslant t \leqslant \delta$ 时, $v(x,t) < 0$. 令

$$A = \{t : t \leqslant T, \text{ 对所有 } x \in \Omega, \ 0 \leqslant s \leqslant t, \text{ 有 } v(x,s) < 0\},$$

那么 $\bar{t} = \sup A$ 存在且满足 $0 < \bar{t} \leqslant T$.

若引理的结论不对, 则 $v(x,t) \leqslant 0$, $(x,t) \in Q_{\bar{t}}$, 并存在 $\bar{x} \in \bar{\Omega}$, 使得 v 的某分量 v_i 满足 $v_i(\bar{x},\bar{t}) = 0$. 若 $\bar{x} \in \Omega$, 因 v_i 在 $(\bar{x},\bar{t})$ 取到 $Q_{\bar{t}}$ 上的最大值, 所以

$$\left.\frac{\partial v_i}{\partial t}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} \geqslant 0, \quad \left.\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} = 0, \quad \left.\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}^{(i)} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_j}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} \leqslant 0,$$

从而 $\mathscr{L}_i v_i|_{(\bar{x},\bar{t})} \geqslant 0$. 另一方面, 因为 $v_j(\bar{x},\bar{t}) \leqslant 0$, $v_i(\bar{x},\bar{t}) = 0$, 由 (2.8) 式得

$$\left[\mathscr{L}_i v_i + \sum_{i=1}^{m} \tilde{h}_{ij} v_j\right]_{(\bar{x},\bar{t})} \geqslant 0,$$

此与 (2.7) 式矛盾. 若 $\bar{x} \in \partial\Omega$ 且 $v_i(x,\bar{t}) < 0$ $(x \in \Omega)$, 则 $v_i(\bar{x},\bar{t}) = \max v_i(x,t)$, 在 $Q_{\bar{t}}$ 上 $v_i(x,t) < 0 = v_i(\bar{x},\bar{t})$,

$$0 > \mathscr{L}_i v_i + \tilde{h}_{ii} v_i + \sum_{j \neq i} h_{ij} v_j \geqslant \mathscr{L}_i v_i + \tilde{h}_{ii} v_i.$$

由方程式导数形式的强最大值原理得 $\left.\dfrac{\partial v_i}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} > 0$, 这与假设条件

$$\left[\frac{\partial v_i}{\partial \boldsymbol{n}} + b_i(x) v_i\right]_{(\bar{x},\bar{t})} = \left.\frac{\partial v_i}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} \leqslant 0$$

矛盾. 因此 $v(x,t) < 0$, 即 $u(x,t) < 0$, $(x,t) \in Q_T$. 证毕.

定理 4.2.4 设 $u \in C(\bar{\Omega}_T), u = (u_1, u_2, \cdots, u_m)$, 在 Q_T 内满足

$$\mathscr{L}_i u_i + \sum_{j=1}^{m} h_{ij} u_j \leqslant 0 \ (\geqslant 0), \quad i = 1, \cdots, m, \tag{2.9}$$

又

$$h_{ij} \leqslant 0, \quad i \neq j, \quad i,j = 1, \cdots, m. \tag{2.10}$$

若当 $x \in \bar{\Omega}$ 时, $u(x,0) \leqslant 0\ (\geqslant 0), B_i u_i|_{\partial\Omega\times(0,T]} \leqslant 0\ (\geqslant 0),\ i = 1, \cdots, m$, 有

(1) 在 Q_T 内 $u \leqslant 0\ (\geqslant 0)$;

(2) 若存在 $(x_0, t_0) \in Q_T$ 和 $\mu : 0 \leqslant \mu \leqslant m$, 使得 $u_\mu(x_0, t_0) = 0$, 则对任意 $(x,t) \in \bar{Q}_{t_0}$ 有 $u_\mu(x,t) = 0$.

证明　先证 (1). 因 h_{ij} 有界, 故存在常数 $\beta > 0$, 使得

$$\beta + \sum_{j=1}^{m} h_{ij} > 0, \quad (x,t) \in Q_T, \quad i = 1, \cdots, m.$$

令 $v_i = u_i - \varepsilon e^{\beta t}$, 则

$$\mathscr{L}_i v_i + \sum_{j=1}^{m} h_{ij} v_i = \mathscr{L}_i v_i + \sum_{j=1}^{m} h_{ij} u_j - \varepsilon e^{\beta t}\left(\beta + \sum_{j=1}^{m} h_{ij}\right) < 0,$$

$$v(x,0) = (v_1, \cdots, v_m)|_{t=0} < 0.$$

故由引理 4.2.3 得 $v < 0,\ (x,t) \in Q_T$. 令 $\varepsilon \to 0$ 得 $u \leqslant 0,\ (x,t) \in Q_T$.

再证 (2). 在 Q_T 中,

$$0 \geqslant \mathscr{L}_\mu u_\mu + \sum_{j=1}^{m} h_{ij} u_j = \mathscr{L}_\mu u_\mu + h_{\mu\mu} u_\mu + \sum_{j\neq\mu} h_{\mu j} u_j \geqslant \mathscr{L}_\mu u_\mu + h_{\mu\mu} u_\mu.$$

令 $u_\mu = v_\mu e^{\alpha t}$, 其中常数 α 满足 $\alpha + h_{\mu\mu} > 0$. 则有

$$\mathscr{L}_\mu v_\mu + (\alpha + h_{\mu\mu}) v_\mu \leqslant 0.$$

于是由抛物型方程式的强最大值原理得结论. 证毕.

同理可得导数形式的强最大值原理, 即

定理 4.2.5　设在 Q_T 中 (2.9) 式成立, H 满足条件 (2.10), $u \leqslant 0\ (\geqslant 0)$. 又设 u 的某个分量 u_τ 在点 $P \in \partial\Omega \times (0,T]$ 处有 $u_\tau(P) = 0$, 在 Q_T 中存在球 B 与 $\partial\Omega \times (0,T]$ 在 P 点相切, 并且在 B 中 $u_\tau < 0\ (> 0)$. 则

$$\left.\frac{\partial u_\tau}{\partial n}\right|_P > 0\ (< 0),$$

其中 n 表示 P 点处的单位外法向.

为了把这些结果推广到有非负最大值 M 的函数 u 上去, 只需把同样的方法用到 $V = (u_1 - M, \cdots, u_m - M)$ 上即可, 不过这时还要求 H 满足

$$\sum_{j=1}^{m} h_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, \cdots, m. \tag{2.11}$$

记 $\vec{M}=(M,M,\cdots,M)$, 则有

定理 4.2.6 设 u 满足 (2.9), $u(x,0)\leqslant\vec{M}$ $(x\in\Omega)$, $u(x,t)|_{\partial\Omega\times(0,T]}\leqslant\vec{M}$ 或 $\left[\dfrac{\partial u_i}{\partial \boldsymbol{n}}+b_i(x)u_i\right]_{\partial\Omega\times(0,T]}\leqslant 0$ $(i=1,\cdots,m)$, H 满足条件 (2.10) 和 (2.11).

(1) 若 $M\geqslant 0$, 则在 Q_T 上 $u\leqslant\vec{M}$;

(2) 若在内点 $(x_0,t_0)\in Q_T$ 处 $u_\tau(x_0,t_0)=M$, 则在 $\bar{Q}_{t_0}$ 上 $u_\tau\equiv M$;

(3) 若在定理 4.2.5 所述的边界点 P 处 $u_\tau(P)=M$, 且在球 $B\subset Q_T$ 中 $u_\tau<M$, 则 $\left.\dfrac{\partial u_\tau}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_P>0$.

注 2.1 因为 h_{ij} 有界, 通过函数替换

$$v_i=u_i\mathrm{e}^{-\alpha t}\quad(\alpha>0),$$

则 v_i 满足

$$\mathscr{L}_iv_i+(h_{ii}+\alpha)v_i+\sum_{j\neq i}h_{ij}v_j\leqslant 0.$$

只要选 $\alpha>0$ 充分大, 则对于

$$\tilde{h}_{ii}=h_{ii}+\alpha,\quad \tilde{h}_{ij}=h_{ij}\ (i\neq j),$$

必有

$$\sum_{j=1}^m\tilde{h}_{ij}\geqslant 0,\quad i=1,\cdots,m.$$

下面举出比较原理不成立的例子.

例 1 设有强耦合不等式组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}-\dfrac{\partial^2u_1}{\partial x^2}\leqslant 0, & (x,t)\in(0,1]\times(0,1],\\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial t}-\dfrac{\partial^2u_2}{\partial x^2}+9\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\leqslant 0, & (x,t)\in(0,1]\times(0,1].\end{cases}$$

易验算

$$\begin{cases}u_1=-\mathrm{e}^{x+t},\\[1ex] u_2=t-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\end{cases}$$

满足上述不等式组, 且有

$$\begin{cases}u|_{t=0}=(u_1,u_2)|_{t=0}\leqslant 0, & x\in[0,1],\\[1ex] u|_{x=0,1}\leqslant 0, & t\in(0,1].\end{cases}$$

但

$$u_2|_{x=\frac{1}{2}} = t \geqslant 0,$$

因而不可能有比较原理.

例 2 考虑不等式组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \leqslant 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + u_1(u_2^2 + 9) \leqslant 0. \end{cases}$$

显然例 1 中的 u_1, u_2 满足上述不等式, 因而比较原理不成立.

事实上, 例 1 中的 u_1, u_2 还满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \leqslant 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + 9u_1 \leqslant 0. \end{cases}$$

因而对这个不等式组, 比较原理也不成立. 这时 $h_{11} = h_{12} = h_{22} = 0$, 而 $h_{21} = 9 > 0$, 不满足条件 (2.10).

例 2 说明了以上建立的弱耦合抛物不等式组的比较原理只是一种很特殊的情形, 对于一般的弱耦合情形不一定有比较原理, 即使是线性弱耦合的情形, 若不满足条件 (2.10), 也不一定有比较原理.

4.2.3 抛物型方程组初边值问题解的存在唯一性与椭圆型方程组边值问题解的存在性

定理 4.2.7 设 $U(x,t)$ 和 $V(x,t)$ 分别是问题 (1.1) 的上解和下解, $V(x,t) \leqslant U(x,t)$, $\{f_1, f_2\}$ 在 Σ_V^U 上是拟增或拟减的. 那么问题 (1.1) 在 $[V(x,t), U(x,t)]$ 中存在唯一解 $u(x,t)$.

证明 先对拟增情形给出证明. 此时容易看出, 在 (2.5) 式中给出的 $\tilde{u}$ 和 $\hat{u}$ 均是问题 (1.1) 的解. 为证唯一性, 先证 $\tilde{u} = \hat{u}$. 令 $w_1 = \tilde{u}_1 - \hat{u}_1, w_2 = \tilde{u}_2 - \hat{u}_2$, 由 $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2), \hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ 满足的方程得

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_i w_i &= f_i(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) - f_i(\hat{u}_1, \hat{u}_2) \\ &= f_i(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) - f_i(\tilde{u}_1, \hat{u}_2) + f_i(\tilde{u}_1, \hat{u}_2) - f_i(\hat{u}_1, \hat{u}_2) \\ &\leqslant M(\tilde{u}_2 - \hat{u}_2) + M(\tilde{u}_1 - \hat{u}_1) = M(w_1 + w_2). \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{cases} \mathscr{L}_1 w_1 - M(w_1 + w_2) \leqslant 0, & (x,t) \in Q_T, \\ \mathscr{L}_2 w_2 - M(w_1 + w_2) \leqslant 0, & (x,t) \in Q_T, \\ B_1 w_1 = B_2 w_2 = 0, & (x,t) \in S_T, \\ w_1(x,0) = w_2(x,0) = 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

由定理 4.2.4 得 $w_1 \leqslant 0$, $w_2 \leqslant 0$, 即 $\tilde{u}_1 \leqslant \hat{u}_1$, $\tilde{u}_2 \leqslant \hat{u}_2$. 又已知 $\tilde{u}_1 \geqslant \hat{u}_1$, $\tilde{u}_2 \geqslant \hat{u}_2$, 因此 $\tilde{u}_1 = \hat{u}_1$, $\tilde{u}_2 = \hat{u}_2$. 令

$$u_i(x,t) = \tilde{u}_i = \hat{u}_i, \quad i = 1, 2,$$

则 $u(x,t) = (u_1, u_2)$ 是问题 (1.1) 的解.

现设 $u^*(x,t)$ 是 (1.1) 的任意一个解, 满足 $V \leqslant u^* \leqslant U$, 则 U, u^* 是问题 (1.1) 的一对上、下解. 由 (2.2) 式和 (2.3) 式确定的迭代序列分别记为 $T^k U$ 和 $T^k u^*$. 前面已证

$$\lim_{k\to\infty} T^k u^* = \lim_{k\to\infty} T^k U = u(x,t),$$

但 $T^k u^* = u^*(x,t)$, 故 $u^* = u$.

对于拟减情形类似可证.

对于椭圆型边值问题 (1.2), 可以类似地得到解的存在性定理, 但不一定有唯一性. 可以证明:

定理 4.2.8 设 $U(x)$ 和 $V(x)$ 是 (1.2) 的一对上、下解, 且 $U(x) \geqslant V(x)$. 若 $\{f_1, f_2\}$ 在 Σ_V^U 上是拟单调增加的, 则问题 (1.2) 在 $[V(x), U(x)]$ 中存在最大解 $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ 和最小解 $\hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2)$, 且满足

$$V(x) \leqslant \hat{u}(x) \leqslant \tilde{u}(x) \leqslant U(x).$$

若 $\{f_1, f_2\}$ 在 Σ_V^U 上是拟单调减少的, 则问题 (1.2) 存在解 $\hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2)$, $\check{u} = (\check{u}_1, \check{u}_2)$, 并满足

$$V(x) \leqslant \hat{u}(x), \ \check{u}(x) \leqslant U(x).$$

若 (1.2) 还有解 $u(x)$ 满足

$$V(x) \leqslant u(x) \leqslant U(x),$$

则

$$(\check{u}_1(x), \hat{u}_2(x)) \leqslant u(x) \leqslant (\hat{u}_1(x), \check{u}_2(x)).$$

4.2.4 抛物型方程组的上、下解方法

定理 4.2.9　设 $\{f_1, f_2\}$ 在 Σ 上拟单调增加或减少, $\dfrac{\partial f_i}{\partial u_j} \in C(\bar{Q}_T \times \Sigma)$ $(i = 1,2)$; $U(x,t) = (U_1, U_2)$, $V(x,t) = (V_1, V_2) \in C(\bar{Q}_T)$; 当 $(x,t) \in \bar{Q}_T$ 时, $U, V \in \Sigma$. 又 $U(x,0) \geqslant V(x,0)$ $(x \in \bar{\Omega})$; $B_iU_i \geqslant B_iV_i$ $(x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T])$, $i = 1,2$, 并且还有, 当 $\{f_1, f_2\}$ 是拟增时,

$$\mathscr{L}_iU_i - f_i(x,t,U_1,U_2) \geqslant \mathscr{L}_iV_i - f_i(x,t,V_1,V_2), \quad (x,t) \in Q_T,$$

当 $\{f_1, f_2\}$ 是拟减时,

$$\mathscr{L}_1U_1 - f_1(x,t,U_1,V_2) \geqslant \mathscr{L}_1V_1 - f_1(x,t,V_1,U_2), \quad (x,t) \in Q_T,$$
$$\mathscr{L}_2U_2 - f_2(x,t,V_1,U_2) \geqslant \mathscr{L}_2V_2 - f_2(x,t,U_1,V_2), \quad (x,t) \in Q_T.$$

则

(1) $V(x,t) \leqslant U(x,t)$, $(x,t) \in \bar{Q}_T$;

(2) 当 $V_i(x,0) \not\equiv U_i(x,0)$ 时, 有 $V_i(x,t) < U_i(x,t)$, $(x,t) \in Q_T$.

证明　先设 $\{f_1, f_2\}$ 是拟增的. 令 $W_i = U_i - V_i$, $i = 1,2$. 由假设条件得

$$\mathscr{L}_iW_i \geqslant f_i(U_1,U_2) - f_i(V_1,V_2) = h_{i1}(x,t)W_1 + h_{i2}(x,t)W_2,$$

其中

$$h_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial f_i(V_1 + s(U_1 - V_1), V_2 + s(U_2 - V_2))}{\partial u_j} \mathrm{d}s.$$

又

$$W_i(x,0) \geqslant 0, \quad B_iW_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,$$

且 f_i 拟增, 所以在 Σ 上 $\dfrac{\partial f_i}{\partial u_j} \geqslant 0$, $i \neq j$. 于是由定理 4.2.4 得 $W_i \geqslant 0$, $i = 1,2$, 即 $U_i \geqslant V_i$, $i = 1,2$. 同样利用定理 4.2.4 可得另一结论.

对于拟减情形类似可证. 证毕.

推论 4.2.10　设 $\{f_1, f_2\}$ 在 Σ 上拟增或拟减, $\dfrac{\partial f_i}{\partial u_j} \in C\left(\bar{Q}_T \times \Sigma\right)$. 当 $(x,t) \in \bar{Q}_T$ 时 $U(x,t), V(x,t) \in \Sigma$ 是问题 (1.1) 的一对上、下解, 则定理 4.2.9 的结论成立, 即它们一定是有序的.

在实际应用中常讨论非负解的存在唯一性.

推论 4.2.11　设 $\{f_1, f_2\}$ 在 $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \bar{\mathbb{R}}_+$ 是拟增或拟减的, $\dfrac{\partial f_i}{\partial u_j} \in C(\bar{Q}_T \times \bar{\mathbb{R}}_+ \times \bar{\mathbb{R}}_+)$,

问题 (1.1) 存在非负上、下解 $U(x,t), V(x,t)$, 则问题 (1.1) 存在唯一非负解 $u(x,t)$, 且满足

$$V(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant U(x,t), \quad (x,t) \in Q_T.$$

证明 设 $\{f_1, f_2\}$ 是拟增的. 解的存在性由定理 4.2.7 得到. 若问题 (1.1) 有两个非负解 $u(x,t)$ 与 $v(x,t)$, 则 u 和 v 是问题 (1.1) 的上、下解, v 和 u 也是问题 (1.1) 的上、下解. 由推论 4.2.10 得 $u(x,t) = v(x,t)$.

若 $\{f_1, f_2\}$ 是拟减的, 解的存在性仍由定理 4.2.7 得到. 现设问题 (1.1) 有两个非负解 (w_1, w_2) 和 (w_1^*, w_2^*), 记 M_0 是它们在 $\bar{Q}_T$ 上的共同上界. 作变换

$$v_1 = u_1, \quad v_2 = M_0 - u_2,$$

得

$$\begin{cases} \mathscr{L}_1 v_1 = f_1(v_1, M_0 - v_2), & (x,t) \in Q_T, \\ \mathscr{L}_2 v_2 = -f_2(v_1, M_0 - v_2), & (x,t) \in Q_T, \\ B_1 v_1 = g_1, \quad B_2 v_2 = b_2(x) M_0 - g_2(x,t), & (x,t) \in S_T, \\ v_1(x,0) = \varphi_1(x), \quad v_2(x,0) = M_0 - \varphi_2(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

该系统在 $\bar{\mathbb{R}}_+ \times [0, M]$ 上是拟增的, 并且 $(w_1, M_0 - w_2)$ 与 $(w_1^*, M_0 - w_2^*)$ 都是它的解. 由上面刚证过的结果知

$$w_1 = w_1^*, \quad M_0 - w_2 = M_0 - w_2^*,$$

因此, $(w_1, w_2) = (w_1^*, w_2^*)$. 证毕.

4.3 混拟单调情形的比较方法

为了确定起见, 假定: 在 Σ 上 f_1 是拟单调减少的, f_2 是拟单调增加的. 按迭代格式 (1.6) 每迭代一次确定一对函数, 它不适用于混拟单调情形. 现在改变迭代格式, 使得每迭代一次必须同时确定四个函数:

$$\begin{cases} \mathscr{L}_1 \bar{u}_1^{(k)} + M\bar{u}_1^{(k)} = M\bar{u}_1^{(k-1)} + f_1(x,t,\bar{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}), & (x,t) \in Q_T, \\ \mathscr{L}_2 \bar{u}_2^{(k)} + M\bar{u}_2^{(k)} = M\bar{u}_2^{(k-1)} + f_2(x,t,\bar{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}), & (x,t) \in Q_T, \\ \mathscr{L}_1 \underline{u}_1^{(k)} + M\underline{u}_1^{(k)} = M\underline{u}_1^{(k-1)} + f_1(x,t,\underline{u}_1^{(k-1)}, \bar{u}_2^{(k-1)}), & (x,t) \in Q_T, \\ \mathscr{L}_2 \underline{u}_2^{(k)} + M\underline{u}_2^{(k)} = M\underline{u}_2^{(k-1)} + f_2(x,t,\underline{u}_1^{(k-1)}, \underline{u}_2^{(k-1)}), & (x,t) \in Q_T, \\ B_i \bar{u}_i^{(k)} = g_i(x,t), \quad B_i \underline{u}_i^{(k)} = g_i(x,t), \quad i = 1,2, & (x,t) \in S_T, \\ \bar{u}_i(x,0) = \varphi_i(x), \quad \underline{u}_i(x,0) = \varphi_i(x), \quad i = 1,2, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

这样的迭代格式可以保证：若 $\bar{u}_i^{(1)} \leqslant \bar{u}_i^{(0)}, \underline{u}_i^{(1)} \geqslant \underline{u}_i^{(0)}$, 则 $\bar{u}_i^{(k)}$ 单调下降, $\underline{u}_i^{(k)}$ 单调上升 (证明与 4.1 节类似).

我们需要确定初始迭代函数, 使得迭代序列能够收敛到问题 (1.1) 的解. 为此, 引进上、下解 $U(x,t)$ 与 $V(x,t)$, 它们至少与问题 (1.1) 的古典解有相同的光滑性.

定义 4.3.1 设 f_1 是拟单调减少的, f_2 是拟单调增加的, 函数对 $U(x,t) = (\bar{u}_1(x,t), \bar{u}_2(x,t)), V(x,t) = (\underline{u}_1(x,t), \underline{u}_2(x,t))$ 满足 (2.1). 若当 $(x,t) \in Q_T$ 时, 成立

$$\mathscr{L}_1\bar{u}_1 - f_1(x,t,\bar{u}_1,\underline{u}_2) \geqslant 0 \geqslant \mathscr{L}_1\underline{u}_1 - f_1(x,t,\underline{u}_1,\bar{u}_2),$$
$$\mathscr{L}_2\bar{u}_2 - f_2(x,t,\bar{u}_1,\bar{u}_2) \geqslant 0 \geqslant \mathscr{L}_2\underline{u}_2 - f_2(x,t,\underline{u}_1,\underline{u}_2),$$

则称 U 和 V 为问题 (1.1) 的上解和下解.

若问题 (1.2) 是混拟单调的, 也可类似引进上解和下解.

现在取初始迭代函数

$$(\bar{u}_1^{(0)}, \bar{u}_2^{(0)}) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2), \quad (\underline{u}_1^{(0)}, \underline{u}_2^{(0)}) = (\underline{u}_1, \underline{u}_2),$$

按 (3.1) 的方式进行迭代, 则必有

$$\bar{u}_i^{(1)} \leqslant \bar{u}_i^{(0)}, \quad \underline{u}_i^{(1)} \geqslant \underline{u}_i^{(0)},$$

从而有

$$\underline{u}_i \leqslant \underline{u}_i^{(1)} \leqslant \underline{u}_i^{(2)} \leqslant \cdots \leqslant \underline{u}_i^{(k)} \leqslant \bar{u}_i^{(k)} \leqslant \cdots \leqslant \bar{u}_i^{(2)} \leqslant \bar{u}_i^{(1)} \leqslant \bar{u}_i.$$

于是存在极限:

$$\lim_{k\to\infty} \bar{u}_i^{(k)} = \tilde{u}_i(x,t), \quad \lim_{k\to\infty} \underline{u}_i^{(k)} = \hat{u}_i(x,t), \quad i=1,2.$$

从迭代过程 (3.1) 容易看出, $\tilde{u}_i \geqslant \hat{u}_i$, $i=1,2$, 而且还满足

$$\begin{cases} \mathscr{L}_1\tilde{u}_1 = f_1(x,t,\tilde{u}_1,\hat{u}_2), & (x,t) \in Q_T, \\ \mathscr{L}_2\tilde{u}_2 = f_2(x,t,\tilde{u}_1,\tilde{u}_2), & (x,t) \in Q_T, \\ \mathscr{L}_1\hat{u}_1 = f_1(x,t,\hat{u}_1,\tilde{u}_2), & (x,t) \in Q_T, \\ \mathscr{L}_2\hat{u}_2 = f_2(x,t,\hat{u}_1,\hat{u}_2), & (x,t) \in Q_T, \\ B_i\tilde{u}_i = B_i\hat{u}_i = g_i(x,t), \quad i=1,2, & (x,t) \in S_T, \\ \tilde{u}_i(x,0) = \hat{u}_i(x,0) = \varphi_i(x), \quad i=1,2, & x \in \Omega. \end{cases}$$

同于定理 4.2.7, 可证

$$\tilde{u}_1 = \hat{u}_1 = u_1, \quad \tilde{u}_2 = \hat{u}_2 = u_2,$$

从而 (u_1,u_2) 是问题 (1.1) 的解.

引理 4.3.2 设问题 (1.1) 存在有序的上、下解

$$V(x,t)\leqslant U(x,t),$$

在 $\bar{Q}_T\times\Sigma_V^U$ 上 f_1 拟单调减少, f_2 拟单调增加, 同时满足 (1.5), 则 $\tilde{u}_i=\hat{u}_i,\ i=1,2.$

证明 与定理 4.2.7 类似可证.

与拟单调增加或减少情形类似, 有

定理 4.3.3 设 $\{f_1,f_2\}$ 在 Σ 上是混拟单调的, 并满足 (1.5). 当 $(x,t)\in\bar{Q}_T$ 时, $U(x,t),V(x,t)\in\Sigma$, 并且 U,V 是问题 (1.1) 的上、下解, 则

(1) $V(x,t)\leqslant U(x,t),\ (x,t)\in\bar{Q}_T$. 同时当 $V_i(x,0)\not\equiv U_i(x,0)$ 时, 还有 $V_i(x,t)<U_i(x,t),\ (x,t)\in Q_T$;

(2) 在 $[V(x,t),U(x,t)]$ 中问题 (1.1) 存在唯一解 $u(x,t)$.

证明 与定理 4.2.7 的证明类似, 可证结论 (1) 以及问题 (1.1) 存在解 $u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t))$, 其中 $u_i(x,t)=\tilde{u}_i(x,t)=\hat{u}_i(x,t)$, 并且还满足

$$V(x,t)\leqslant u(x,t)\leqslant U(x,t).$$

再证唯一性. 如果还有一个解 $u^*(x,t)=(u_1^*(x,t),u_2^*(x,t))$ 满足

$$V(x,t)\leqslant u^*(x,t)\leqslant U(x,t),$$

显然 $\underline{u}_i^{(0)}\leqslant u_i^*\leqslant\bar{u}_i^{(0)},\ i=1,2$. 若

$$\underline{u}_i^{(k)}\leqslant u_i^*\leqslant\bar{u}_i^{(k)},\tag{3.2}$$

则易证 $\underline{u}_i^{(k+1)}\leqslant u_i^*\leqslant\bar{u}_i^{(k+1)}$. 于是, 对所有 k, 关系式 (3.2) 成立. 令 $k\to\infty$ 得 $u_i^*=u_i$, 唯一性成立. 证毕.

定理 4.3.4 设 $\{f_1(u_1,u_2),f_2(u_1,u_2)\}$ 在 Σ 上是混拟单调的, 并满足 (1.5). 当 $x\in\bar{\Omega}$ 时, $U(x),V(x)\in\Sigma$ 且是问题 (1.2) 的上、下解. 如果 $V(x)\leqslant U(x)$, 则问题 (1.2) 至少存在一个解 $u(x)$, 并且满足

$$V(x)\leqslant u(x)\leqslant U(x).$$

证明 对任意 $v=(v_1(x),v_2(x))\in C^\alpha(\bar{\Omega})\times C^\alpha(\bar{\Omega})$, $V(x)\leqslant v(x)\leqslant U(x)$, 考察线性问题

$$\begin{cases}L_iu_i+Mu_i=Mv_i+f_i(v_1,v_2), & x\in\Omega,\\ B_iu_i=g_i(x), & x\in\partial\Omega,\quad i=1,2.\end{cases}$$

它有唯一解 $u=(u_1,u_2)\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})\times C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, 由此定义一个算子 $T: u=Tv$. 取 $E=C^{\alpha}(\bar{\Omega})\times C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, 它是 Banach 空间. 对任意 $u=(u_1,u_2)\in E$, 它的范数是

$$\|u\|_E=\max(|u_1|_\alpha,|u_2|_\alpha).$$

(1) 先证 T 映 E 中的某闭凸集到自身.

由上、下解的定义及方程式的最大值原理得

$$V(x)\leqslant u=Tv\leqslant U(x).$$

由嵌入定理及椭圆型方程式边值问题解的 L_p 估计得知, 存在常数 M_1 使得

$$|u_i|_\alpha\leqslant M_1,\quad i=1,2.$$

令

$$S=\{v=(v_1,v_2): V(x)\leqslant v(x)\leqslant U(x),\ v\in E,\ \|v\|_E\leqslant M_1\},$$

则 S 是 E 中的闭凸集且 $T(S)\subset S$.

(2) 再证 T 是 E 上的紧算子.

对任意 $v,v^*\in E$, 记 $u=Tv,u^*=Tv^*$, 并令 $w=u-u^*$, 则有

$$\begin{cases} L_iw_i+Mw_i=M(v_i-v_i^*)+f_i(v_1,v_2)-f_i(v_1^*,v_2^*), & x\in\Omega,\\ B_iw_i=0,\quad i=1,2, & x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

由 L_p 估计得

$$\|w_i\|_{2,p}\leqslant C_1\sum_{i=1}^{2}|v_i-v_i^*|_\alpha,$$

其中 $p\geqslant n$ 可任意给定. 再由嵌入定理得

$$|w_i|_\alpha\leqslant C_2\|w_i\|_{1,p}\leqslant C_2\sum_{i=1}^{2}|v_i-v_i^*|_\alpha,$$

因此 T 在 E 上连续. 同样, 由 L_p 估计与嵌入定理知, 对 E 中任意有界集 G, $T(G)$ 是 $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})\times C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ 中的有界集, 故是 E 中的列紧集. 这就证明了 T 是 E 上的紧算子.

由 Schauder 不动点定理知, T 在 S 中存在不动点, 它就是问题 (1.2) 的解. 证毕.

注 3.1 与问题 (1.1) 不同, 对于问题 (1.2), 不能利用单调迭代的方法来处理, 因为单调迭代方法得到的极限不是问题 (1.2) 的解. 有兴趣的读者不妨试一试, 看看单调迭代方法得到的是什么结果.

4.4 非拟单调的情形

在实际问题中还常常遇到 $\{f_1, f_2\}$ 是非拟单调的情形, 这时不能保证上面给出的迭代序列的单调性. 先讨论抛物型方程的初边值问题 (1.1). 对于 $v = (v_1, v_2) \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T) \times C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$, 线性问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}_i u_i + M u_i = M v_i + f_i(x,t,v_1,v_2), & (x,t) \in Q_T, \\ B_i u_i = g_i(x,t), & (x,t) \in S_T, \\ u_i(x,0) = \varphi_i(x), & x \in \Omega, \quad i = 1,2 \end{cases} \tag{4.1}$$

总有唯一解 $u = (u_1, u_2)$, 由此确定了一个算子 T:

$$u = Tv.$$

若 T 有不动点, 则问题 (1.1) 存在解 $u(x,t)$. 为了利用 Schauder 不动点定理证明 T 存在不动点, 首先要给出问题 (4.1) 解的先验估计. 为此考虑问题 (1.1) 的辅助问题:

$$\begin{cases} \mathscr{L}_i u_i = H_i(x,t,u_1,u_2), & (x,t) \in Q_T, \\ B_i u_i = g_i(x,t), & (x,t) \in S_T, \\ u_i(x,0) = \varphi_i(x), & x \in \Omega, \quad i = 1,2 \end{cases} \tag{4.2}$$

和

$$\begin{cases} \mathscr{L}_i u_i = h_i(x,t,u_1,u_2), & (x,t) \in Q_T, \\ B_i u_i = g_i(x,t), & (x,t) \in S_T, \\ u_i(x,0) = \varphi_i(x), & x \in \Omega, \quad i = 1,2, \end{cases} \tag{4.3}$$

其中, 当 $(x,t,u_1,u_2) \in Q_T \times \Sigma$ 时,

$$h_i(x,t,u_1,u_2) \leqslant f_i(x,t,u_1,u_2) \leqslant H_i(x,t,u_1,u_2), \quad i = 1,2,$$

Σ 是 (u_1,u_2) 平面中某子集. 分别称问题 (4.2) 和问题 (4.3) 为问题 (1.1) 的上控制与下控制问题. 总假定问题 (4.2) 和问题 (4.3) 是拟增 (减) 或混拟单调的. 这样, 就可以对问题 (1.1) 采用另外的方式引进上、下解 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$, 以保证问题 (1.1) 有解.

定义 4.4.1 设 (H_1, H_2) 在 Σ 上拟增, (h_1, h_2) 在 Σ 上拟减, 当 $(x,t) \in \bar{Q}_T$ 时, $(\bar{u}_1, \bar{u}_2), (\underline{u}_1, \underline{u}_2) \in \Sigma$, 并满足

$$\begin{cases} \mathscr{L}_1 \bar{u}_1 - H_1(x,t,\bar{u}_1,\bar{u}_2) \geqslant 0 \geqslant \mathscr{L}_1 \underline{u}_1 - h_1(x,t,\underline{u}_1,\bar{u}_2), \\ \mathscr{L}_2 \bar{u}_2 - H_2(x,t,\bar{u}_1,\bar{u}_2) \geqslant 0 \geqslant \mathscr{L}_2 \underline{u}_2 - h_2(x,t,\bar{u}_1,\underline{u}_2), \\ (x,t) \in Q_T, \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} B_i\bar{u}_i \geqslant g_i(x,t) \geqslant B_i\underline{u}_i, & (x,t)\in S_T, \\ \bar{u}_i(x,0) \geqslant \varphi_i(x) \geqslant \underline{u}_i(x,0), & x\in\Omega, \quad i=1,2. \end{cases} \tag{4.5}$$

则分别称 $(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$ 和 $(\underline{u}_1,\underline{u}_2)$ 为问题 (1.1) 的上解和下解.

定义 4.4.2 设 H_1,h_1 在 Σ 上拟增, H_2,h_2 在 Σ 上拟减. 当 $(x,t)\in\bar{Q}_T$ 时, $(\bar{u}_1,\bar{u}_2),(\underline{u}_1,\underline{u}_2)\in\Sigma$, 并满足 (4.5) 和

$$\mathscr{L}_1\bar{u}_1 - H_1(x,t,\bar{u}_1,\bar{u}_2) \geqslant 0 \geqslant \mathscr{L}_1\underline{u}_1 - h_1(x,t,\underline{u}_1,\underline{u}_2), \quad (x,t)\in Q_T,$$

$$\mathscr{L}_2\bar{u}_2 - H_2(x,t,\underline{u}_1,\bar{u}_2) \geqslant 0 \geqslant \mathscr{L}_2\underline{u}_2 - h_2(x,t,\bar{u}_1,\underline{u}_2), \quad (x,t)\in Q_T.$$

则分别称 $(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$ 和 $(\underline{u}_1,\underline{u}_2)$ 为 (1.1) 的上解和下解.

对其他情形可类似定义.

假定: 在 Σ 上, (H_1,H_2) 和 (h_1,h_2) 与 (f_1,f_2) 一样满足 (1.5), 并取相同的 Lipschitz 常数 M.

令 $U(x,t)=(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$, $V(x,t)=(\underline{u}_1,\underline{u}_2)$, 易证: 若 $V(x,t)\leqslant v(x,t)\leqslant U(x,t)$, 则 $V(x,t)\leqslant u(x,t)=Tv\leqslant U(x,t)$. 由嵌入定理及线性抛物型方程解的 L_p 估计知, 存在常数 M_1, 使得 $u=Tv\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ 且

$$|u_i|^{(\alpha+\frac{\alpha}{2})}\leqslant M_1.$$

令

$$E=C(\bar{Q}_T)\times C(\bar{Q}_T),$$

$$S=\{v:\, v\in E,\ V\leqslant v\leqslant U,\ |v_i|^{(\alpha+\frac{\alpha}{2})}\leqslant M_1\},$$

则 $T(S)\subset S$, 且在空间 E 中, T 在 S 上是紧算子. 因此, T 存在不动点, 即问题 (1.1) 存在解. 由此即得

定理 4.4.3 如果问题 (1.1) 存在如上方式定义的上、下解 $U(x,t)$ 和 $V(x,t)$, 并且 $V(x,t)\leqslant U(x,t)$, 则问题 (1.1) 至少存在一个解 $u(x,t)$, 还满足:

$$V(x,t)\leqslant u(x,t)\leqslant U(x,t).$$

对问题 (1.2) 可类似引进上、下控制问题. 若问题 (1.2) 是非拟单调的, 并且它的上、下控制问题是拟增 (减) 或混拟单调的, 也可类似引进上、下解从而建立与定理 4.4.3 相应的存在性定理.

一般按照下面的方式引进上、下控制问题. 假设当 $(x,t)\in\bar{Q}_T$ 时, $\underline{u}_1(x,t)\leqslant\bar{u}_1(x,t)$, $\underline{u}_2(x,t)\leqslant\bar{u}_2(x,t)$. 令

$$H_1^+(x,t,u_1,u_2)=\sup_{\underline{u}_2\leqslant\eta\leqslant u_2} f_1(x,t,u_1,\eta),\quad H_1^-(x,t,u_1,u_2)=\sup_{u_2\leqslant\eta\leqslant\bar{u}_2} f_1(x,t,u_1,\eta),$$

$$H_2^+(x,t,u_1,u_2)=\sup_{\underline{u}_1\leqslant\xi\leqslant u_1} f_2(x,t,\xi,u_2),\quad H_2^-(x,t,u_1,u_2)=\sup_{u_1\leqslant\xi\leqslant\bar{u}_1} f_2(x,t,\xi,u_2),$$

$$h_1^+(x,t,u_1,u_2)=\inf_{u_2\leqslant\eta\leqslant\bar{u}_2} f_1(x,t,u_1,\eta),\quad h_1^-(x,t,u_1,u_2)=\inf_{\underline{u}_2\leqslant\eta\leqslant u_2} f_1(x,t,u_1,\eta),$$

$$h_2^+(x,t,u_1,u_2)=\inf_{u_1\leqslant\xi\leqslant\bar{u}_1} f_2(x,t,\xi,u_2),\quad h_2^-(x,t,u_1,u_2)=\inf_{\underline{u}_1\leqslant\xi\leqslant u_1} f_2(x,t,\xi,u_2).$$

容易看出, 在 $[\underline{u}_1,\bar{u}_1]\times[\underline{u}_2,\bar{u}_2]$ 上, $\{H_1^+,H_2^+\}$ 与 $\{h_1^+,h_2^+\}$ 拟增, 而 $\{H_1^-,H_2^-\}$ 与 $\{h_1^-,h_2^-\}$ 拟减.

引理 4.4.4 设 f_1,f_2 在 $\bar{Q}_T\times[\underline{u}_1,\bar{u}_1]\times[\underline{u}_2,\bar{u}_2]$ 上满足条件 (1.5), 那么上面定义的函数 $H_1^\pm$, $H_2^\pm$, $h_1^\pm$ 和 $h_2^\pm$ 也都满足条件 (1.5).

只对一种特殊形式给出证明, 即下面的

引理 4.4.5 设 $\Sigma=\bigcap\limits_{i=1}^m[a_i,b_i],-\infty<a_i<b_i<\infty$, 又设 $P(x,t,u)$ 满足: 当 $(x,t),(y,s)\in\bar{Q}_T$, $u,v\in\Sigma$ 时, 有

$$|P(x,t,u)-P(y,s,v)|\leqslant k[|x-y|^\alpha+|t-s|^{\alpha/2}+|u-v|].$$

令

$$P^+(x,t,u)=\sup\{P(x,t,u_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)|\,a_i\leqslant\xi_i\leqslant u_i,\ i=2,\cdots,m\},$$

则 P^+ 也满足

$$|P^+(x,t,u)-P^+(y,s,v)|\leqslant k\big(|x-y|^\alpha+|t-s|^{\alpha/2}+|u-v|\big). \tag{4.6}$$

证明 不妨认为 $a_i=0$, $i=1,\cdots,m$. 对 $u\in\Sigma$, 令

$$A_u=\{\xi\in\mathbb{R}^m|\,\xi_1=u_1,\ 0\leqslant\xi_i\leqslant u_i,\ i=2,\cdots,m\},$$

则

$$P^+(x,t,u)=\sup_{\xi\in A_u}P(x,t,\xi).$$

因为 A_u 是紧集, P 连续, 因此存在 $\xi'\in A_u$, 使得

$$P^+(x,t,u)=P(x,t,\xi').$$

设 $u,v\in\Sigma$, 令

$$\xi'_{0j}=\max(0,\xi'_j+v_j-u_j),\quad i=1,\cdots,m,$$

并记 $\xi'_0=(\xi'_{01},\cdots,\xi'_{0m})$. 注意到

$$|\xi'_0-\xi'|^2=\sum_{j=1}^m[\xi'_j-\max\{0,\xi'_j+v_j-u_j\}]^2,$$

易见 $\xi_0' \in A_v$. 若 $\xi_j' + v_j - u_j \geqslant 0$, 则 $\xi_j' - \max\{0, \xi_j' + v_j - u_j\} = u_j - v_j$; 若 $\xi_j' + v_j - u_j < 0$, 则 $\xi_j' - \max\{0, \xi_j' + v_j - u_j\} = \xi_j' < u_j - v_j$. 于是有

$$|\xi_0' - \xi'| \leqslant |u - v|.$$

因此,

$$\begin{aligned} P^+(x,t,u) - P^+(x,t,v) &= \sup_{\xi \in A_u} P(x,t,\xi) - \sup_{\xi \in A_v} P(x,t,\xi) \\ &\leqslant P(x,t,\xi') - P(x,t,\xi_0') \\ &\leqslant k|\xi' - \xi_0'| \leqslant k|u - v|. \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} P^+(x,t,u) - P^+(y,s,v) &= P^+(x,t,u) - P^+(y,s,u) + P^+(y,s,u) - P^+(y,s,v), \\ P^+(x,t,u) - P^+(y,s,u) &\leqslant k[|x-y|^\alpha + |t-s|^{\alpha/2}], \end{aligned}$$

所以 (4.6) 成立. 证毕.

由引理 4.4.4 及定理 4.4.3 可得

定理 4.4.6　设 $(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \leqslant (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ 在 $\bar{Q}_T$ 连续, 满足 (4.5) 和

$$\mathscr{L}_i \bar{u}_i - H_i^+(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \geqslant 0 \geqslant \mathscr{L}_i \underline{u}_i - h_i^+(\underline{u}_1, \underline{u}_2), \quad i = 1, 2,$$

函数 f_1, f_2 在 $\bar{Q}_T \times [\underline{u}_1, \underline{u}_2] \times [\bar{u}_1, \bar{u}_2]$ 满足条件 (1.5). 则问题 (1.1) 存在解 $u(x,t)$, 且满足

$$(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \leqslant u(x,t) \leqslant (\bar{u}_1, \bar{u}_2).$$

注 4.1　实际上可以进一步证明: 在定理 4.4.6 的条件下, 问题 (1.1) 的解是唯一的, 参见 [Lia].

注 4.2　在定理 4.4.6 中, 上、下控制系统都是拟增的. 对于上、下控制系统是拟减或混拟单调的情形也有类似的结论.

注 4.3　对于椭圆型边值问题也有类似的结论.

Hernandez ([Her]) 对问题 (1.2) (不必要求是拟单调的) 给出了上、下解的如下定义:

定义 4.4.7　设 $(\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x)), (\underline{u}_1(x), \underline{u}_2(x))$ 具有古典解的光滑性, 它们称为问题 (1.2) 的上、下解, 如果

$$\begin{aligned} &(\underline{u}_1(x), \underline{u}_2(x)) \leqslant (\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x)), && x \in \Omega, \\ &L_1 \underline{u}_1 - f_1(x, \underline{u}_1, u_2) \leqslant 0 \leqslant L_1 \bar{u}_1 - f_1(x, \bar{u}_1, u_2), && x \in \Omega, \quad u_2 \in [\underline{u}_2, \bar{u}_2], \\ &L_2 \underline{u}_2 - f_2(x, u_1, \underline{u}_2) \leqslant 0 \leqslant L_2 \bar{u}_2 - f_2(x, u_1, \bar{u}_2), && x \in \Omega, \quad u_1 \in [\underline{u}_1, \bar{u}_2], \\ &B_i \underline{u}_i|_{\partial\Omega} \leqslant g_i \leqslant B_i \bar{u}_i|_{\partial\Omega}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

对于问题 (1.1), 文献 [Her] 中也给出了类似的定义, 在这种定义下也有相应的解的存在性定理.

注 4.4 如果存在文献 [Her] 中定义的这种上、下解, 那么一定可构造出上、下控制系统, 它们可以是拟增的, 可以是拟减的, 也可以是混拟单调的. 这种上解 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ 和下解 $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ 也是前面定义的控制系统的上解和下解.

4.5 上、下解的构造

本节通过一些具体例子说明常见的构造上、下解的方法, 从而可以利用上、下解来证明初边值问题整体解的存在性, 甚至可证明平衡解的稳定性.

例 1 在 Belousov-Zhabotinski 反应的简化模型中, 两种反应物无量纲化后的浓度满足

$$\begin{cases} u_t - \nabla\cdot(D_1\nabla u) = u(a - bu - cv), & (x,t)\in Q_\infty, \\ v_t - \nabla\cdot(D_2\nabla v) = -c_1uv, & (x,t)\in Q_\infty, \\ B_1u = g_1(x) \geqslant 0, \quad B_2v = g_2(x)\geqslant 0, & (x,t)\in S_\infty, \\ u(x,0) = \varphi(x)\geqslant 0, \quad v(x,0) = \psi(x)\geqslant 0, & x\in\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

其中 $D_i(x), g_i(x)$ 是正函数, a, b, c, c_1 是正常数,

$$f_1(u,v) = u(a - bu - cv), \quad f_2(u,v) = -c_1uv.$$

当 $u\geqslant 0, v\geqslant 0$ 时, $\{f_1, f_2\}$ 是拟减的, 并且在 (u,v) 的任意有限区域内, f_1, f_2 是 Lipschitz 连续的.

现在构造问题 (5.1) 的非负有序上、下解 $(\bar{u},\bar{v})$ 和 $(\underline{u}, \underline{v})$:

$$\begin{cases} \bar{u}_t - \nabla\cdot(D_1\nabla\bar{u}) - \bar{u}(a - b\bar{u} - c\underline{v}) \geqslant 0 \\ \qquad\qquad \geqslant \underline{u}_t - \nabla\cdot(D_1\nabla\underline{u}) - \underline{u}(a - b\underline{u} - c\bar{v}), & (x,t)\in Q_\infty, \\ \bar{v}_t - \nabla\cdot(D_2\nabla\bar{v}) + c_1\underline{u}\bar{v} \geqslant 0 \geqslant \underline{v}_t - \nabla\cdot(D_2\nabla\underline{v}) + c_1\bar{u}\underline{v}, & (x,t)\in Q_\infty, \\ B_1\bar{u}\geqslant g_1(x)\geqslant B_1\underline{u}, \quad B_2\bar{v}\geqslant g_2(x)\geqslant B_2\underline{v}, & (x,t)\in S_\infty, \\ \bar{u}(x,0)\geqslant\varphi(x)\geqslant\underline{u}(x,0), \quad \bar{v}(x,0)\geqslant\psi(x)\geqslant\underline{v}(x,0), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{5.2}$$

4.5.1 常数上、下解

假定当边界条件是 (1.4) 时, $b_i(x) > 0$ $(x\in\partial\Omega)$. 令 $(\bar{u}_1,\bar{u}_2) = (M_1, M_2) > (0,0)$, $(\underline{u}_1,\underline{u}_2) = (0,0)$. 要求它们满足 (5.2), 只需

$$-M_1(a - bM_1)\geqslant 0, \quad M_1\geqslant\max\{\varphi_M, \bar{h}_1\}, \quad M_2\geqslant\max\{\psi_M, \bar{h}_2\},$$

其中

$$\varphi_M = \max_{\bar{\Omega}} \varphi(x), \quad \psi_M = \max_{\bar{\Omega}} \psi(x), \quad \bar{h}_i = \sup_{\partial\Omega} \frac{g_i(x)}{b_i(x)} > 0.$$

取

$$M_1 = \max\{a/b,\ \bar{h}_1,\ \varphi_M\}, \quad M_2 = \max\{\bar{h}_2,\ \psi_M\},$$

则 $(\bar{u}, \bar{v}) = (M_1, M_2)$, $(\underline{u}, \underline{v}) = (0, 0)$ 是问题 (5.1) 的非负有序上、下解.

注意, 当边界条件是 (1.4) 且 $b_i(x)$ 在边界上某些点处取零值时, 上述方法不适用.

4.5.2　转化为求解偏微分方程式

现选取 $(\bar{u}, \bar{v}) > (0, 0)$, $(\underline{u}, \underline{v}) = (0, 0)$, 使之满足 (5.2), 即

$$\begin{cases} \bar{u}_t - \nabla \cdot (D_1 \nabla \bar{u}) \geqslant \bar{u}(a - b\bar{u})), & (x, t) \in Q_\infty, \\ \bar{v}_t - \nabla \cdot (D_2 \nabla \bar{v}) \geqslant 0, & (x, t) \in Q_\infty, \\ B_i \bar{u} \geqslant g_1(x), \quad B_2 \bar{v} \geqslant g_2(x), & (x, t) \in S_\infty, \\ \bar{u}(x, 0) \geqslant \varphi(x), \quad \bar{v}(x, 0) \geqslant \psi(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{5.3}$$

令 $\bar{u} = K_1 + w_1(x)$, 其中 $w_1(x)$ 是边值问题

$$-\nabla \cdot (D_1 \nabla w_1) = 0, \quad x \in \Omega; \quad B_1 w_1 = g_1(x), \quad x \in \partial\Omega$$

的解. 当 $b_1(x) \not\equiv 0$ 时, 上述问题有唯一解 $w_1(x) \geqslant 0$. 这样的 $\bar{u}$ 满足

$$\bar{u}_t - \nabla \cdot (D_1 \nabla \bar{u}) = 0, \quad \bar{u}(a - b\bar{u}) = (w_1 + K_1)[(a - b(w_1 + K_1)].$$

取 $K_1 \geqslant \max\{\varphi_M, a/b\}$, 则 $\bar{u} = K_1 + w_1(x)$ 满足 (5.3) 中的第一式、第三和第四式中的第一个不等式. 同样, 令 $\bar{v} = K_2 + w_2(x)$, 其中 $w_2(x)$ 是边值问题

$$-\nabla \cdot (D_2 \nabla w_2) = 0, \quad x \in \Omega; \quad B_2 w_2 = g_2(x), \quad x \in \partial\Omega$$

的唯一解 (当 $b_2(x) \not\equiv 0$ 时), 则 $w_2(x) \geqslant 0$. 若 $K_2 \geqslant \psi_M$, 则 v 满足 (5.3) 的第二式、第三和第四式中的第二个不等式. 因此

$$(\bar{u}, \bar{v}) = (K_1 + w_1(x), K_2 + w_2(x)), \quad (\underline{u}, \underline{v}) = (0, 0)$$

分别是问题 (5.1) 的非负上解和非负下解.

4.5.3 利用第一特征值和对应的特征函数求上、下解

当 $g_1(x) = g_2(x) = 0$ 时, 取 $(\bar{u},\bar{v}) = (p_1(t)\varphi_1(x), p_2(t)\varphi_2(x))$, $(\underline{u},\underline{v}) = (0,0)$, 使之满足 (5.2), 其中 $\varphi_i(x)$ 是

$$-\nabla\cdot(D_i\nabla u(x)) = \lambda u(x), \quad x\in\Omega; \quad B_i u = 0, \quad x\in\partial\Omega$$

的最小特征值 λ_i 所对应的特征函数. 当 $b_i(x)\not\equiv 0$ 时, $\lambda_i > 0$.

为此, 只需要求

$$\begin{aligned} &p_1' + (\lambda_1 - a)p_1 = 0, \qquad && p_1(0)\varphi_1(x) \geqslant \varphi(x),\\ &p_2' + \lambda_2 p_2 = 0, && p_2(0)\varphi_2(x) \geqslant \psi(x). \end{aligned}$$

令

$$(\bar{u},\bar{v}) = (\rho_1 \mathrm{e}^{-(\lambda_1-a)t}\varphi_1(x),\ \rho_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\varphi_2(x)), \quad (\underline{u},\underline{v}) = (0,0),$$

其中 ρ_1,ρ_2 是任意给定的正数. 若

$$0\leqslant\varphi(x)\leqslant\rho_1\varphi_1(x), \quad 0\leqslant\psi(x)\leqslant\rho_2\varphi_2(x),$$

则 $(\bar{u},\bar{v})$, $(\underline{u},\underline{v})$ 是问题 (5.1) 的有序非负上、下解.

总结上面的讨论, 得到

定理 4.5.1 设 $\varphi(x)\geqslant 0$, $\psi(x)\geqslant 0$, $g_i(x)\geqslant 0$, $b_i(x)\not\equiv 0$ $(i=1,2)$, 则存在正常数 M_1, M_2, 使得问题 (5.1) 有唯一正解, 且满足

$$0\leqslant u(x,t)\leqslant M_1, \quad 0\leqslant v(x,t)\leqslant M_2.$$

此外, 若 $g_1(x) = g_2(x) = 0$, $0\leqslant\varphi(x)\leqslant\rho_1\varphi_1(x)$, $0\leqslant\psi(x)\leqslant\rho_2\varphi_2(x)$, 则

$$0\leqslant u(x,t)\leqslant\rho_1\mathrm{e}^{-(\lambda_1-a)t}\varphi_1(x), \quad 0\leqslant v(x,t)\leqslant\rho_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\varphi_2(x).$$

定理 4.5.1 指出: 当 $a<\lambda_1$ 时, 零平衡解是指数渐近稳定的.

4.5.4 利用常微分方程组的解作上、下解

最后考察问题 (5.1) 带有齐次 Neumann 边界条件的情形, 即

$$B_1 u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad B_2 v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0.$$

这时 (5.1) 有非负常数平衡解: $(a/b, 0)$ 和 $(0,\mu)$, 其中 $\mu\geqslant 0$ 是任意常数. 在这种情形, 只依赖于 t 的函数自然满足边界条件. 因此可取常微分方程组的解作为上、下解.

考察常微分方程组的初值问题

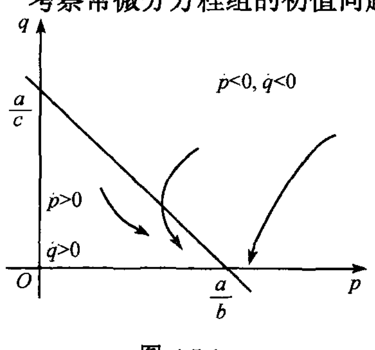


图 4.5.1

$$\begin{cases} p' = p(a - bp - cq), \\ q' = -c_1 qp, \\ p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0. \end{cases} \tag{5.4}$$

根据相平面上的向量场分布图 (图 4.5.1) 易知: 只要 $p_0 > 0$, $q_0 \geqslant 0$, 则问题 (5.4) 的解满足

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = a/b, \quad \lim_{t\to\infty} q(t) = 0.$$

把 (5.4) 的解记为 $p(t; p_0, q_0)$, $q(t; p_0, q_0)$.

令

$$\min_{\bar\Omega} \varphi(x) = \varphi_m, \quad \max_{\bar\Omega} \varphi(x) = \varphi_M,$$
$$\min_{\bar\Omega} \psi(x) = \psi_m, \quad \max_{\bar\Omega} \psi(x) = \psi_M.$$

先设 $\varphi_m > 0$, 则 $(p(t; \varphi_M, \psi_m),\ q(t; \varphi_m, \psi_M))$ 和 $(p(t; \varphi_m, \psi_M),\ q(t; \varphi_M, \psi_m))$ 是问题 (5.1) 的非负有序上、下解, 于是问题 (5.1) 存在唯一解 $(u(x,t), v(x,t))$:

$$p(t; \varphi_m, \psi_M) \leqslant u(x,t) \leqslant p(t; \varphi_M, \psi_m),$$
$$q(t; \varphi_M, \psi_m) \leqslant v(x,t) \leqslant q(t; \varphi_m, \psi_M).$$

由此立即得到

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = a/b, \quad \lim_{t\to\infty} v(x,t) = 0.$$

若 $\varphi_m = 0$, 只要 $\varphi(x) \not\equiv 0$, 则当 $t > 0$ 时, $u(x,t) > 0$. 取 $\delta > 0$, 则 $\min_{\bar\Omega} u(x,\delta) > 0$. 以此为初值仍可证明

定理 4.5.2 设 $B_1 u = \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$, $B_2 v = \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} = 0$. 若 $\varphi(x) \geqslant 0$, $\not\equiv 0, \psi(x) \geqslant 0$, 则问题 (5.1) 存在唯一解 $(u(x,t), v(x,t))$ 满足

$$\lim_{t\to\infty} (u(x,t), v(x,t)) = (a/b,\ 0).$$

此定理表明: 点 $(a/b,\ 0)$ 是全局渐近稳定的, 而点 $(0, \mu)$ 是不稳定的.

关于问题 (5.1) 的非负平衡解的稳定性的讨论, 可参看 [Pao1, 187-191].

例 2 在生物学中, 满足 Michaelis-Menten 饱和定律的一个简单的双分子自催化反应扩散模型是

$$\begin{cases} u_t - D_1 u_{xx} = uv - \dfrac{u}{1+qu} = f_1(u,v), & 0<x<1, \quad t>0, \\ v_t - D_2 v_{xx} = -uv + A = f_2(u,v), & 0<x<1, \quad t>0, \\ u(0,t) = u(1,t) = u_0, & t>0, \\ v(0,t) = v(1,t) = v_0, & t>0, \\ u(x,0) = \varphi(x) \geqslant 0, \quad v(x,0) = \psi(x) \geqslant 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{5.5}$$

其中 u, v, A 都表示浓度, 是非负的, A 是正常数, $q>0$ 是参数, 满足 $0<qA<1$, u_0, v_0 是代数方程组

$$uv - \frac{u}{1+qu} = 0, \quad -uv + A = 0$$

的解, 即 $u_0 = A/v_0$, $v_0 = 1 - qA$.

因为当 $u \geqslant 0, v \geqslant 0$ 时,

$$\frac{\partial f_1}{\partial v} = u \geqslant 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = -v \leqslant 0,$$

所以 $\{f_1, f_2\}$ 是混拟单调的. 在 $u \geqslant 0, v \geqslant 0$ 的任意有界区域上, f_1, f_2 是 Lipschitz 连续的.

现在要找非负有序的上、下解对 $(\bar{u}, \bar{v})$ 和 $(\underline{u}, \underline{v})$ 满足

$$\begin{cases} \bar{u}_t - D_1 \bar{u}_{xx} - \bar{u}\bar{v} + \dfrac{\bar{u}}{1+q\bar{u}} \geqslant 0 \geqslant \underline{u}_t - D_1 \underline{u}_{xx} - \underline{u}\,\underline{v} + \dfrac{\underline{u}}{1+q\underline{u}}, \\ \bar{v}_t - D_2 \bar{v}_{xx} + \underline{u}\bar{v} - A \geqslant 0 \geqslant \underline{v}_t - D_2 \underline{v}_{xx} + \bar{u}\underline{v} - A, \\ \bar{u} \geqslant u_0 \geqslant \underline{u}, \ \bar{v} \geqslant v_0 \geqslant \underline{v}, \quad x = 0, 1, \quad t>0, \\ \bar{u} \geqslant \varphi \geqslant \underline{u}, \ \bar{v} \geqslant \psi \geqslant \underline{v}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t = 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

令 $(\underline{u}, \underline{v}) = (0,0)$, 显然它是下解. 令 $\bar{v}$ 是线性问题

$$\begin{cases} \bar{v}_t - D_2 \bar{v}_{xx} - A = 0, \quad 0<x<1, \quad t>0, \\ \bar{v}|_{0,1} = v_0, \quad t>0, \\ \bar{v}|_{t=0} = \psi(x) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

的唯一解 $\bar{v}(x,t)$, 由引理 3.1.8 知 $\bar{v} \geqslant 0$.

求出 $\bar{v}(x,t)$ 后, 再找 $\bar{u}$. 取 $\bar{u}$ 是问题

$$\begin{cases} \bar{u}_t - D_1 \bar{u}_{xx} - \bar{v}(x,t)\bar{u} = 0, \quad 0<x<1, \quad t>0, \\ \bar{u}|_{0,1} = u_0, \quad t>0, \\ \bar{u}|_{t=0} = \varphi(x) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

的唯一解. 由引理 2.1.8 知 $\bar{u} \geqslant 0$, 这样求出的函数对 $(\bar{u}, \bar{v})$ 和 $(\underline{u}, \underline{v}) = (0,0)$ 满足 (5.6), 它们是问题 (5.5) 的有序上、下解. 因此, 问题 (5.5) 至少存在一个非负解.

4.6 非常数平衡解的稳定性

我们也可用上、下解讨论平衡解的稳定性并给出吸引区域, 下面举例说明.

设 $(u_s(x),v_s(x))$ 是问题 (5.5) 的非负平衡解, 即满足

$$\begin{cases} -D_1u_s''=u_sv_s-\dfrac{u_s}{1+qu_s}, & 0<x<1,\\ -D_2v_s''=-u_sv_s+A, & 0<x<1,\\ u_s|_{0,1}=u_0,\quad v_s|_{0,1}=v_0. \end{cases} \tag{6.1}$$

现讨论它的稳定性和吸引区域.

想法极其简单, 欲求两个正函数 $p_1(t),p_2(t)$, 使得

$$\bar{u}=p_1(t)\varphi_1(x)+u_s(x),\qquad \bar{v}=p_2(t)\varphi_1(x)+v_s(x),$$
$$\underline{u}=u_s(x)-p_1(t)\varphi_1(x),\qquad \underline{v}=v_s(x)-p_2(t)\varphi_1(x)$$

正好构成一组有序上、下解对, 其中 $\varphi_1(x)$ 是

$$\begin{cases} -y''=\lambda y,\\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$$

的最小特征值 $\lambda_1=\pi^2$ 所对应的特征函数, $\varphi_1(x)=\sin\pi x$. 有序性是显然的.

逐个考察 $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\underline{u}$ 和 $\underline{v}$ 满足的不等式. 首先, 直接利用函数 $x/(1+qx)$ 关于 $x\geqslant 0$ 的单增性质可知, $\bar{u}/(1+q\bar{u})\geqslant u_s/(1+qu_s)$. 于是

$$(u_s(x)+p_1(t)\varphi_1(x))_t-D_1(u_s(x)+p_1(t)\varphi_1(x))_{xx}$$
$$-(u_s(x)+p_1(t)\varphi_1(x))(v_s(x)+p_2(t)\varphi_1(x))+\frac{\bar{u}}{1+q\bar{u}}\geqslant 0$$

成立的充分条件是

$$p_1'\varphi_1-D_1u_s''-p_1D_1\varphi_1''-u_sv_s+\frac{u_s}{1+qu_s}-(p_1v_s+p_2u_s)\varphi_1-p_1p_2\varphi_1^2\geqslant 0. \tag{6.2}$$

利用 u_s 和 φ_1 满足的方程知, 式 (6.2) 等价于

$$p_1'+\lambda_1D_1p_1-(p_1v_s+p_2u_s)\geqslant p_1p_2\varphi_1. \tag{6.3}$$

同理,

$$(u_s-p_1\varphi_1)_t-D_1(u_s-p_1\varphi_1)_{xx}-(u_s-p_1\varphi_1)(v_s-p_2\varphi_1)+\frac{\underline{u}}{1+q\underline{u}}\leqslant 0$$

成立的充分条件是

$$p_1' + \lambda_1 D_1 p_1 - (p_1 v_s + p_2 u_s) \geqslant -p_1 p_2 \varphi_1.$$

因此, 只要 (6.3) 式成立即可.

再看另外两个不等式. 不等式

$$\begin{aligned} 0 \leqslant &(v_s + p_2\varphi_1)_t - D_2(v_s + p_2\varphi_1)_{xx} - A + (u_s - p_1\varphi_1)(v_s + p_2\varphi_1) \\ =& p_2'\varphi_1 - D_2 v_s'' + \lambda_1 D_2 p_2 \varphi_1 - A + u_s v_s - (p_1 v_s - p_2 u_s)\varphi_1 - p_1 p_2 \varphi_1^2 \end{aligned}$$

成立等价于

$$p_2' + \lambda_1 D_2 p_2 + (p_2 u_s - p_1 v_s) \geqslant p_1 p_2 \varphi_1. \tag{6.4}$$

而当不等式 (6.4) 成立时,

$$0 \geqslant (v_s - p_2\varphi_1)_t - D_2(v_s - p_2\varphi_1)_{xx} - A + (u_s + p_1\varphi_1)(v_s - p_2\varphi_1)$$

显然成立.

若令 $p_1(t) = p_2(t) = p(t)$, 则不等式 (6.3) 和 (6.4) 成立的充分条件为

$$p' + [\lambda_1 D_1 - u_s - v_s]p \geqslant p^2, \quad p' + [\lambda_1 D_2 + u_s - v_s]p \geqslant p^2.$$

若存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\lambda_1 D_1 - u_s - v_s \geqslant \varepsilon, \quad \lambda_1 D_2 + u_s - v_s \geqslant \varepsilon, \tag{6.5}$$

则有充分条件

$$p' + \varepsilon p \geqslant p^2.$$

因此, 可取

$$p' + \varepsilon p = p^2$$

的解

$$p(t) = \frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon} + \left(\dfrac{1}{p(0)} - \dfrac{1}{\varepsilon}\right)\mathrm{e}^{\varepsilon t}}, \tag{6.6}$$

其中 $0 < p(0) < \varepsilon$.

若已知 $u_s \geqslant 0, v_s \geqslant 0$, 易证

$$0 \leqslant u_s \leqslant u_0 + \frac{D_2}{D_1}v_0 + \frac{A}{8D_1},$$

$$0 \leqslant v_s \leqslant v_0 + \frac{D_1}{D_2}u_0 + \frac{A}{8D_2}.$$

于是 (6.5) 成立的充分条件是

$$\begin{cases} \lambda_1 D_1 - u_s - v_s \\ \qquad \geqslant \lambda_1 D_1 - u_0 - v_0 - \dfrac{D_2}{D_1} v_0 - \dfrac{D_1}{D_2} u_0 - \dfrac{A}{8D_1} - \dfrac{A}{8D_2} \geqslant \varepsilon, \\ \lambda_1 D_2 - v_s \geqslant \lambda_1 D_2 - v_0 - \dfrac{D_1}{D_2} u_0 - \dfrac{A}{8D_2} \geqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{6.7}$$

最简单的情形是: 取 $D_1 = D_2 = D$, 则只要 D 充分大, 不等式 (6.7) 一定成立. 这样, 就证明了

定理 4.6.1　设 $(u_s(x), v_s(x))$ 是问题 (5.5) 的非负平衡解, $D_1 = D_2 = D$. 若存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\lambda_1 D - 2(u_0 + v_0) - \frac{A}{4D} \geqslant \varepsilon,$$

则当初值函数 φ, ψ 满足

$$\begin{cases} u_s(x) - p(0)\varphi_1(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant u_s(x) + p(0)\varphi_1(x), \\ v_s(x) - p(0)\varphi_1(x) \leqslant \psi(x) \leqslant v_s(x) + p(0)\varphi_1(x) \end{cases} \tag{6.8}$$

时, 问题 (5.5) 的解 $(u(x,t), v(x,t))$ 满足

$$|u(x,t) - u_s(x)| \leqslant p(t)\varphi_1(x),$$
$$|v(x,t) - v_s(x)| \leqslant p(t)\varphi_1(x),$$

其中 $p(t)$ 由 (6.6) 式给出, $0 < p(0) < \varepsilon$, 即 (u_s, v_s) 是渐近稳定的. 由 (6.8) 确定的初值范围属于问题 (5.5) 的吸引区域.

4.7　评　　注

对于方程组来说, 单调方法的一个特点是: 要求右端函数组 $\{f_i(x,t,u_1,\cdots,u_m)\}$ $(i=1,\cdots,m)$ 即反应项具有某种拟单调性. 记 $u_i^{(k)}$ 为解分量 u_i 的第 k 次迭代, $u_i^{(0)}$ 为迭代初值. 若 $u_i^{(k)} \leqslant u_i^{(k-1)}$ $(u_i^{(k)} \geqslant u_i^{(k-1)})$, 则由拟单调性可得 $u_i^{(k+1)} \leqslant u_i^{(k)}$ $(u_i^{(k+1)} \geqslant u_i^{(k)})$. 为了保证第一次迭代 $u_i^{(1)} \leqslant u_i^{(0)}$ $(u_i^{(1)} \geqslant u_i^{(0)})$, 需引进上、下解, 并以上、下解作为迭代初值. 方程组的单调方法的另一个特点是, 上、下解的定义依赖于右端函数的拟单调性.

本章虽然只对 $m=2$ 的情形进行了论述, 但方法与结论对于 $m>2$ 的情形都是适用的. 设 Σ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子集. 与 $m=2$ 一样, 对于一般的 Σ 中的拟单调系统

$$\begin{cases} \mathscr{L}_i u_i = f_i(x,t,u_1,\cdots,u_m), & (x,t)\in Q_T, \\ B_i u_i = g_i(x,t), & (x,t)\in S_T, \\ u_i(x,0)=\varphi_i(x), & x\in\Omega, \\ i=1,\cdots,m \end{cases}$$

可以引进上、下解.

假设 $\bar{u}=(\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_m)$ 与 $\underline{u}=(\underline{u}_1,\cdots,\underline{u}_m)$ 具有古典解的光滑性, 且当 $(x,t)\in \bar{Q}_T$ 时, $\bar{u},\underline{u}\in\Sigma$, 对于 $i\in\{1,\cdots,m\}$ 满足:

$$(1)\begin{cases} \mathscr{L}_i\bar{u}_i \geqslant f_i(x,t,u_1,\cdots,u_{i-1},\bar{u}_i,u_{i+1},\cdots,u_m), & (x,t)\in Q_T, \\ B_i\bar{u}_i\geqslant g_i(x,t), & (x,t)\in S_T, \\ \bar{u}_i(x,0)\geqslant\varphi_i(x), & x\in\Omega, \end{cases}$$

其中当 $j\neq i$ 时,

$$u_j=\begin{cases} \bar{u}_j, & \text{若 } f_i \text{对 } u_j \text{ 单调上升}, \\ \underline{u}_j, & \text{若 } f_i \text{ 对 } u_j \text{ 单调下降}; \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} \mathscr{L}_i\underline{u}_i \leqslant f_i(x,t,u_1,\cdots,u_{i-1},\underline{u}_i,u_{i+1},\cdots,u_m), & (x,t)\in S_T, \\ B_i\underline{u}_i\leqslant g_i(x,t), & (x,t)\in S_T, \\ \underline{u}_i(x,0)\leqslant\varphi_i(x), & x\in\Omega, \end{cases}$$

其中当 $j\neq i$ 时,

$$u_j=\begin{cases} \bar{u}_j, & \text{若 } f_i \text{ 对 } u_j \text{ 单调下降}, \\ \underline{u}_j, & \text{若 } f_i \text{ 对 } u_j\text{单调上升}. \end{cases}$$

则称 $\bar{u}$ 与 $\underline{u}$ 分别是该系统的上解与下解.

在 $\bar{u}$ 与 $\underline{u}$ 满足的不等式组中有以下情形:

(1) $\bar{u}$ 与 $\underline{u}$ 各自满足一个不等式组 (拟增系统);

(2) $\bar{u}$ 与 $\underline{u}$ 的 $2m$ 个分量可分为两组 (每组 m 个分量), 各自满足一个不等式组 (可作变换化为拟增系统);

(3) $\bar{u}$ 与 $\underline{u}$ 的 $2m$ 个分量满足一个不等式组, 它们必须同时被确定.

对于椭圆形方程组也有类似的定义.

抛物型方程与椭圆型方程的单调方法是类似的, 但它们有以下区别:

(1) 抛物型方程初边值问题的上、下解 $\bar{u}$ 与 $\underline{u}$ 是有序的, 即 $\bar{u}\geqslant\underline{u}$, 而椭圆型方程的边值问题的上、下解一般没有这种有序性;

(2) 对于抛物型方程组而言, 迭代序列的极限一定是定解问题的解, 因为可以利用某一类抛物型方程组的最大值原理. 然而, 对于椭圆方程组 (除了拟增系统及可化为拟增的系统外), 迭代序列的极限不一定是定解问题的解, 因为椭圆型方程组

没有可以利用的最大值原理. 但这时利用 Schauder 不动点定理仍可证明：上、下解的存在性保证解的存在性;

(3) 上、下解的存在性对于抛物型方程的定解问题, 不仅保证解的存在性, 而且还保证解的唯一性. 对于椭圆型方程的定解问题只能保证解的存在性而不能保证唯一性.

对于抛物型方程的初边值问题, 上、下解的存在性不仅保证上、下解之间的解是唯一的, 而且还保证在拟单调区域上解是唯一的. 对拟增系统及可化为拟增系统的情形本章中已证明过, 而对于其他的拟单调系统在 [Lia] 中给出了证明.

不论是抛物型的还是椭圆型的, 如果系统本身不具有拟单调性, 而它的上、下控制系统具有拟单调性, 那么可以把单调方法推广到这种情形. 在 [Lia] 中给出了构造拟单调的上、下控制系统的方法, 并给出了上、下解的定义. 它不仅证明了上、下解的存在保证了原系统解的存在, 而且对抛物型方程组情形还证明了解的唯一性.

利用单调方法可以讨论方程组平衡解的全局稳定性以及方程组的解关于时间 t 的渐近性态. 它有以下几种主要方法.

(1) 转化为讨论相应的常微分方程或低维方程组 (方程式).

在齐次 Neumann 边界条件下, 抛物型方程组的初边值问题常数平衡解的稳定性, 可以转化为讨论相应的常微分方程组平衡点的稳定性. 对于二维拟增 (拟减) 系统, 可归结为常微平面系统并利用 Poincaré-Bendixson 定理来讨论. 至于二维混拟单调系统, 可归结为四维的常微系统.

高维情形, 如三维拟增系统或可化为拟增系统的系统或其他拟单调系统的讨论, 可参见 [Li1-2]. 有些高维方程组可以转化为方程式或者低维方程组来讨论，文献 [LYY] 给出了这方面的一个例子.

(2) 基于相应的椭圆型方程边值问题的上、下解的判别方法.

考察

$$\begin{cases} \mathscr{L}_i u_i = f_i(x, u_1, u_2), & (x,t) \in Q_\infty, \\ B_i u_i = g_i(x), & (x,t) \in S_\infty, \\ u_i(x,0) = \varphi_i(x), \quad i = 1,2, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{7.1}$$

及相应的椭圆型方程组的边值问题

$$\begin{cases} L_i u_i = f_i(x, u_1, u_2), & x \in \Omega, \\ B_i u_i = 0, \quad i = 1,2, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.2}$$

其中 f_i, g_i, φ_i 满足上、下解方法中的条件. 容易证明

定理 4.7.1　假设当 $x \in \Omega$, $u_1 \geqslant 0$, $u_2 \geqslant 0$ 时 (7.2) 是拟增 (或拟减) 系统, 又设:

(1) 问题 (7.2) 有上、下解 $(\bar{\varphi}_1(x),\bar{\varphi}_2(x)) \geqslant (\underline{\varphi}_1(x),\underline{\varphi}_2(x)) \geqslant (0,0)$;

(2) 当 (7.2) 是拟增系统时, $T^m(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2)$ 与 $T^m(\underline{\varphi}_1,\underline{\varphi}_2)$ 在 $m\to\infty$ 时有相同的极限 $w(x)=(w_1(x),w_2(x))$; 当 (7.2) 是拟减系统时, $T^m(\bar{\varphi}_1,\underline{\varphi}_2)$ 与 $T^m(\underline{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2)$ 在 $m\to\infty$ 时有相同的极限 $w(x)=(w_1(x),w_2(x))$, 其中 T 是单调方法中的迭代算子.

则对于任意 $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\varphi_2(x))\in S$, 其中

$$S=\{\varphi:\ \varphi=(\varphi_1,\varphi_2),\ \underline{\varphi}_i(x)\leqslant\varphi_i(x)\leqslant\bar{\varphi}_i(x),\ x\in\Omega,\ i=1,2\},$$

问题 (7.1) 存在唯一正解 $u_\varphi(x,t)$, 并满足

$$\lim_{t\to\infty}u_\varphi(x,t)=w(x).$$

条件 (2) 等价于在 S 中问题 (7.2) 存在唯一解.

对于高维的拟增系统以及可化为拟增系统的系统也有类似的定理. 文献 [M] 和 [CM] 就是用这种方法讨论了方程组的正平衡解的全局稳定性.

习 题 四

在 4.1 题至 4.3 题中, 考察方程组

$$\begin{cases} u_{1t}-a\Delta u_1=-\alpha u_1u_2, & (x,t)\in Q_T,\\ u_{2t}-b\Delta u_2=-\beta u_1u_2, & (x,t)\in Q_T,\end{cases}\tag{4-1}$$

其中 a,b,α,β 为正常数, $T\leqslant\infty$.

4.1 设 $u_1,u_2\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\bar{Q}_T)$, 满足 (4-1). 令 $\Gamma=S_T\cup(\bar{\Omega}\times\{0\})$. 若 $u_i|_\Gamma\geqslant 0$ $(i=1,2)$, 求证

$$0\leqslant u_i(x,t)\leqslant\max_\Gamma u_i,\quad i=1,2,\quad (x,t)\in\bar{Q}_T.$$

4.2 设 (u_1,u_2) 是 (4-1) 在 $\bar{\Omega}\times[0,\infty)$ 上的非负解, 满足 $u_i|_{\partial\Omega}=0$ $(i=1,2,\ t\geqslant 0)$. 求证

$$\lim_{t\to\infty}(u_1(x,t),u_2(x,t))=(0,0),\quad 对\ x\in\bar{\Omega}\ 一致成立.$$

4.3 设 (u_1,u_2) 是 (4-1) 在 $\bar{\Omega}\times[0,\infty)$ 上的解, 满足:

$$\left.\frac{\partial u_i}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0,\qquad i=1,2,\quad t>0,$$
$$u_i(x,0)=\varphi_i(x)\geqslant 0,\quad t=1,2,\quad x\in\bar{\Omega}.$$

(1) 证明存在常数 $M_1, M_2 > 0$, 使得

$$0 \leqslant u_i(x,t) \leqslant M_i, \quad t=1,2, \quad (x,t) \in Q_\infty;$$

(2) 令 $\bar{\varphi}_i = \max\limits_{\Omega} \varphi_i(x)$, $\underline{\varphi}_i = \min\limits_{\Omega} \varphi_i(x)$. 若 $\alpha\underline{\varphi}_2 > \beta\bar{\varphi}_1$, 证明当 $t \to \infty$ 时, 依指数规律一致地有 $u_1(x,t) \to 0$.

4.4　假设问题

$$U_t = U_{xx} + f(U), \quad -1 < x < 1; \quad U(\pm 1) = 0$$

的任一正解 $U(x,t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to\infty} U(x,t) = 0$ $(|x| \leqslant 1)$. 又设当 $u, v \geqslant 0$ 时,

$$g(v) \leqslant -\mu v, \quad \varphi(u,v) \geqslant 0, \quad \psi(u,v) \leqslant Kuv,$$

其中 μ, K 都是正常数. 证明问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u) - \varphi(u,v), & -1 < x < 1, \quad t > 0, \\ v_t = v_{xx} + g(v) + \psi(u,v), & -1 < x < 1, \quad t > 0, \\ u = v = 0, & x = \pm 1, \quad t > 0 \end{cases}$$

的任一正解 (u,v) 满足

$$\lim_{t\to\infty} (u(x,t), v(x,t)) = (0,0).$$

在 4.5 题至 4.11 题中, 考察边值问题

$$\begin{cases} -\sigma_i \Delta u_i = u_i[a_i + f_i(u_1,u_2)], & x \in \Omega, \\ u_i = g_i(x) \geqslant 0, \quad i = 1,2, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4-2}$$

和初边值问题

$$\begin{cases} u_{it} - \sigma_i \Delta u_i = u_i[a_i + f_i(u_1,u_2)], & (x,t) \in Q_\infty, \\ u_i = g_i(x), & (x,t) \in S_\infty, \\ u(x,0) = \psi_i(x), \quad i = 1,2, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{4-3}$$

其中 a_i, σ_i $(i=1,2)$ 是正常数, $g_i(x) \geqslant 0$ $(x \in \partial\Omega)$, $\psi_i(x) \geqslant 0$ $(x \in \Omega)$, $i = 1,2$, 并满足单调方法中的假设条件, 函数 $f_i : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 满足:

$$f_i(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f_i(u_1,u_2)}{\partial u_j} < 0, \quad i,j = 1,2.$$

同时存在正常数 c_1, c_2, 使得

$$a_1 + f_1(c_1, 0) \leqslant 0, \quad a_2 + f_2(0, c_2) \leqslant 0.$$

记 λ_0 是

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的最小特征值, 相应的正特征函数为 $\phi_0(x)$.

4.5 设 $g_i(x) \not\equiv 0$ $(i = 1, 2)$.

(1) 若 $(u_1(x), u_2(x)) \geqslant (0, 0)$ 是问题 (4-2) 的解, 证明 $u_i(x) > 0$ $(x \in \Omega,\ i = 1, 2)$;

(2) 证明问题 (4-2) 存在一个解 $(u_1(x), u_2(x))$, 满足 $u_i(x) > 0,\ x \in \Omega,\ i = 1, 2$.

4.6 证明问题 (4-3) 存在唯一正解且是有界的.

4.7 设 $a_i < \sigma_i \lambda_0,\ g_i(x)|_{\partial\Omega} = 0,\ i = 1, 2$.

(1) 若 $(u_1(x), u_2(x)) \geqslant (0, 0)$ 是问题 (4-2) 的解, 证明 $u_i(x) \equiv 0,\ x \in \Omega,\ i = 1, 2$;

(2) 若 (u_1, u_2) 是问题 (4-3) 的解, 证明

$$\lim_{t \to \infty} u_i(x, t) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

对 $x \in \bar{\Omega}$ 一致成立.

4.8 设 $a_i > \sigma_i \lambda_0,\ g_i(x) = 0$ $(i = 1, 2)$. 又设存在正常数 M_1, M_2, 使得

$$\begin{aligned} &a_1 - \sigma_1 \lambda_0 + f_1(0, M_2) > 0, \quad a_1 + f_1(M_1, 0) < 0, \\ &a_2 - \sigma_2 \lambda_0 + f_2(M_1, 0) > 0, \quad a_2 + f_2(0, M_2) < 0. \end{aligned}$$

证明问题 (4-2) 存在解 $(u_1(x), u_2(x))$, 满足 $u_i(x) > 0,\ x \in \Omega,\ i = 1, 2$.

4.9 设 $g_1(x) \equiv 0,\ g_2(x) > 0$ $(x \in \partial\Omega)$. 又设 $a_1 < \sigma_1 \lambda_0$. 若 (u_1, u_2) 是 (4-3) 的解, 证明:

(1) $\lim\limits_{t \to \infty} u_1(x, t) = 0$;

(2) 存在 $\delta > 0$ 及 $T > 0$, 使得当 $t \geqslant T$ 时, $u_2(x, t) \geqslant \delta$.

4.10 设 $g_1(x) \equiv 0,\ g_2(x) > 0$ $(x \in \partial\Omega), a_1 < \sigma_1 \lambda_0$.

(1) 证明问题 (4-2) 存在唯一非负解 $(u_1^*(x), u_2^*(x))$, 并且 $u_1^*(x) \equiv 0, u_2^*(x) > 0$ $(x \in \bar{\Omega})$;

(2) 设 (u_1, u_2) 是问题 (4-3) 的解, 利用基于相应的椭圆型方程上、下解的判别方法, 证明

$$\lim_{t \to \infty} (u_1(x, t), u_2(x, t)) = (0, u_2^*(x)).$$

4.11 设 $g_1(x) \equiv 0,\ g_2(x) > 0$ $(x \in \partial\Omega), a_1 < \sigma_1 \lambda_0$.

(1) 若 (u_1, u_2) 是问题 (4-3) 的解, 且 $u_2^*(x) > 0$ $(x \in \bar{\Omega})$ 是问题

$$\begin{cases} -\sigma_2 \Delta u_2 = u_2[a_2 + f_2(0, u_2)], & x \in \Omega, \\ u_2 = g_2(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解, 证明存在正常数 p, q, r, s, T, 使得

$$\lim_{t\to\infty} u_1(x,t) = 0 \quad \text{对 } x \in \bar{\Omega} \text{ 一致成立},$$
$$\beta(t)u_2^*(x) \leqslant u_2(x,t) \leqslant \alpha(t)u_2^*(x), \quad t \geqslant T, \quad x \in \bar{\Omega},$$

其中

$$\alpha(t) = 1 + p\mathrm{e}^{-qt}, \quad \beta(t) = 1 - r\mathrm{e}^{-st};$$

(2) 利用结论 (1), 证明问题 (4-2) 存在唯一非负解.

第5章　不变区域及其应用

在前一章中, 曾对特殊的弱耦合抛物不等式组建立了最大值原理, 并由此对具有某种拟单调性的弱耦合抛物方程组建立了比较原理. 这是建立这类抛物型方程组初边值问题解的存在唯一性的基础.

但是, 对于一般的弱耦合抛物型方程组

$$\mathscr{L}_i u_i = f_i(x,t,u_1,\cdots,u_m), \quad i=1,\cdots,m,$$

不知道是否有最大值原理和比较原理, 其中 $\mathscr{L}_i$ 由 4.2.2 节给出.

分析最大值原理和比较原理的作用, 一是可以得到解的最大模估计, 从而为利用 Schauder 或 Leray-Schauder 等不动点定理来证明解的存在性创造了条件; 二是证明解的唯一性.

对于一般的方程组, 既然最大值原理不一定成立, 那么能否舍此求彼呢? 即能否保留一个作用而舍去另一个作用呢? 这就是本章要讲的不变区域的主要思想.

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域, 存在 T, $0<T\leqslant\infty$, 使得

$$\mathscr{L}_i u_i = f_i(x,t,u_1,\cdots,u_m), \quad i=1,\cdots,m$$

在 $\bar{Q}_T$ 上存在解 $u(x,t)=(u_1(x,t),\cdots,u_m(x,t))$. 集合

$$\Gamma=[\bar{\Omega}\times\{0\}]\cup[\partial\Omega\times(0,T]]$$

称为 Q_T 的抛物边界.

闭集 $\Sigma\subset\mathbb{R}^m$ 称为解 $u(x,t)$ 的 (正) 不变区域, 若 $u(x,t)|_\Gamma\subset\Sigma$ 时即有 $u(x,t)\in\Sigma$, $\forall\ (x,t)\in Q_T$.

建立不变区域 Σ, 就是对解建立了另一类型的先验估计 (不是用初始与边界数据来估计), 这对证明解的存在性起着重要的作用, 但不一定能用之来证明唯一性.

5.1　反应扩散方程组的不变矩形

这一节仍然是单调方法的一个应用. 考虑如下问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}_i u_i = f_i(x,t,u_1,\cdots,u_m), & (x,t) \in Q_T, \\ u_i(x,t) = g_i(x,t) \quad \text{或} \quad \dfrac{\partial u_i}{\partial n} = 0, & (x,t) \in S_T, \\ u_i(x,0) = \varphi_i(x), & x \in \Omega, \\ i = 1,\cdots,m. \end{cases} \tag{1.1}$$

它满足第 4 章中所给的条件.

定理 5.1.1　记

$$\Sigma_a^b = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i], \quad -\infty < a_i < b_i < \infty.$$

假设

(1) 当 $(x,t) \in Q_T, u \in \Sigma_a^b$ 时,

$$f_i(x,t,u)|_{u_i=a_i} \geqslant 0, \quad f_i(x,t,u)|_{u_i=b_i} \leqslant 0, \quad i = 1,\cdots,m;$$

(2) 当 $x \in \Omega$ 时, $\varphi(x) = (\varphi_1(x),\cdots,\varphi_m(x)) \in \Sigma_a^b$;

若是 Dirichlet 边界条件, 还假设

(3) 当 $(x,t) \in S_T$ 时, $(g_1(x,t),\cdots,g_m(x,t)) \in \Sigma_a^b$.

则问题 (1.1) 的解

$$u(x,t) = (u_1(x,t),\cdots,u_m(x,t)) \in \Sigma_a^b, \quad (x,t) \in \bar{\Omega}_T.$$

这里的 Σ_a^b 称为问题 (1.1) 的不变矩形.

证明　令

$$\bar{f}_i(x,t,u) = \sup_{\substack{a_j \leqslant \xi_j \leqslant u_j \\ j \neq i}} f_i(x,t,\xi_1,\cdots,\xi_m)|_{\xi_i = u_i},$$

$$\underline{f}_i(x,t,u) = \inf_{\substack{u_j \leqslant \xi_j \leqslant b_j \\ j \neq i}} f_i(x,t,\xi_1,\cdots,\xi_m)|_{\xi_i = u_i}.$$

考察问题 (1.1) 的上、下控制系统

$$\begin{cases} \mathscr{L}_i u_i = \bar{f}_i(x,t,u), & (x,t) \in Q_T, \\ u_i(x,t) = g_i(x,t) \quad \text{或} \quad \dfrac{\partial u_i}{\partial n} = 0, & (x,t) \in S_T, \\ u_i(x,0) = \varphi_i(x), & x \in \Omega, \\ i = 1,\cdots,m \end{cases} \tag{1.2}$$

和

$$\begin{cases} \mathscr{L}_i u_i = \underline{f}_i(x,t,u), & (x,t) \in Q_T, \\ u_i(x,t) = g_i(x,t) \quad \text{或} \quad \dfrac{\partial u_i}{\partial n} = 0, & (x,t) \in S_T, \\ u_i(x,0) = \varphi_i(x), & x \in \Omega, \\ i = 1,\cdots,m. \end{cases} \tag{1.3}$$

它们在 Σ_a^b 上均是拟增系统. 显然 $\bar{u} = (b_1, \cdots, b_m)$ 是问题 (1.2) 的上解, $\underline{u} = (a_1, \cdots, a_m)$ 是问题 (1.3) 的下解. 于是由定理 4.4.6 知, 问题 (1.1) 有解 $u(x,t)$, 且满足

$$a_i \leqslant u_i(x,t) \leqslant b_i, \quad (x,t) \in \bar{Q}_T, \quad i = 1, \cdots, m,$$

即 $u(x,t) \in \Sigma_a^b$, $\forall\ (x,t) \in \bar{Q}_T$. 证毕.

定理 5.1.1 中条件 (1) 的几何意义是: 在 $\partial\Sigma_a^b$ 上, 向量 $f = (f_1, \cdots, f_m)$ 或与 $\partial\Sigma_a^b$ 相切, 或指向 Σ_a^b 的内部.

例 1 Hodgkin-Huxley 方程 ([CCS, Has]), 有时也称为神经传导方程

$$\begin{cases} cu_t = u_{xx} + g(u,v,w,z), \\ v_t = \varepsilon_1 v_{xx} + g_1(u)(h_1(u) - v), \\ w_t = \varepsilon_2 w_{xx} + g_2(u)(h_2(u) - w), \\ z_t = \varepsilon_3 z_{xx} + g_3(u)(h_3(u) - z), \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 c 是正常数, $\varepsilon_i\ (i = 1,2,3)$ 是非负常数,

$$g(u,v,w,z) = k_1 v^3 w(c_1 - u) + k_2 z^4 (c_2 - u) + k_3(c_3 - u),$$

$k_i > 0\ (i = 1,2,3)$, $c_1 > c_3 > 0 > c_2$ 是常数.

$$g_i(u) > 0, \quad 1 > h_i(u) > 0, \quad i = 1,2,3.$$

在这个模型中, v, w, z 表示化学浓度, 因而是非负的, u 表示电势. 方程组 (1.4) 是 Hodgkin, Huxley 等研究电信号在鱿鱼轴突中传播的生理现象时导出的一个数学模型.

下面来求方程组 (1.4) 的不变矩形

$$\Sigma = \{(u,v,w,z) : \bar{c}_1 \leqslant u \leqslant \bar{c}_2,\ 0 \leqslant v \leqslant \alpha,\ 0 \leqslant w \leqslant \beta,\ 0 \leqslant z \leqslant \gamma\}, \tag{1.5}$$

其中 $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \alpha, \beta, \gamma$ 是待定的常数.

容易验证, 只要 $\alpha \geqslant 1$, 就有

$$g_1(u)(h_1(u) - v)|_{v=0} > 0,$$
$$g_1(u)(h_1(u) - v)|_{v=\alpha} < g_1(u)(1 - \alpha) \leqslant 0.$$

类似地, 只要 $\beta, \gamma \geqslant 1$, 就有

$$g_2(u)(h_2(u) - w)|_{w=0} > 0,$$
$$g_2(u)(h_2(u) - w)|_{w=\beta} < 0,$$
$$g_3(u)(h_3(u) - z)|_{z=0} > 0,$$
$$g_3(u)(h_3(u) - z)|_{z=\gamma} < 0.$$

当 $0 \leqslant v \leqslant \alpha,\ 0 \leqslant w \leqslant \beta,\ 0 \leqslant z \leqslant \gamma$ 时, 只要 $\bar{c}_1 \leqslant c_2$ (蕴涵 $\bar{c}_1 < c_3 < c_1$), 就有

$$g(u,v,w,z)|_{u=\bar{c}_1} = [k_1 v^3 w(c_1 - \bar{c}_1) + k_2 z^4 (c_2 - \bar{c}_1) + k_3(c_3 - \bar{c}_1)] > 0.$$

只要 $\bar{c}_2 \geqslant c_1$, 就有

$$g(u,v,w,z)|_{u=\bar{c}_2} < 0.$$

因此, 只要 $\bar{c}_1 \leqslant c_2,\ \bar{c}_2 \geqslant c_1,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \geqslant 1$, 由 (1.5) 式给出的 Σ 就是方程组 (1.4) 的不变矩形.

例 2　Belousov-Zhabotinski 化学反应的 Field-Noyes 方程 ([Ty, p.43])

$$\begin{cases} E\xi_t = \varepsilon_1 \xi_{xx} + \xi + \eta - q\xi^2 - \xi\eta, \\ \eta_t = \varepsilon_2 \eta_{xx} - \eta + 2h\rho - \xi\eta, \\ p\rho_t = \varepsilon_3 \rho_{xx} + \xi - \rho, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 ξ,η,ρ 是无量纲化的化学浓度, $E,q,h,p > 0, \varepsilon_i \geqslant 0\ (i=1,2,3)$ 是常数.

下面求形如

$$\Sigma = \{(\xi,\eta,\rho) : 0 \leqslant \xi \leqslant a,\ 0 \leqslant \eta \leqslant b,\ 0 \leqslant \rho \leqslant c\} \tag{1.7}$$

的不变矩形. 容易验证: 当 $(\xi,\eta,\rho) \in \Sigma$ 时, 若取 $a \geqslant \max\{1, 1/q\}$, 则有

$$\begin{aligned} &(\xi + \eta - q\xi^2 - \xi\eta)|_{\xi=0} = E\eta \geqslant 0, \\ &(\xi + \eta - q\xi^2 - \xi\eta)|_{\xi=a} = [a(1-qa) + \eta(1-a)] \leqslant 0; \end{aligned}$$

若取 $b \geqslant 2hc$, 则有

$$\begin{aligned} &(-\eta + 2h\rho - \xi\eta)|_{\eta=0} = 2h\rho \geqslant 0, \\ &(-\eta + 2h\rho - \xi\eta)|_{\eta=b} = 2h\rho - b(1+\xi) \leqslant 2hc - b \leqslant 0; \end{aligned}$$

若取 $c \geqslant a$, 则有

$$(\xi - \rho)|_{\rho=0} \geqslant 0, \quad (\xi - \rho)|_{\rho=c} \leqslant a - c \leqslant 0.$$

这就证明了: 若 $a \geqslant \max\{1, 1/q\}$, $c \geqslant a$, $b \geqslant 2hc$, 则由 (1.7) 式给出的 Σ 是方程组 (1.6) 的不变矩形.

例 3　神经传导的 Fitz Hugh-Nagumo 方程

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + f(v) - u, \\ u_t = \varepsilon u_{xx} + \sigma v - \gamma u, \end{cases} \tag{1.8}$$

其中 $\sigma,\gamma>0,\varepsilon\geqslant 0$ 均为常数, $f(v)=v(v-\beta)(1-v), 0<\beta<1$. 这是 Hodgkin-Huxley 方程组的一个简化模型.

在这个例子中, 将给出一个不变矩形的几何构造法.

在图 5.1.1 中画出了 $f(v)-u=0, \sigma v-\gamma u=0$ 的曲线和直线, 并标明了使 $f(v)-u>0\ (<0), \sigma v-\gamma u>0\ (<0)$ 的区域. 图中还画出了一个矩形 $ABCD$, 其边平行于坐标轴, 并满足: $(\sigma v-\gamma u)|_{AD}\leqslant 0, (\sigma v-\gamma\mu)|_{BC}>0, (f(v)-u)|_{AB}>0, (f(v)-u)|_{CD}<0$. 若取

$$\Sigma=\text{矩形}ABCD,$$

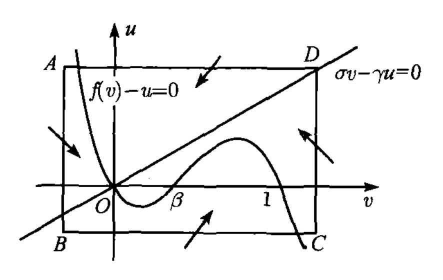


图 5.1.1

则在 $\partial\Sigma$ 上 $F=(f(v)-u,\sigma v-\gamma u)$ 指向 Σ 内或与 $\partial\Sigma$ 相切. 因此, Σ 是方程组 (1.8) 的不变矩形. 照此, 就可以构造任意大的这种不变矩形.

5.2 反应扩散方程组的不变区域

设 $a_{ij}^{(\mu)}=a_{ij}, b_i^{(\mu)}=b_i$, 即 $\mathscr{L}_\mu=\mathscr{L}$ 不依赖于 μ. 考虑

$$\mathscr{L}u_\mu=f_\mu(x,t,u),\quad \mu=1,\cdots,m, \tag{2.1}$$

或写成

$$\mathscr{L}u=f(x,t,u),$$

其中

$$u=(u_1,\cdots,u_m),\quad f=(f_1,\cdots,f_m).$$

设 Σ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的凸集, 称集合

$$\Sigma_\rho=\{u: u\in\mathbb{R}^m,\ \mathrm{dist}(u,\Sigma)<\rho\},\quad \rho>0$$

为 Σ 的平行集 (图 5.2.1), 其中 $\mathrm{dist}(u,\Sigma)$ 是点 u 与集合 Σ 的距离.

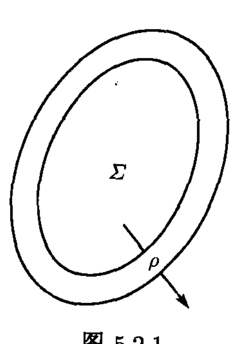


图 5.2.1

定理 5.2.1([We]) 设 $\Sigma\subset\mathbb{R}^m$ 是有界闭凸集, 并有如下性质: 存在 $\varepsilon>0$, 使得对任意 $\rho\in(0,\varepsilon)$, $(x,t)\in Q_T$ 和 $u^*\in\partial\Sigma_\rho$, 有

$$P(u^*)\cdot f(x,t,u^*)<0, \tag{2.2}$$

其中 $P(u^*)$ 是点 u^* 处的单位外法向量. 则当方程组 (2.1) 的解 u 满足 $u|_\Gamma\subset\Sigma$ 时, 一定有 $u|_{\bar{Q}_T}\subset\Sigma$. 这样的 Σ 称为方程组 (2.1) 的不变区域.

证明 用反证法. 若不然, 则存在 $(\bar{x},\bar{t}) \in Q_T$, 使得 $u(\bar{x},\bar{t}) \notin \Sigma$. 从而存在 $\rho \in (0,\varepsilon)$, 使得 $u(\bar{x},\bar{t}) \notin \overline{\Sigma}_\rho$. 因为 $u|_\Gamma \subset \Sigma$, 所以 $u|_\Gamma$ 上每一点是 Σ_ρ 的内点. 又因为当 $x \in \bar{\Omega}$ 时 $u(x,0) \in \Sigma \subset \Sigma_\rho$, 由 $u(x,t)$ 的连续性知, 存在 $t^* > 0$, 使得对任意 $(x,t) \in Q_{t^*}$, 有 $u(x,t) \in \Sigma_\rho$. 取这种 t^* 的上确界, 仍记为 t^*, 则当 $(x,t) \in \Omega \times (0,t^*)$ 时, $u(x,t) \in \Sigma_\rho$, 且存在 $x^* \in \Omega$, 使得 $u(x^*,t^*) = u^* \in \partial\Sigma_\rho$.

根据假设条件, 有



$$P(u^*) \cdot f(x^*,t^*,u^*) < 0. \tag{2.3}$$

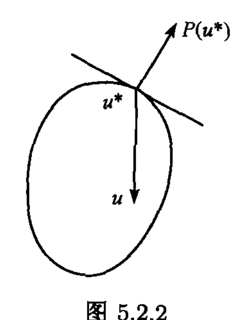


图 5.2.2

由于 Σ_ρ 是凸集, 故 Σ_ρ 位于过 u^* 的 Σ_ρ 的切平面的一侧 (见图 5.2.2). 因而

$$(u - u^*) \cdot P(u^*) \leqslant 0, \quad \forall\, u \in \Sigma_\rho,$$

即 $u - u^*$ 和 $P(u^*)$ 的夹角不小于 $\pi/2$, 于是

$$u \cdot P(u^*) \leqslant u^* \cdot P(u^*).$$

这说明标量 $u(x,t) \cdot P(u^*)$ 在 (x^*,t^*) 处达到它在 Q_{t^*} 上的最大值.

把向量 $P(u^*)$ 与方程组 (2.1) 作内积可知, $P(u^*) \cdot u(x,t)$ 满足方程

$$L(P \cdot u) = P \cdot f,$$

这里简记 $P = P(u^*)$. 因为 $P(u^*) \cdot u(x,t)$ 在 (x^*,t^*) (Q_{t^*} 的内点) 上达到最大值, 故

$$L(P \cdot u)|_{(x^*,t^*)} = P \cdot f|_{(x^*,t^*)} \geqslant 0,$$

与 (2.3) 式矛盾. 证毕.

条件 (2.2) 通常称为切触条件 (tangency condition).

例 1([Sm, BDG]) 人们在液态的超导性研究中提出了下列方程组

$$u_t = D\Delta u + (1 - |u|^2)u, \tag{2.4}$$

其中 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^{\mathrm{T}}$, $\Delta u = (\Delta u_1, \cdots, \Delta u_m)^{\mathrm{T}}$,

$$D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_m), \quad d_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{m} d_i > 0.$$

由定理 5.1.1 知

$$\Sigma_1 = \prod_{i=1}^{m}[-C_i, C_i], \quad \Sigma_2 = \prod_{i=1}^{m}[0, C_i], \quad \Sigma_3 = \prod_{i=1}^{m}[-C_i, 0]$$

均是方程组 (2.4) 的不变矩形, 其中常数 $C_i \geqslant 1$.

当 $d_1 = d_2 = \cdots = d_m > 0$ 时, 令

$$\Sigma_C = \{u : u \in \mathbb{R}^m, \ |u|^2 \leqslant C\}, \quad C \geqslant 1,$$
$$f(u) = (1 - |u|^2)u.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 当 $u \in \partial\Sigma_{C+\varepsilon}$ 时,

$$P(u) \cdot f(u) = [1 - (C + \varepsilon)^2](C + \varepsilon) < 0,$$

其中 $P(u)$ 是 $u \in \partial\Sigma_{C+\varepsilon}$ 处的单位外法向量. 因此由定理 5.2.1 知, Σ_C 是方程组 (2.4) 的不变区域.

定理 5.2.1 中的 Σ 不具体, 因而不好使用. 在应用中希望 Σ 是一些性质比较具体的凸区域.

下面将对更一般的耦合抛物型方程组给出较具体的凸区域 Σ. 为书写简单, 假定空间变量只有一个, 即设 $n = 1$. 考虑下面的方程组

$$\begin{cases} u_t - D(u, x)u_{xx} + M(u, x)u_x = f(u, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = g(x, t) \quad \text{或} \quad \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, & (x, t) \in S_T, \end{cases} \tag{2.5}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}$ 中的有界开区间, $D(u, x)$ 和 $M(u, x)$ 都是 $m \times m$ 矩阵函数, D 是对称正定矩阵. 假设存在 $0 < T \leqslant \infty$, 使得问题 (2.5) 在 Q_T 上有解 $u(x, t)$.

设 $G_i(v)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中开集 U 到 $\mathbb{R}$ 的光滑函数, 对 $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$, $\nabla G_i = \left(\dfrac{\partial G_i}{\partial u_1}, \cdots, \dfrac{\partial G_i}{\partial u_m}\right) \neq 0$, 满足 $G_i(v) \leqslant 0$ $(v \in U)$ 的点集是一个 "半空间". 考虑由有限个这样的 "半空间" 交出来的 $\mathbb{R}^m$ 中的区域 Σ:

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^{N} \{v : v \in U, \ G_i(v) \leqslant 0\}. \tag{2.6}$$

下面来讨论在什么条件下 Σ 可能成为问题 (2.5) 的不变区域.

定义 5.2.2 光滑函数 $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 在 $v_0 \in \mathbb{R}^m$ 处称为是拟凸的 (quasi-convex), 若由 $\eta \in \mathbb{R}^m$, $\nabla G(v_0) \cdot \eta = 0$ 能推出 $\eta^{\mathrm{T}} D^2 G(v_0) \eta \geqslant 0$, 其中

$$D^2 G(v_0) = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v_i \partial v_j}\right)\bigg|_{v = v_0}$$

是 $G(v)$ 在 v_0 的 Hessian 矩阵.

定理 5.2.3([CCS]) 设 Σ 由 (2.6) 式定义, 记

$$\Sigma_\varepsilon = \bigcap_{i=1}^{N} \{v : v \in U,\ G_i(v) \leqslant \varepsilon\}.$$

又设存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $t \in (0, T]$, $v_0 \in \partial\Sigma_\varepsilon$ 以及 $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$, 下列条件成立:

(1) 对任意 $x \in \Omega$, $\nabla G_i(v_0)$ 是 $D(v_0, x)$ 和 $M(v_0, x)$ 的左特征向量, 即存在 μ 和 λ, 使得

$$\nabla G_i(v_0) D(v_0, x) = \mu \nabla G_i(v_0),$$
$$\nabla G_i(v_0) M(v_0, x) = \lambda \nabla G_i(v_0);$$

(2) 若 $\nabla G_i(v_0) D(v_0, x) = \mu \nabla G_i(v_0)$ $(\mu \neq 0)$, 则 G_i 在 v_0 是拟凸的;

(3) $\nabla G_i(v_0) \cdot f(v_0, t) < 0$.

那么对于 Dirichlet 边界条件, 若 $u(x,t)|_\Gamma \subset \Sigma$, 则 $u(x,t)|_{Q_T} \subset \Sigma$; 对于 Neumann 边界条件, 若 $u(x,0)|_\Omega \subset \Sigma$, 则 $u(x,t)|_{Q_T} \subset \Sigma$.

证明　用反证法. 若不然, 则存在 $\bar{t} \in (0, T]$, $\bar{x} \in \Omega$, $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, 使得

$$G_i(u(\bar{x}, \bar{t})) > 0.$$

于是存在 $\varepsilon : 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, 使得

$$G_i(u(\bar{x}, \bar{t})) > \varepsilon.$$

对此 i 与 ε, 令

$$t_0 = \inf\left\{\bar{t} : \bar{t} \in (0, T],\ 存在\ \bar{x} \in \Omega,\ 使得\ G_i(u(\bar{x}, \bar{t})) > \varepsilon\right\}.$$

因为 $G_i(u(x, 0)) \leqslant 0$, 所以存在 $t^* > 0$, 使得当 $0 \leqslant t \leqslant t^*$ 时, $G_i(u(x,t)) < \varepsilon$, $\forall x \in \Omega$. 因此 $t_0 > 0$. 由 t_0 的定义, 一定存在 $x_0 \in \bar{\Omega}$, 使得

$$G_i(u(x,t)) \leqslant \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \tag{2.7}$$

$$G_i(u(x_0, t_0)) = \varepsilon. \tag{2.8}$$

对于 Dirichlet 边界条件, 一定有 $x_0 \in \Omega$. 若能推出

$$\left.\frac{\partial G_i(u(x,t))}{\partial t}\right|_{(x_0, t_0)} < 0, \tag{2.9}$$

则与 (2.7) 式和 (2.8) 式矛盾, 从而证明了本定理. 为证明 (2.9) 式, 首先计算 $\dfrac{\partial G_i(u(x,t))}{\partial t}$. 因为 $u(x,t)$ 是解, 所以

$$\frac{\partial G_i(u(x,t))}{\partial t} = \nabla G_i(u(x,t)) u_t = \nabla G_i \left[D u_{xx} - M u_x + f(u,t)\right].$$

利用条件 (1) 得

$$\left.\frac{\partial G_i(u(x,t))}{\partial t}\right|_{(x_0,t_0)} = [\mu\nabla G_i u_{xx} - \lambda\nabla G_i u_x + \nabla G_i\cdot f(u,t)]_{(x_0,t_0)}. \tag{2.10}$$

若令 $h(x) = G_i(u(x,t_0))$, 由 (2.7) 式和 (2.8) 式知, $x = x_0$ 是 $h(x)$ 在 Ω 上的最大值点. 因此

$$h'(x_0) = 0, \quad h''(x_0) \leqslant 0.$$

于是

$$h'(x_0) = \nabla G_i(u(x,t))u_x\big|_{(x_0,t_0)} = 0, \tag{2.11}$$

$$h''(x_0) = \left[(u_x)^{\mathrm{T}} D^2 G_i(u(x,t))u_x + \nabla G_i(u(x,t))u_{xx}\right]_{(x_0,t_0)} \leqslant 0. \tag{2.12}$$

由条件 (2) 得

$$\left[(u_x)^{\mathrm{T}} D^2 G_i(u(x,t))u_x\right]_{(x_0,t_0)} \geqslant 0,$$

从而有

$$\nabla G_i(u(x,t))u_{xx}\big|_{(x_0,t_0)} \leqslant 0. \tag{2.13}$$

利用矩阵 D 的正定性可推出 $\mu > 0$. 最后由 (2.10) 式、(2.11) 式、(2.13) 式及条件 (3) 推得 (2.9) 式成立.

对 Neumann 边界条件情形的证明留作习题. 证毕.

注 2.1 由定理 5.2.3 的证明可以看出, 定理中的假设 (2) 和 (3) 可以用下面的假设 (2′) 和 (3′) 来代替:

(2′) 若 $\nabla G_i(v_0)D(v_0,x) = \mu\nabla G_i(v_0)$ $(\mu \neq 0)$, 则 G_i 在 v_0 是强凸的, 即若 $\nabla G_i(v_0)\cdot\eta = 0$, 则有 $\eta^{\mathrm{T}} D^2 G_i(v_0)\eta > 0$;

(3′) $\nabla G_i(v_0)\cdot f(v_0,t) \leqslant 0$.

注 2.2 若 D 和 M 是对角矩阵, 又取 $G_i(v) = v_i - c$, c 是某常数, 则 $\nabla G_i = (0,\cdots,0,\overset{(i)}{1},0,\cdots,0)$ 是 D 和 M 的左特征向量, 对应的 $\mu > 0$. 因此 $G_i(v)$ 处处拟凸. 只要对充分小的 $\varepsilon > 0$, 有

$$f_i(v_1,\cdots,v_{i-1},c+\varepsilon,v_{i+1},\cdots,v_m,t) < 0,$$

那么半空间 $\{v : v_i - c \leqslant 0\}$ 是问题 (2.5) 的不变区域.

注 2.3 若 $D = M = I$ 是单位矩阵, 只要对充分小的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\nabla G_i\cdot f|_{\partial\Sigma_\varepsilon} < 0, \quad \text{或} \quad \nabla G_i\cdot f|_{\partial\Sigma} < 0, \quad i = 1,2,\cdots,N,$$

那么由 (2.6) 式给出的 $\mathbb{R}^m$ 中的凸闭域 Σ 是问题 (2.5) 的不变区域.

注 2.4　对于边界条件 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0$, 不变区域 Σ 的含意是：若初值 $u(x,0) \in \Sigma$, $\forall\, x \in \Omega$, 则初边值问题 (2.5) 的解 $u(x,t) \in \Sigma$, $\forall\, (x,t) \in Q_T$.

例 2　考察抛物型方程组

$$u_{it} = \Delta u_i + u_i[a_{i1}(u_1 - u_1^*) + a_{i2}(u_2 - u_2^*) + a_{i3}(u_3 - u_3^*)], \quad i = 1,2,3, \tag{2.14}$$

其中 $u_i^* > 0$ $(i = 1,2,3)$ 是常数, a_{ij} 是常数. 记

$$A = (a_{ij})_{3\times 3},$$

并设 $\dfrac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}})$ 是负定矩阵, 求它的不变区域.

记

$$f_i(u_1,u_2,u_3) = u_i \sum_{j=1}^{3} a_{ij}(u_j - u_j^*), \quad f(u) = (f_1(u),\, f_2(u),\, f_3(u)),$$

取 $G(u)$ 使得

$$\nabla G(u) = \left(\frac{u_1 - u_1^*}{u_1},\ \frac{u_2 - u_2^*}{u_2},\ \frac{u_3 - u_3^*}{u_3}\right),$$

即

$$G(u) = \sum_{i=1}^{3}\left(u_i - u_i^* - u_i^* \ln \frac{u_i}{u_i^*}\right).$$

那么当 $u \neq u^*$ 时,

$$\nabla G(u) \cdot f(u) = (u - u^*)^{\mathrm{T}} \left[\frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}})\right] (u - u^*) < 0,$$

其中 $u = (u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{T}}$, $u^* = (u_1^*,\, u_2^*,\, u_3^*)^{\mathrm{T}}$.

易验证：对任意常数 $c > 0$, 集合

$$\Sigma_c = \{u : G(u) \leqslant c\}$$

是闭凸区域. 因此, 由注 2.3 知 Σ_c 是方程组 (2.14) 的不变区域.

在许多应用中, 向量场 f 只满足较弱的条件 (3′), 即 $\nabla G_i \cdot f|_{\partial\Sigma} \leqslant 0$, 也就是在 $\partial\Sigma$ 的某些地方 ∇G_i 和 f 相切 (向量场 f 不是严格指向 Σ 内的). 例如, 生态学中的群体密度, 化学反应中的反应浓度常常满足 (2.5), f 是

$$f(u) = (u_1 M_1(u),\, u_2 M_2(u), \cdots, u_m M_m(u)).$$

因此, 若取 $G_i(u) = -u_i$, $\Sigma = \{u : G_i(u) \leqslant 0\}$, 则

$$\partial\Sigma = \{u : u_i = 0\},$$

而

$$\nabla G_i = (0, \cdots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \cdots, 0), \quad \nabla G_i \cdot f|_{u_i=0} = 0.$$

根据其物理背景, 应有 $u_i \geqslant 0$ (密度、浓度是非负的), 但是并不能利用前面的定理得到这个结论. 为把定理 5.2.3 推广到这种情形, 引进问题 (2.5) 的解关于 f 是连续依赖的假定.

定义 5.2.4 称方程组的初边值问题 (2.5) 是 f 稳定的, 如果对于每一个函数列 $\{f_l\}$, 只要 f_l 及其一阶导数在 $\mathbb{R}^m$ 的任意有界闭子集上一致收敛到 f 和 f 的一阶导数, 那么 u 存在时, 就可以推出当 l 充分大时 u_l 存在, 同时在 Ω 的一个稠密集上存在 u_l 的一个子列收敛到 u, 其中, u_l 和 u 分别是问题 (2.5) 相应于 f_l 和 f 的解.

定理 5.2.5 设问题 (2.5) 是 f 稳定的, 定理 5.2.3 中的条件除 (3) 换成

(3*) 对任意 $0 < t \leqslant T$ 和任意 $v_0 \in \partial\Sigma$, 有 $\nabla G_i(v_0) \cdot f(v_0, t) \leqslant 0$

外都成立, 则定理 5.2.3 的结论仍成立.

证明 可以构造一个光滑向量场 $h(v)$, 使得 $\nabla G_i \cdot h(v)|_{\partial\Sigma} < 0$. 考虑

$$v_t = Dv_{xx} + Mv_x + f + h/l,$$

即令 $f_l = f + h/l$, 初始条件和边界条件与问题 (2.5) 相同. 当 l 充分大时, 该问题存在解 u_l. 因为

$$\nabla G_i \cdot (f + h/l)\big|_{\partial\Sigma} \leqslant \frac{1}{l}[\nabla G_i \cdot h]_{\partial\Sigma} < 0,$$

由定理 5.2.3 知 $u_l \in \Sigma$. 因此 $u \in \Sigma$. 证毕.

例 3 ([PaW1]) 考虑下面的问题

$$\begin{cases} u_t - d_1\Delta u = u(1-u) - \dfrac{buv}{u+mv} := f_1(u,v), & (x,t) \in Q_\infty, \\ v_t - d_2\Delta v = rv\left(\dfrac{u}{u+mv} - k\right) := f_2(u,v), & (x,t) \in Q_\infty, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0, & (x,t) \in S_\infty, \\ u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, \quad v(x,0) = v_0(x) \geqslant 0, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.15}$$

其中 u, v 分别是食物和猎物的分布密度, 系数都是正常数, 初始函数 $u_0(x)$, $v_0(x)$ 连续有界.

定理 5.2.6 ([PaW1]) 如果存在正常数 α 使得 $(\alpha+m)(1+rk) \leqslant b + \alpha r$, 那么扇形 $\mathcal{R} = \{(u, v) : u, v \geqslant 0, u \leqslant \alpha v\}$ 是问题 (2.15) 的不变区域. 如果 α 又满足 $\alpha + m \leqslant b$ 或者 $\alpha(1-k) < mk$, 那么当初始函数 $(u_0, v_0) \in \mathcal{R}$ 时, 问题 (2.15) 的解满足 $\lim\limits_{t\to\infty}(u, v) = (0, 0)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致成立.

证明　显然, 问题 (2.15) 的解 (u,v) 非负且有界. 令 $G(u,v)=u-\alpha v$, 则 $\mathcal{R}=\{(u,v): u, v\geqslant 0, G(u,v)\leqslant 0\}$, $\nabla G=(1,-\alpha)$. 注意到这里的 D 是对角阵, $M=0$, 所以定理 5.2.3 的条件 (1) 和 (2) 自然成立. 利用解的连续依赖性容易看出, 问题 (2.15) 是 f 稳定的. 因为 $(\alpha+m)(1+rk)\leqslant b+\alpha r$, 所以在边界 $u=\alpha v$ 上,

$$\nabla G\cdot(f_1, f_2)^{\mathrm{T}}=f_1-\alpha f_2=u\left(1+rk-\frac{b+\alpha r}{\alpha+m}\right)-u^2\leqslant 0.$$

由定理 5.2.5 知, 扇形 $\mathcal{R}$ 是问题 (2.15) 的不变区域.

下面假设 α 满足 $\alpha+m\leqslant b$ 或者 $\alpha<mk/(1-k)$, 并且初值 $(u_0, v_0)\in\mathcal{R}$. 因此 $(u(x,t), v(x,t))\in\mathcal{R}$. 从而 u 满足

$$\begin{cases} u_t-d_1\Delta u\leqslant u(1-b/(\alpha+m)-u), & (x,t)\in Q_\infty,\\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=0, & (x,t)\in S_\infty,\\ u(x,0)\geqslant 0, & x\in\Omega. \end{cases} \tag{2.16}$$

先讨论 $\alpha+m\leqslant b$ 的情形. 此时, $1-b/(\alpha+m)\leqslant 0$. 利用常微分方程的结论和比较原理容易推出, $\lim\limits_{t\to\infty}u=0$ 在 $\bar\Omega$ 上一致成立. 于是, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $T>0$, 使得当 $x\in\bar\Omega$, $t\geqslant T$ 时, $u(x,t)\leqslant\varepsilon$. 因此, v 满足

$$\begin{cases} v_t-d_2\Delta v\leqslant rv\left(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+mv}-k\right)=rv\dfrac{\varepsilon(1-k)-mkv}{\varepsilon+mv}, & x\in\Omega,\quad t\geqslant T,\\ \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}=0, & x\in\partial\Omega,\quad t\geqslant T,\\ v(x,T)\geqslant 0, & x\in\Omega. \end{cases}$$

再利用常微分方程的结论和比较原理可得

$$\limsup_{t\to\infty}\max_{\bar\Omega}v(\cdot,t)\leqslant\varepsilon(1-k)/(mk).$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性知, $\lim\limits_{t\to\infty}v=0$ 在 $\bar\Omega$ 上一致成立.

再讨论 $\alpha+m>b$ 并且 $\alpha(1-k)<mk$ 的情况.

当 $k\geqslant 1$ 时, v 满足

$$\begin{cases} v_t-d_2\Delta v=rv\dfrac{(1-k)u-mkv}{u+mv}\leqslant-\dfrac{mkr}{u^*+mv}v^2, & (x,t)\in Q_\infty,\\ \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}=0, & (x,t)\in S_\infty,\\ v(x,0)\geqslant 0, & x\in\Omega, \end{cases}$$

其中 $u^*=1+\max\limits_{\bar\Omega}u_0(x)$. 由此推出, $\lim\limits_{t\to\infty}v=0$ 在 $\bar\Omega$ 上一致成立.

当 $k<1$ 时, 由 (2.16) 式知

$$\limsup_{t\to\infty}\max_{\bar\Omega} u(\cdot,t)\leqslant 1-b/(\alpha+m):=\sigma.$$

于是, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $T_0>0$, 使得 $u(x,t)\leqslant\varepsilon+\sigma$ 对 $x\in\bar\Omega$ 和 $t\geqslant T_0$ 成立. 从而 v 满足

$$\begin{cases} v_t-d_2\Delta v\leqslant rv\left(\dfrac{\varepsilon+\sigma}{\varepsilon+\sigma+mv}-k\right)=rv\dfrac{(1-k)(\varepsilon+\sigma)-mkv}{\varepsilon+\sigma+mv}, & x\in\Omega, \quad t\geqslant T_0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega,\quad t\geqslant T_0,\\ v(x,T_0)\geqslant 0, & x\in\Omega. \end{cases}$$

同上知

$$\limsup_{t\to\infty}\max_{\bar\Omega} v(\cdot,t)\leqslant(1-k)(\varepsilon+\sigma)/(mk).$$

故存在 $T_1>T_0$, 使得

$$v(x,t)\leqslant\varepsilon+(1-k)(\varepsilon+\sigma)/(mk),\quad \forall\, x\in\bar\Omega,\quad t\geqslant T_1.$$

因为 $(u(x,t),v(x,t))\in\mathcal{R}$, 所以

$$u(x,t)\leqslant\alpha[\varepsilon+(1-k)(\varepsilon+\sigma)/(mk)]:=\varphi(\varepsilon),\quad \forall\, x\in\bar\Omega,\quad t\geqslant T_1.$$

令 $\eta=[1+\alpha(1-k)/(mk)]/2$, 则 $\eta<1$. 由于 $\varphi(0)=\sigma\alpha(1-k)/(mk)<\eta\sigma$, 故存在 $\varepsilon\ll 1$ 使得 $\varphi(\varepsilon)<\eta\sigma$. 因此

$$u(x,t)\leqslant\alpha[\varepsilon+(1-k)(\varepsilon+\sigma)/(mk)]<\eta\sigma,\quad \forall\, x\in\bar\Omega,\quad t\geqslant T_1.$$

这样, v 满足

$$\begin{cases} v_t-d_2\Delta v\leqslant rv\left(\dfrac{\eta\sigma}{\eta\sigma+mv}-k\right)=rv\dfrac{(1-k)\eta\sigma-mkv}{\eta\sigma+mv}, & x\in\Omega, \quad t\geqslant T_1,\\ \dfrac{\partial v}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega,\quad t\geqslant T_1,\\ v(x,T_1)\geqslant 0, & x\in\Omega, \end{cases}$$

从而

$$\limsup_{t\to\infty}\max_{\bar\Omega} v(\cdot,t)\leqslant(1-k)\eta\sigma/(mk).$$

于是存在 $T_2>T_1$, 使得当 $\varepsilon\leqslant(\eta\sigma/\alpha)[\eta-\alpha(1-k)/(mk)]$ 时 (因为 $\alpha(1-k)<mk$, 所以 $\eta-\alpha(1-k)/(mk)>0$),

$$v(x,t)\leqslant\varepsilon+(1-k)\eta\sigma/(mk),\quad \forall\, x\in\bar\Omega,\quad t\geqslant T_2,$$
$$u(x,t)\leqslant\alpha\big[\varepsilon+(1-k)\eta\sigma/(mk)\big]\leqslant\eta^2\sigma,\quad \forall\, x\in\bar\Omega,\quad t\geqslant T_2.$$

归纳可证, 存在递增序列 $\{T_n\}$ 满足 $T_n \to \infty$, 使得

$$u(x,t) \leqslant \eta^n \sigma, \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}, \quad t \geqslant T_n.$$

因为 $\eta < 1$, 所以 $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = 0$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致成立. 同于 $\alpha + m \leqslant b$ 的情况又可以推出, $\lim\limits_{t\to\infty} v(x,t) = 0$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致成立.

5.3　比较定理, $t \to \infty$ 时解的渐近行为

前面已经讲到, 可以通过比较定理来研究方程式或方程组解的渐近行为, 比较函数 (上、下解) 实际上也给出了初边值问题解的不变区域. 本节通过与反应扩散方程相应的常微分方程的解来估计反应扩散方程的解, 从而建立一种比较定理. 下面将建立两个比较定理, 一个可由方程组的极值原理得到, 另一个则由不变区域的一般理论得到.

考虑 Neumann 边界条件下的初边值问题

$$\begin{cases} u_t = D\Delta u + f(u,t), & (x,t) \in Q_\infty, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, & (x,t) \in S_\infty, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $u = (u_1, \cdots, u_m)$, $D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_m)$, $d_i > 0$, $\Delta u = (\Delta u_1, \cdots, \Delta u_m)$, $f = (f_1, \cdots, f_m)$, $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$.

假设

(1) $\Sigma = \prod\limits_{i=1}^{m} [a_i, b_i]$ $(-\infty < a_i < b_i < \infty)$, 对任意 $i \in \{1, \cdots, m\}, u \in \Sigma$, 有

$$f_i|_{u_i = a_i} \geqslant 0, \quad f_i|_{u_i = b_i} \leqslant 0;$$

(2) 对任意 $T > 0$, u, $v \in \Sigma$, $s, t \in [0, T]$, 存在常数 K_T, 使得

$$|f(u,t) - f(v,s)| \leqslant K_T(|t-s|^\alpha + |u-v|), \quad \alpha \in (0,1);$$

(3) $\varphi(x) \in C(\bar{\Omega})$, $\quad \varphi(x) \in \Sigma$, $\quad \forall\, x \in \bar{\Omega}$.

显然, Σ 是问题 (3.1) 的不变矩形.

把集合 $N_m = \{1, \cdots, m\}$ 分解为两个互不相交的集合 σ_M 和 σ_m, 即 $\sigma_M \cup \sigma_m = N_m$, $\sigma_M \cap \sigma_m = \varnothing$. 例如, 取 $\sigma_M = \{N_m$ 中的奇数 $\}$, $\sigma_m = \{N_m$ 中的偶数 $\}$. 定义函数 f_i^+, f_i^- 如下:

$$\bar{f}_i(x,t)=\begin{cases}\sup\limits_{\substack{a_j\leqslant\xi_j\leqslant u_j\\ j\neq i}}\{f_i(\xi,t)|_{\xi_i=u_i}\}, & 若\ i\in\sigma_M,\\ \sup\limits_{\substack{u_j\leqslant\xi_j\leqslant b_j\\ j\neq i}}\{f_i(\xi,t)|_{\xi_i=u_i}\}, & 若\ i\in\sigma_m,\end{cases}$$

$$\hat{f}_i(u,t)=\begin{cases}\inf\limits_{\substack{a_j\leqslant\xi_j\leqslant u_j\\ j\neq i}}\{f_i(\xi,t)|_{\xi_i=u_i}\}, & 若\ i\in\sigma_M,\\ \inf\limits_{\substack{u_j\leqslant\xi_j\leqslant b_j\\ j\neq i}}\{f_i(\xi,t)|_{\xi_i=u_i}\}, & 若\ i\in\sigma_m.\end{cases}$$

易见, 若 $i\in\sigma_M$ $(i\in\sigma_m)$, 则 $\bar{f}_i$ 是拟增 (拟减) 的, 而 $\hat{f}_i$ 是拟减 (拟增) 的.

令

$$h(v,t)=(h_1(v,t),\cdots,h_m(v,t)),$$

$$h_i(v,t)=\begin{cases}\bar{f}_i(v,t), & 若\ i\in\sigma_M,\\ \hat{f}_i(v,t), & 若\ i\in\sigma_m,\end{cases}$$

对于 σ_M 的不同取法, 这样的向量函数共有 2^m 个.

下面的任务是把常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}v'=h(v,t),\\ v_i(0)=v_i^0\end{cases}\tag{3.2}$$

的解与抛物型方程的初边值问题 (3.1) 的解进行比较, 建立一个比较定理. 这里

$$v_i^0=\begin{cases}\sup\limits_{\Omega}\varphi_i(x), & 若\ i\in\sigma_M,\\ \inf\limits_{\Omega}\varphi_i(x), & 若\ i\in\sigma_m.\end{cases}\tag{3.3}$$

显然, 问题 (3.2) 存在唯一解, 且 Σ 是它的不变矩形.

定理 5.3.1 (比较定理) 在本节一开始的各项假设下, 问题 (3.1) 的解 $u(x,t)$ 与问题 (3.2) 的解 $V(t)$ 之间有下列关系:

$$u_i(x,t)\leqslant V_i(t),\quad 若\ i\in\sigma_M,\quad (x,t)\in\Omega\times[0,\infty),$$

$$V_i(t)\leqslant u_i(x,t),\quad 若\ i\in\sigma_m,\quad (x,t)\in\Omega\times[0,\infty).$$

证明留作习题 (利用拟增系统的比较原理).

定义 f_i^+,f_i^- 如下:

$$f_i^+(u,t)=\sup\left\{f_i(\xi,t)|_{\xi_i=u_i}:\ j\neq i,\ \begin{matrix}a_j\leqslant\xi_j\leqslant u_j\ 若\ j\in\sigma_M\\ u_j\leqslant\xi_j\leqslant b_j\ 若\ j\in\sigma_m\end{matrix}\right\},$$

$$f_i^-(u,t)=\inf\left\{f_i(\xi,t)|_{\xi_i=u_i}:\ j\neq i,\ \begin{matrix}a_j\leqslant\xi_j\leqslant u_j\ 若\ j\in\sigma_M\\ u_j\leqslant\xi_j\leqslant b_j\ 若\ j\in\sigma_m\end{matrix}\right\}.$$

易见, 若 $j \neq i$, $j \in \sigma_M$ ($j \in \sigma_m$), 则 f_i^+ 关于 u_j 是非减 (非增) 的, f_i^- 关于 u_j 是非增 (非减) 的, 当 $\sigma_M \neq \varnothing$, $\sigma_m \neq \varnothing$ 时, f_i^+ 和 f_i^- 均是混拟单调的.

现在令

$$H_{\sigma_M}(v,t) = (H_1(v,t), \cdots, H_m(v,t)),$$
$$H_i(v,t) = \begin{cases} f_i^+(v,t), & 若\ i \in \sigma_M, \\ f_i^-(v,t), & 若\ i \in \sigma_m, \end{cases}$$

并考虑常微分方程初值问题

$$\begin{cases} v' = H_{\sigma_M}(v,t), \\ v(0) = v_i^0, \end{cases} \tag{3.4}$$

其中 v_i^0 由 (3.3) 式给出. 显然问题 (3.4) 存在唯一解 $v(t)$, 并以 Σ 为不变矩形. 下面把问题 (3.1) 的解 $u(x,t)$ 与问题 (3.4) 的解 $v(t)$ 进行比较并建立一个比较定理.

定理 5.3.2(比较定理) 在本节一开始的各项假定下, 又设问题 (3.1) 是 f 稳定的, 则问题 (3.1) 的解 $u(x,t)$ 和问题 (3.4) 的解 $v(t)$ 之间有下列关系:

$$u_i(x,t) \leqslant v_i(t), \quad 若\ i \in \sigma_M, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,\infty),$$
$$v_i(t) \leqslant u_i(x,t), \quad 若\ i \in \sigma_m, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,\infty).$$

证明 令 $w = (w_1, \cdots, w_m)$, 其中

$$w_i = \begin{cases} u_i - v_i, & 若\ i \in \sigma_M, \\ v_i - u_i, & 若\ i \in \sigma_m. \end{cases}$$

再令

$$G(w,t) = (g_1(w,t), \cdots, g_m(w,t)),$$
$$g_i(w,t) = \begin{cases} f_i(u,t) - H_i(v,t), & 若\ i \in \sigma_M, \\ H_i(v,t) - f_i(u,t), & 若\ i \in \sigma_m. \end{cases}$$

因为当 $i \in \sigma_M$ 时, $u_i = w_i + v_i$, 当 $i \in \sigma_m$ 时, $u_i = v_i - w_i$, 而 $v_i = v_i(t)$, 所以 g_i 实际上是 w 和 t 的函数. 又因为 w 满足

$$\begin{cases} w_t = D\Delta w + G(w,t), & (x,t) \in Q_\infty, \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = 0, & (x,t) \in S_\infty, \end{cases} \tag{3.5}$$

由 (3.1) 式及 (3.3) 式知, $w(x,0) \leqslant 0$, $\forall\ x \in \bar{\Omega}$.

令

$$\Sigma_0 = \{(w_1, \cdots, w_m) : w_i \leqslant 0,\ i = 1, \cdots, m\},$$

将证明 Σ_0 是问题 (3.5) 的不变区域.

当 $i \in \sigma_M$ 时, 若 $w_i = 0, w_j \leqslant 0$ $(j = 1, \cdots, m, j \neq i)$, 则有

$$\begin{aligned} g_i(w,t) &= f_i(u,t) - H_i(v,t) = f_i(u,t) - f_i^+(v,t) \\ &\leqslant f_i^+(u_1, \cdots, u_i, \cdots, u_m, t) - f_i^+(v_1, \cdots, v_{i-1}, u_i, v_{i+1}, \cdots, v_m, t) \\ &\leqslant 0. \end{aligned}$$

当 $i \in \sigma_m$ 时同样可证: 若 $w_i = 0, w_j \leqslant 0$ $(j = 1, \cdots, m, j \neq i)$, 则 $g_i(w,t) \leqslant 0$. 因此, Σ_0 是问题 (3.5) 的不变区域. 证毕.

作为定理的应用, 讨论下面的例子.

例 1 (捕食模型 (predator-prey model)) 只考虑生态学中两个种群的捕食和被捕食的相互作用, 例如猫和老鼠、熊猫和箭竹等. 理想化地认为种群是连续分布的, 可由下面的方程组的初边值问题来刻画:

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + uM(u,v), & (x,t) \in Q_\infty, \\ v_t = d_2 \Delta v + vN(u,v), & (x,t) \in Q_\infty, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0, & (x,t) \in S_\infty, \\ u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, \quad v(x,0) = v_0(x) \geqslant 0, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.6}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界光滑区域, 常数 $d_1, d_2 > 0$,

$$M(u,v) = (u-d)(1-u) - cv, \quad N(u,v) = -\mu - \alpha v + cu,$$

这里的 c, μ, α 都是正常数, $0 < d < 1$, $d < \mu/c < 1$. 若把 Ω 设想为一个孤岛, 则岛上的猫和老鼠既不能进也不能出, 即"流量"等于零的 Neumann 边界条件. 因为

$$M_v = -c < 0, \quad N_u = c > 0,$$

所以这是混拟单调系统. 易证当 M_1, M_2 适当大时, $(\bar{u}, \bar{v}) = (M_1, M_2)$ 是上解, 而 $(\underline{u}, \underline{v}) = (0,0)$ 显然是下解. 从而由上、下解方法可得,

$$\Sigma = \{(u,v) : 0 \leqslant u \leqslant M_1, 0 \leqslant v \leqslant M_2\}$$

是问题 (3.6) 的不变区域 (图 5.3.1).

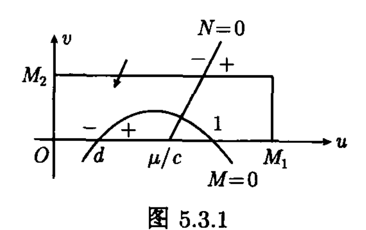


图 5.3.1

现在应用定理 5.3.1. 此时 $m = 2$, 即

$$f = (f_1, f_2) = (uM(u,v), vN(u,v)),$$

$N_2 = \{1, 2\}$. 因此 σ_M 有四种可能:

$$(1)\ \sigma_M=\{1\},\quad (2)\ \sigma_M=\{2\},\quad (3)\ \sigma_M=\{1,2\},\quad (4)\ \sigma_m=\varnothing.$$

下面分别对这四种情形, 构造出 $H_{\sigma_M}(u,v)$.

(1) $\sigma_M=\{1\}$. 此时 $\sigma_m=\{2\}$,

$$\begin{aligned}
f_1^+(u,v)&=\sup_{v\leqslant\xi\leqslant M_2} f_1(u,\xi)=u\sup_{v\leqslant\xi\leqslant M_2} M(u,\xi),\\
f_2^+(u,v)&=\sup_{0\leqslant\xi\leqslant u} f_2(\xi,v)=v\sup_{0\leqslant\xi\leqslant u} N(\xi,v):=vN^+(u,v),\\
f_1^-(u,v)&=\inf_{v\leqslant\xi\leqslant M_2} f_1(u,\xi)=u\inf_{v\leqslant\xi\leqslant M_2} M(u,\xi):=uM^-(u,v),\\
f_2^-(u,v)&=\inf_{0\leqslant\xi\leqslant u} f_2(\xi,v)=v\inf_{0\leqslant\xi\leqslant u} N(\xi,v).
\end{aligned}$$

因而

$$H_{\sigma_M}=H_{\{1\}}=(f_1^+,f_2^-).$$

(2) $\sigma_M=\{2\}$. 同样计算知

$$H_{\{2\}}=(f_1^-,f_2^+),$$

这里 f_1^-,f_2^+ 同上.

(3) $\sigma_M=\{1,2\}$. 同上有

$$H_{\{1,2\}}=\left\{f_1^+,f_2^+\right\},$$

这里 f_2^+ 同上, 而

$$f_1^+=u\sup_{0\leqslant\xi\leqslant v} M(u,\xi):=uM^+(u,v).$$

所以可以写成

$$H_{\{1,2\}}=(uM^+,vN^+).$$

(4) $\sigma_M=\varnothing$. 同上有

$$H_\varnothing=(uM^-,vN^-),$$

这里 M^- 同上, 而

$$N^-(u,v)=\inf_{u\leqslant\xi\leqslant M_1} N(\xi,v).$$

把向量场

$$(uM^+,vN^+),\quad (uM^-,vN^-)$$

分别叫做与方程组 (3.6) 中的向量场 $f=(uM,vN)$ 相应的关于 Σ 的极大、极小向量场.

考虑常微分方程组的初值问题

$$\begin{cases} u' = uM^+(u,v), \\ v' = vN^+(u,v), \\ u(0) = \sup\limits_{\bar{\Omega}} u_0(x), \quad v(0) = \sup\limits_{\bar{\Omega}} v_0(x). \end{cases}$$

利用定理 5.3.1 可得估计

$$0 \leqslant u(x,t) \leqslant u^+(t), \quad 0 \leqslant v(x,t) \leqslant v^+(t),$$

$$(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

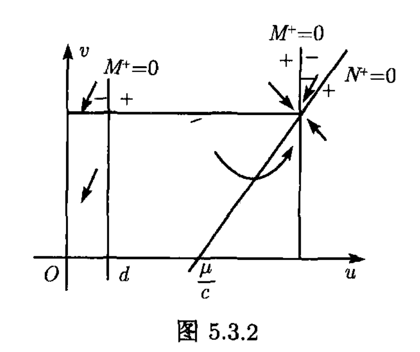


图 5.3.2

由图 5.3.2 可获得解的一些定性性质. 例如, 若 $u_0(x) < d$, 则有 $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = \lim\limits_{t\to\infty} v(x,t) = 0$. 这个结论有直观的生态学意义, 即食饵 (例如老鼠) 少到一定程度的话, 那么食饵本身将趋于灭绝, 从而导致猎手趋于灭绝.

5.4 反应扩散方程的局部解和整体解

在一些情形下, 比较容易证明反应扩散方程局部解的存在唯一性. 如果存在不变区域, 还可以得到整体解的存在唯一性. 本节仅以一个简单例子来说明这一点. 这里考虑的是一种方法的框架, 而不去计较条件上的强弱.

以 Cauchy 问题为例. 在 $m=1$ 的情形, 若取基本空间为 (为简单计, 令 $n=1$)

$$B = \left\{ w(x) : w(x) \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上有界, 一致连续, 且} \lim_{|x|\to\infty} |w| = 0 \right\},$$

$$\|w\|_B = \sup_{x\in\mathbb{R}} |w(x)|, \quad w \in B,$$

那么当 $f(x,t)$ 光滑且有界时, 非齐次热传导方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t = au_{xx} + f(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \text{ 或 } \mathbb{R}\times(0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.1}$$

的解可表为

$$u(x,t) = G(x-y,t) * u_0(y) + \int_0^t G(x-y,t-s) * f(y,s)\mathrm{d}s,$$

其中

$$G(x-y,t-s)=\frac{1}{\sqrt{4\pi a(t-s)}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4a(t-s)}\right\},$$

$$G(x-y,t-s)*f(y,s)=\int_{\mathbb{R}}G(x-y,t-s)f(y,s)\mathrm{d}y,$$

$$G(x-y,t)*u_0(y)=\int_{\mathbb{R}}G(x-y,t)u_0(y)\mathrm{d}y.$$

现在来考虑反应扩散方程组的初值问题

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx}+f(u), & (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \text{ 或 } \mathbb{R}\times(0,T), \\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.2}$$

其中 $m>1$, $u=(u_1,\cdots,u_m)$, $u_0=(u_1^0,\cdots,u_m^0)$, $D=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_m)$, d_i 是正常数 $(i=1,\cdots,m)$, $f(u)=(f_1(u),\cdots,f_m(u))$, $f(u):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 光滑并满足整体 Lipschitz 条件, 即

$$|f(u)-f(v)|\leqslant K|u-v|. \tag{4.3}$$

令

$$g_i(x-y,t-s)=\frac{1}{\sqrt{4\pi d_i(t-s)}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4d_i(t-s)}\right\},\quad i=1,\cdots,m,$$

$$G(x-y,t-s)=\mathrm{diag}(g_1(x-y,t-s),\cdots,g_m(x-y,t-s)).$$

可以证明, $u\in C([0,T];B_m)$ 是问题 (4.2) 的解当且仅当 u 满足下面的积分方程

$$u(x,t)=G(x-y,t)*u_0(y)+\int_0^t G(x-y,t-s)*f(u(y,s))\mathrm{d}s, \tag{4.4}$$

这里 $B_m=\underbrace{B\times\cdots\times B}_{m}$. 于是, 有下面的局部存在性定理.

定理 5.4.1　设 $u_0(x)\in B_m$, $f(0)=0$, 则存在只依赖于 f 和 $\|u_0\|_{B_m}$ 的 $t_0>0$, 使得问题 (4.2) 在 $C([0,t_0];B_m)$ 中有唯一解, 并有 $\|u\|_{B_m}\leqslant 2\|u_0\|_{B_m}$.

证明　若对 $t\in\mathbb{R}^+$ (或 $t\in[0,T]$), $u(x,t)\in C([0,T];B_m)$, 则常把 $u(x,t)$ 记为 $u(t)$. 对于 $t_0=1/(2K)>0$ (常数 K 即是 (4.3) 中的 Lipschitz 常数), 定义集合

$$S=\{u:\ u\in C([0,t_0];B_m), \|u(t)-G(x-y,t)*u_0(y)\|_{B_m}\leqslant\|u_0\|_{B_m}, \forall\ 0\leqslant t\leqslant t_0\},$$

那么 S 是非空闭集 (因为 $u\equiv 0$ 属于 S).

定义映射 A:

$$Av(t)=G(x-y,t)*u_0(y)+\int_0^t G(x-y,t-s)*f(v(y,s))\mathrm{d}s,\quad v(t)=v(x,t)\in S,$$

则 A 把 S 映到 S. 注意到 $0 \in S$, $f(0)=0$, 有

$$\|Av(t)-G*u_0\|_{B_m} \leqslant \left\|\int_0^t G(x-y,t-s)*[f(v(y,s))-f(0)]\mathrm{d}s\right\|_{B_m} \leqslant (K\|v\|_B)t.$$

由于 $v \in S$, 所以

$$\|v\|_{B_m} - \|G*u_0\|_{B_m} \leqslant \|v(t)-G(x-y,t)*u_0(y)\|_{B_m} \leqslant \|u_0\|_{B_m},$$

$$\|v\|_{B_m} \leqslant \|G*u_0\|_{B_m} + \|u_0\|_{B_m} \leqslant 2\|u_0\|_{B_m}.$$

因此

$$\|Av(t)-G*u_0\|_{B_m} \leqslant 2Kt_0\|u_0\|_{B_m} \leqslant \|u_0\|_{B_m}.$$

这里用到了：当 $t>0$ 时, $\int_{\mathbb{R}} g_i(x-y,t)\mathrm{d}y = 1$, 以及 $2Kt_0=1$.

其次证明 A 在 S 上是压缩算子. 设 $u,v \in S$, 则

$$\begin{aligned}\|Au(t)-Av(t)\|_{B_m} &\leqslant \int_0^t \|G(x-y,t-s)*[f(u(y,s))-f(v(y,s))]\|_{B_m}\mathrm{d}t\\ &\leqslant Kt_0\|u(t)-v(t)\|_{B_m}\\ &=\frac{1}{2}\|u(t)-v(t)\|_{B_m}.\end{aligned}$$

这说明 A 在 S 上是压缩的. 应用压缩映象原理推出, A 在 S 中有唯一不动点, 即问题 (4.4), 也即问题 (4.2) 在 S 中有唯一解.

如果对于任意 $T>0$, 问题 (4.2) 的解在 $\mathbb{R}\times[0,T]$ 上有一先验估计

$$\|u(t)\|_{B_m} \leqslant C,$$

其中 C 只依赖于 $\|u_0\|_{B_m}$, 那么可以证明下面的整体解的存在唯一性定理.

定理 5.4.2 设 $u_0 \in B_m$, $f(0)=0$, 且对于任意 $T>0$, 问题 (4.2) 的解在 $\mathbb{R}\times[0,T]$ 上有先验估计:

$$\|u(t)\|_{B_m} \leqslant C(\|u_0\|_{B_m}).$$

则对于任意 $T>0$, 问题 (4.2) 在 $\mathbb{R}\times[0,T]$ 上有唯一解

$$u(x,t)=u(t)\in B_m.$$

证明 取 S 为

$$S=\{u:\ u\in C([0,t_0];B_m),\ \|u(t)-G*u_0\|_{B_m} \leqslant C(\|u_0\|_{B_m}),\ \forall\, 0\leqslant t\leqslant t_0\},$$

这里 K 仍是 (4.3) 中 f 的 Lipschitz 常数, $t_0=1/(2K)$ 只依赖于 f.

由定理 5.4.1 知, 在 $\mathbb{R}\times[0,t_0]$ 上 (4.2) 存在唯一解 $u(t)\in B_m$. 以 $u(x,t_0)\in S$ 为新的初值又可以用同样的方法证得在 $\mathbb{R}\times[t_0,2t_0]$ 上也有唯一解. 如此重复下去即可得解在 $\mathbb{R}\times[0,T]$ 上的存在唯一性. 定理证毕.

推论 5.4.3 若对于任意 $T>0$, 在 $\mathbb{R}\times[0,T]$ 上问题 (4.2) 有一个有界的不变区域, 则问题 (4.2) 在 $\mathbb{R}\times[0,T]$ 上有唯一解.

证明 一定存在 $C>0$, 使得问题 (4.2) 的解 $u(t)$ 满足

$$\|u(t)\|_{B_m}\leqslant C.$$

由定理 5.4.2 即得所要结论.

5.5 评 注

由于得到了有界的不变区域就得到了反应扩散方程解本身的先验估计, 所以自从 Weinberger 的文章 [We] 发表后, 引起了广泛的兴趣, 曾有不少人从事非线性抛物型和椭圆型方程的不变区域的研究. 对应用来说, 首先要讨论 $\mathbb{R}^m$ 中什么样的具体区域可能成为相应的抛物型或椭圆型方程的不变区域, 这方面的代表性结果是 1977 年发表的论文 [CCS] (已总结在 Smoller 的书 [Sm] 中). 但是有两个问题: 一个是 ∇G_i 是否是矩阵 D 和 M 的左特征向量不好验证; 另一个是很多问题中只满足弱切触条件, 即 $\nabla G_i\cdot f\leqslant 0$. 但是由于物理学、化学和生物学中提出的相当一部分反应扩散方程中的 D 和 M 是对角形的, 因而, 如果只考虑不变矩形, $\nabla G_i=(0,\cdots,\overset{(i)}{1},\cdots,0)$ 当然是 D 和 M 的左特征向量. 于是, 我们所考虑的问题是否满足强切触条件就成了关键. 为了把强切触条件减弱为弱切触条件, 文献 [We] 利用了存在性理论, 而文献 [CCS] 则引入了 f 稳定的概念, 实际上这是一种解关于右端的连续依赖性的条件. 这些条件在具体问题中都是难于应用的. 由于这些原因, 寻找不变区域以及不变区域的应用都受到了限制.

也有人对更复杂的强耦合的方程组, 例如

$$u_t^k=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j}^k+\sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i}^k+f^k(x,t,u,\nabla u),\quad k=1,\cdots,m$$

的不变区域进行过研究, 见文献 [RW, Lem], 同时还研究了抽象椭圆型方程的不变区域. 文献 [We, CCS] 研究了不变区域是 $\mathbb{R}^m$ 中的闭凸集以及定理 5.2.3 中的一些条件是否是必要条件等问题. 文献 [Am4] 曾利用不变区域研究过一类方程组的周期解的存在性.

本章的目的主要是介绍不变区域的主要思想及其应用. 有兴趣作进一步研究的读者可参看本评注中提到的有关文献以及这些文献中提到的文献.

习 题 五

5.1 对 Neumann 边界条件情形证明定理 5.2.3.

5.2 证明定理 5.3.1.

5.3 考察常微分方程组

$$u_i'(t) = f_i(u_1, \cdots, u_m, t), \quad i = 1, \cdots, m,$$

其中 $f \in C^1$. 令

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^{N} \{u : u = (u_1, \cdots, u_m),\ u \in U,\ G_i(u) \leqslant 0\},$$

其中 $G_i(u)$ 是从 $\mathbb{R}^m$ 中的开集 U 到 $\mathbb{R}$ 的光滑函数, $\nabla G_i \neq 0$. 试证明: Σ 是不变区域的充要条件是

$$\nabla G_i \cdot f(u, t) \leqslant 0, \quad \forall\ u \in \partial\Sigma, \quad t \geqslant 0.$$

第 6 章　平衡解的存在性与分叉问题——度理论的应用

考虑反应扩散方程平衡解的存在性与稳定性时, 可将它化为讨论 Banach 空间中算子方程

$$\Phi(u) = 0$$

解的存在性与稳定性. 如果反应扩散方程中包含某些参数, 那么相应的算子方程中也就含有某些参数. 因此, 我们将考虑含参数的算子方程

$$\Phi(\lambda, u) = 0,$$

其中 $\Phi : \Lambda \times E_1 \to E_2$, Λ, E_1, E_2 是 Banach 空间, 0 是零元素.

人们感兴趣的常常是以下问题:

(1) 对于给定的参数, 解的存在性与个数.

(2) 解是否稳定?

(3) 解随参数的变化情况, 即所谓分叉问题.

本章仅就方程解的存在性与多解问题及分叉 (bifurcation) 问题作初步讨论而暂不讨论解的稳定性.

处理上述问题的方法有多种, 例如第 2 章曾用上、下解方法讨论了一个简单的分叉问题 (2.3.3 节), 本章只介绍处理这些问题的拓扑度方法 (度理论), 另外一些方法将在以后给出.

本章的重点放在度理论的应用上, 在引进度的概念和讨论度的性质时较多地借助于直观. 若要进一步了解度理论, 可参看 [LQ].

6.1 度的定义

6.1.1 有限维空间中的 Brouwer 度

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是连续函数, p 是 $\mathbb{R}^n$ 中的定点. 考察方程

$$f(x) = p. \tag{1.1}$$

引进与方程 (1.1) 的解是否存在及解的个数有关的度的概念. 先从两个具体例子开始, 给出度的直观背景, 然后引进 C^1 函数的度, 最后引进连续函数的度.

例 1 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是有界开区域, 映射

$$f(z) : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

由一个不恒为常数的解析函数

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$$

表示, 其中 $z = x + \mathrm{i}y$, 这里以复数代表 $\mathbb{R}^2$ 中的点.

由复变函数论中的留数定理知, 若 $p \notin f(\partial\Omega)$, 则 $f(z) - p$ 在 Ω 内零点的个数为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z) - p} \mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega} \mathrm{d}(\ln(f(z) - p)) \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega} \mathrm{d}(\ln|f(z) - p|) + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \mathrm{d}(\arg(f(z) - p)) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \mathrm{d}(\arg(f(z) - p)) \\
&= \frac{1}{2\pi} \times [z \text{ 沿 } \partial\Omega \text{ 变化时, 辐角 } \arg\,(f(z) - p) \text{ 的改变量}] \\
&= z \text{ 绕 } \partial\Omega \text{ 一圈时 } f(z) \text{ 沿 } f(\partial\Omega) \text{ 绕 } p \text{ 点的圈数}
\end{aligned}$$

例 2 $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \in C^2(\bar{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是有界区域, $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, 当 $(x,y) \in \partial\Omega$ 时 $f(x,y) \neq p$. 这时在 $\partial\Omega$ 上每一点都有确定的方向向量

$$T(x,y) = \frac{f(x,y) - p}{|f(x,y) - p|},$$

其中 $|\cdot|$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的模. 把方向向量的起点都放在 p 点, 当 (x,y) 沿 $\partial\Omega$ 转一周回到原处时, $T(x,y)$ 绕 p 点便转过了 j 圈, 即 $2\pi j$ 角度, j 为某整数, 逆时针方向时 $j > 0$, 顺时针方向时 $j < 0$ (图 6.1.1).

图 6.1.1

角度 $2\pi j$ 也是曲线 $f(\partial\Omega)$ 对 p 点所张的角度, 有

$$\begin{aligned}
j &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \mathrm{d}\left(\arctan \frac{v(x,y) - p_2}{u(x,y) - p_1}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{[u(x,y) - p_1]\mathrm{d}v(x,y) - [v(x,y) - p_2]\mathrm{d}u(x,y)}{[u(x,y) - p_1]^2 + [v(x,y) - p_2]^2}, \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

其中 $p=(p_1,p_2)$. 进一步假设 $f(x,y)-p$ 在 Ω 内有 m 个零点: $(x_i,y_i)\neq 0$ 且 $J(x_i,y_i)\neq 0\ (i=1,\cdots,m)$, 其中 $J(x,y)$ 是 $f(x,y)$ 的 Jacobi 行列式. 于是

$$j=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}\int_{f(L_i)}\frac{(u-p_1)\mathrm{d}v-(v-p_2)\mathrm{d}u}{(u-p_1)^2+(v-p_2)^2},\tag{1.3}$$

其中 L_i 是仅包含零点 (x_i,y_i) 的小区域的边界, 在此小区域内 $J(x,y)$ 与 $J(x_i,y_i)$ 同号. 根据 Jacobi 行列式的几何意义, 在变换 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 下, 若 $J(x,y)>0\ (<0)$, 则 $f(L_i)$ 与 L_i 有相同 (相反) 的定向, 于是

$$\frac{1}{2\pi}\int_{f(L_i)}\frac{(u-p_1)\mathrm{d}v-(v-p_2)\mathrm{d}u}{(u-p_2)^2+(v-p_2)^2}=\mathrm{sign}J(x_i,y_i).$$

至此, 就得到了 j 的表达式 (1.2), (1.3) 以及

$$j=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{sign}J(x_i,y_i).\tag{1.4}$$

这个整数 j 就是所要引进的“度”, 它在一定程度上反映了方程 $f(x,y)-p=0$ 的解的情况.

根据以上讨论, 分以下几步引进 $\mathbb{R}^n$ 中连续函数的度. 以 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的模.

1. 当 p 不是临界值时 C^1 函数的度

定义 6.1.1 若 $f(x)=p$, 则称 x 为 f 的一个 p 点. 记 $f^{-1}(p)$ 为 f 在 $\bar{\Omega}$ 上 p 点的集合.

定义 6.1.2 设 f 在 $\bar{\Omega}$ 上可导. 若 $x\in\bar{\Omega}$, $J_f(x)=0$, 其中 $J_f(x)$ 是 $f(x)$ 的 Jacobi 行列式, 则称 x 为 f 的临界点, 相应的值 $f(x)$ 称为 f 的临界值. f 在 $\bar{\Omega}$ 上的临界点的集合记为 $Z_f(\bar{\Omega})$ 或 Z_f, 相应的临界值集合记为 $f(Z_f)$.

引理 6.1.3 设 $f\in C^1(\bar{\Omega})$, $p\notin f(\partial\Omega)\cup f(Z_f)$. 称整数

$$d(f,\Omega,P)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{x\in f^{-1}(p)}\mathrm{sign}J_f, & f^{-1}(p)\ \text{为有限集},\\ 0, & f^{-1}(p)\ \text{为空集}\end{cases}$$

为 f 在 p 点关于开集 Ω 的 Brouwer 度.

例 2 给出了 $\mathbb{R}^2$ 中当 $f\in C^2(\bar{\Omega})$ 时 $d(f,\Omega,p)$ 的几何意义与积分表达式, 那里的 j 就是 $d(f,\Omega,p)$.

例 3 由定义立即可得: 若 I 是 $\mathbb{R}^n$ 中的恒同映射, $F_cx=x_0$, 其中 x_0 为 $\mathbb{R}^n$

中的固定点, 则

$$d(I,\Omega,p)=\begin{cases}1, & p\in\Omega,\\ 0, & p\notin\bar{\Omega},\end{cases}$$

$$d(-I,\Omega,p)=\begin{cases}(-1)^n, & -p\in\Omega,\\ 0, & -p\notin\bar{\Omega},\end{cases}$$

$$d(I-F_c,\Omega,0)=\begin{cases}1, & x_0\in\Omega,\\ 0, & x_0\notin\bar{\Omega}.\end{cases}$$

2. 当 p 是临界值时 C^1 函数的度

引理 6.1.4 设 $f\in C^1(\bar{\Omega})$, $p\notin f(\partial\Omega)$ 但是 $p\in f(Z_f)$, 点 p 到 $f(\partial\Omega)$ 的距离记为 $\rho(p,f(\partial\Omega))$. 则存在 $q\notin f(Z_f)$, $|p-q|<\rho(p,f(\partial\Omega))$, 且当 $q_i\notin f(Z_f)$, $|q_i-p|<\rho(p,f(\partial\Omega))(i=1,2)$ 时, 有

$$d(f,\Omega,q_1)=d(f,\Omega,q_2).$$

证明略.

根据这个引理, 可以给出下面的定义.

定义 6.1.5 设 $f\in C^1(\bar{\Omega})$, $p\notin f(\partial\Omega)$, $p\in f(Z_f)$. 由引理 6.1.4 知, 当 $q\notin f(Z_f)$ 且 $|p-q|<\rho(p,f(\partial\Omega))$ 时, 度 $d(f,\Omega,q)$ 不依赖于 q. 称这个不依赖于 q 的数为 f 在 p 点关于开集 Ω 的 Brouwer 度, 记为 $d(f,\Omega,p)$.

例 4 在 $\mathbb{R}$ 中 $f(x)=x^m$, m 为自然数, $J=(a,b)$ 包含原点, 求 $d(f,J,0)$.

解 函数 $f(x)=0$ 有唯一解 $x=0$, 即 f 有唯一零点 $x=0$. 当 $m\neq 1$ 时, $x=0$ 是 f 的临界点, $f(0)=0$ 是临界值. 对任意 $0\neq\varepsilon<\min\{|f(a)|,|f(b)|\}$, 考察方程

$$f(x)=\varepsilon.$$

当 m 为偶数时, 若 $\varepsilon>0$, 则方程有两个解: $x_1=\sqrt[m]{\varepsilon}$, $x_2=-\sqrt[m]{\varepsilon}$, 并且

$$\operatorname{sign}f'(x_1)=1,\quad \operatorname{sign}f'(x_2)=-1;$$

若 $\varepsilon<0$, 则方程无解. 因此

$$d(f,J,0)=d(f,J,\varepsilon)=0.$$

当 m 为奇数时, 方程有唯一解 $x_1=\sqrt[m]{\varepsilon}$, 并且 $\operatorname{sign}f'(x_1)=1$. 因此

$$d(f,J,0)=d(f,J,\varepsilon)=1.$$

3. *连续函数的度*

连续函数 f 可用 C^1 中的函数来逼近, 所有充分接近 f 的 C^1 函数又有相同的度, 因此可用它来定义连续函数 f 的度.

引理 6.1.6 设 $f \in C(\bar{\Omega}), p \notin f(\partial\Omega)$. 又设 $f_i \in C^1(\bar{\Omega})$, $\|f - f_i\|_{C(\bar{\Omega})} < \rho(p, f(\partial\Omega)), i = 1, 2$. 则 $p \notin f_i(\partial\Omega), i = 1, 2$, 且

$$d(f_1, \Omega, p) = d(f_2, \Omega, p),$$

其中 $\|\cdot\|_{C(\bar{\Omega})}$ 表示 $C(\bar{\Omega})$ 空间中的模.

证明略.

定义 6.1.7 设 $f \in C(\bar{\Omega}), p \notin f(\partial\Omega)$. 由引理 6.1.6 知, 对任意满足 $\|f - g\|_{C(\bar{\Omega})} < \rho(p, f(\partial\Omega))$ 的函数 $g \in C^1(\bar{\Omega})$, 度 $d(g, \Omega, p)$ 不依赖于 g. 称这个不依赖于 g 的数为 f 在 p 点关于开集 Ω 的 Brouwer 度, 记为 $d(f, \Omega, p)$.

上面的讨论适用于任意有限维线性赋范空间.

6.1.2 Banach 空间中的 Leray-Schauder 度

设 E 是 Banach 空间, 其范数记为 $\|\cdot\|$. 又设 Ω 是 E 中的有界开集, $F : \bar{\Omega} \to E$ 是紧算子. 下面将对形如 $\Phi = I - F$ 的算子引进度的概念, 其中 I 是 E 中的恒同算子. 这一目的通过以下几步来实现.

1. *在 $\bar{\Omega}$ 上, 算子 F 可用有限维空间中的紧算子任意逼近*

引理 6.1.8 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有界连续算子 $F_\varepsilon : \bar{\Omega} \to E^{N(\varepsilon)}$, 使得 $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap E^{N(\varepsilon)}$ 非空, 且

$$\|Fu - F_\varepsilon u\| < \varepsilon, \quad \forall\, u \in \bar{\Omega},$$

其中 $E^{N(\varepsilon)}$ 是 E 的有限维 ($N(\varepsilon)$ 维) 子空间, 因而 F_ε 在 $\bar{\Omega}$ 上是紧算子.

证明 因 $F(\bar{\Omega})$ 是列紧集, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在元素 $u_1, \cdots, u_m$, 使得对每个 $u \in F(\bar{\Omega})$, 都有一个 u_i, 满足 $\|u - u_i\| < \varepsilon$. 令 $\mu(u) = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i(u)$,

$$P_\varepsilon u = \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_i(u)}{\mu(u)} u_i, \quad \forall\, u \in F(\bar{\Omega}),$$

其中

$$\mu_i(u) = \begin{cases} \varepsilon - \|u - u_i\|, & \|u - u_i\| < \varepsilon, \\ 0, & \|u - u_i\| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

显然 P_ε 连续且

$$\|P_\varepsilon u\| \leqslant \max\{\|u_1\|, \cdots, \|u_m\|\}, \quad \forall\, u \in F(\bar{\Omega}),$$

即 P_ε 在 $F(\bar{\Omega})$ 上有界. P_ε 的值域属于由 $\{u_1,\cdots,u_m\}$ 张成的有限维子空间 $E^{N(\varepsilon)}$, 因而 Ω_ε 非空.

令 $F_\varepsilon=P_\varepsilon F$, 则 $F_\varepsilon:\bar{\Omega}\to E^{N(\varepsilon)}$ 是有界连续的, 因而是紧的, 且

$$\|Fu-F_\varepsilon u\|\leqslant\left[\sum_{i=1}^m\mu_i(F(u))\right]^{-1}\left\|\sum_{i=1}^m\mu_i(F(u))[F(u)-u_i]\right\|<\varepsilon,\quad u\in\bar{\Omega}.$$

证毕.

2. 定义有限维逼近算子 $\varPhi_\varepsilon=I-F_\varepsilon$ 的度

引理 6.1.9 设 $M\subset E$ 是有界闭集, $F:M\to E$ 是紧算子, $\varPhi=I-F$, $p\notin\varPhi(M)$, 则

$$\inf_{u\in M}\|\varPhi(u)-p\|=h>0.$$

证明 若不然, 则存在 $u_n\in M$ 使得 $\varPhi(u_n)\to p$. 因为 $\{u_n\}$ 是有界集, 故 $\{F(u_n)\}$ 是列紧集, 不妨设 $F(u_n)\to v$. 于是 $u_n=\varPhi(u_n)+F(u_n)\to p+v$, 并且

$$\varPhi(p+v)=(p+v)-F(p+v)=p.$$

因为 M 是闭的, 所以 $p+v\in M$. 上式表明 $p\in\varPhi(M)$, 与假设矛盾. 证毕.

由引理 6.1.9 知, 若 $p\notin\varPhi(\partial\Omega)$, 则 $\inf\limits_{u\in\partial\Omega}\|\varPhi(u)-p\|=h_0>0$. 对任意 $0<\varepsilon\leqslant h_0$, 存在紧算子 $F_\varepsilon:\Omega_\varepsilon\to E^{N(\varepsilon)}$, 其中 $E^{N(\varepsilon)}$ 包含 p, 使得

$$\|F(u)-F_\varepsilon(u)\|<\varepsilon,\quad u\in\bar{\Omega}.$$

于是, 当 $u\in\partial\Omega_\varepsilon$ 时,

$$\|\varPhi_\varepsilon(u)-p\|\geqslant\|\varPhi(u)-p\|-\|\varPhi(u)-\varPhi_\varepsilon(u)\|>h_0-\varepsilon\geqslant 0.$$

因此可以定义 Brouwer 度 $d(\varPhi_\varepsilon,\Omega_\varepsilon,p)$.

3. 有限维逼近算子 $\varPhi_\varepsilon$ 的度 $d(\varPhi_\varepsilon,\Omega_\varepsilon,p)$ 是常数

引理 6.1.10 设 $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<h_0$, 相应地有紧算子

$$F_{\varepsilon_i}:\bar{\Omega}\to E^{N(\varepsilon_i)},\quad \|F(u)-F_{\varepsilon_i}(u)\|<\varepsilon_i,\quad u\in\bar{\Omega},$$
$$\varPhi_{\varepsilon_i}=I-F_{\varepsilon_i},\quad \Omega_{\varepsilon_i}=\Omega\cap E^{N(\varepsilon_i)}.$$

则

$$d(\varPhi_{\varepsilon_1},\Omega_{\varepsilon_1},p)=d(\varPhi_{\varepsilon_2},\Omega_{\varepsilon_2},p).$$

可以利用 Brouwer 度的性质来证明这个引理, 证明将在下一节给出.

定义 6.1.11 设 $p \notin \Phi(\partial\Omega)$, 则当

$$0 < \varepsilon < h_0 = \inf_{u \in \Phi(\partial\Omega)} \|\Phi(u) - p\|$$

时, 度 $d(\Phi_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, p)$ 为常数, 称它为 Φ 在 p 点关于开集 Ω 的 Leray-Schauder 度, 记为 $d(\Phi, \Omega, p)$.

例 5 按定义容易证明如下的 Leray-Schauder 度

$$d(I, \Omega, p) = \begin{cases} 1, & p \in \Omega, \\ 0, & p \notin \bar{\Omega}, \end{cases}$$

$$d(I - F_c, \Omega, 0) = \begin{cases} 1, & u_0 \in \Omega, \\ 0, & u_0 \notin \bar{\Omega}, \end{cases}$$

其中 $F_c u = u_0$, u_0 为 E 中的某个固定元素.

6.2 度 的 性 质

设 E 是 Banach 空间, $\Omega \subset E$ 是有界开集. 若 $E = E^m$ 是 m 维的, 假设 $\Phi : \bar{\Omega} \to E^m$ 是连续算子. 若 E 是无穷维的, 假设 $\Phi = I - F$, 其中 $F : \bar{\Omega} \to E$ 是紧算子. 只要 $p \notin \Phi(\partial\Omega)$, 均可定义度 $d(\Phi, \Omega, p)$. 本节讨论度的性质. 先做一个约定: 以后只要写出 $d(\Phi, \Omega, p)$, 总是认为 $p \notin \Phi(\partial\Omega)$.

对于 Brouwer 度的性质在此不作严格证明, 只利用 E^2 中的 C^2 函数加以说明, 以便理解这些性质. 对于 Leray-Schauder 度的性质, 可以通过逼近算子的 Brouwer 度的性质而得到.

1. *度与方程解的存在性*

定理 6.2.1 若 $d(\Phi, \Omega, p) \neq 0$, 则 $\Phi(u) = p$ 在 Ω 内有解.

在 $\mathbb{R}^2$ 中, 若 $\Phi(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \in C^1(\bar{\Omega})$, $d(\Phi, \Omega, p)$ 由 (1.2) 式给出. 若在 Ω 内 $\Phi(x, y) \neq p$ $(p = (p_1, p_2))$, 则由 Green 公式得

$$\begin{aligned} d(\Phi, \Omega, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Phi(\partial\Omega)} \frac{(u - p_1)\mathrm{d}v - (v - p_2)\mathrm{d}u}{(u - p_1)^2 + (v - p_2)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Phi(\Omega)} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{u - p_1}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v - p_2}{r^2} \right) \right] \mathrm{d}u\mathrm{d}v = 0, \end{aligned}$$

其中 $r^2 = (u - p_1)^2 + (v - p_2)^2$.

若已证明对 Brouwer 度定理 6.2.1 成立, 则易证对 Leray-Schauder 度定理 6.2.1 也成立. 事实上, 若 $p \notin \Phi(\bar{\Omega})$, 则由引理 6.1.9 知, $h_0 = \inf_{\bar{\Omega}} \|\Phi(u) - p\| > 0$. 于是当

$0 < \varepsilon < h_0$ 时, 对任意 $u \in \bar{\Omega}$, 有

$$\|\Phi_\varepsilon(u) - p\| \geqslant \|\Phi(u) - p\| - \|\Phi(u) - \Phi_\varepsilon(u)\| > h_0 - \varepsilon > 0,$$

即 $p \notin \Phi_\varepsilon(\bar{\Omega})$. 因此 $d(\Phi_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, p) = 0$. 再由度的定义得

$$d(\Phi, \Omega, p) = d(\Omega_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, p) = 0.$$

矛盾.

2. 度对区域的可加性

定理 6.2.2 设 Ω 是有界开集, $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$, Ω_1, Ω_2 是 Ω 的不相交开子集. 若 $p \notin \Phi(\partial\Omega_i)$ $(i = 1, 2)$, 则

$$d(\Phi, \Omega, p) = d(\Phi, \Omega_1, p) + d(\Phi, \Omega_2, p).$$

在 $\mathbb{R}^2$ 中, 若 $\Phi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, Ω_1, Ω_2 无公共边界 (图 6.2.1(a)), 则

$$\begin{aligned} d(\Phi, \Omega, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Phi(\partial\Omega)} \frac{(u - p_1)\mathrm{d}v - (v - p_2)\mathrm{d}u}{(u - p_1)^2 + (v - p_2)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Phi(\partial\Omega_1)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Phi(\partial\Omega_2)} = d(\Phi, \Omega_1, p) + d(\Phi, \Omega_2, p). \end{aligned}$$

若 Ω_1, Ω_2 有公共边界 (图 6.2.1(b)), 把 $\partial\Omega_1$ 与 $\partial\Omega_2$ 上的积分相加时, 公共部分上的积分互相抵消.

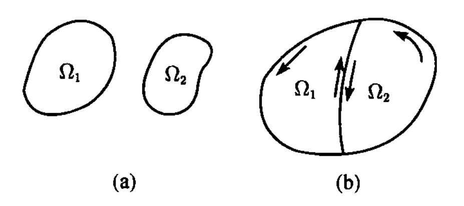


图 6.2.1

现在利用 Brouwer 度对区域的可加性来证明 Leray-Schauder 度对区域的可加性.

注意到 $\partial\Omega \subset \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, 故存在 $h_0 > 0$, 使得

$$\|\Phi(u) - p\| \geqslant h_0, \quad \forall\, u \in \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2.$$

对任意 $0 < \varepsilon \leqslant h_0$, 可构造 $E^{N(\varepsilon)}$ 及 $\Phi = I - F$ 的有限维逼近算子 $\Phi_\varepsilon = I - F_\varepsilon$. 于是 $p \notin \Phi_\varepsilon(\partial\Omega_\varepsilon)$, $p \notin \Phi\ (\partial\Omega_{i\varepsilon})$ $(i = 1, 2)$, 其中 $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap E^{N(\varepsilon)}$, $\Omega_{i\varepsilon} = \Omega_i \cap E^{N(\varepsilon)}$. 显然

$$\bar{\Omega}_\varepsilon = \bar{\Omega}_{1\varepsilon} \cup \bar{\Omega}_{2\varepsilon}, \quad \Omega_{1\varepsilon} \cap \Omega_{2\varepsilon} = \varnothing.$$

利用 Brouwer 度对区域的可加性得

$$d(\Phi_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, p) = d(\Phi_\varepsilon, \Omega_{1\varepsilon}, p) + d(\Phi_\varepsilon, \Omega_{2\varepsilon}, p).$$

再由度的定义知

$$d(\Phi, \Omega, p) = d(\Phi_\varepsilon, \Omega_\varepsilon, p), \quad d(\Phi, \Omega_i, p) = d(\Phi_\varepsilon, \Omega_{i\varepsilon}, p), \quad i = 1, 2.$$

最后得到

$$d(\Phi, \Omega, p) = d(\Phi, \Omega_1, p) + d(\Phi, \Omega_2, p).$$

3. **度的同伦不变性**

现考察含实参数 λ 的算子 Φ_λ. 在有限维空间 E^m 中, 总假定

$$\Phi_\lambda : \Omega \times [a, b] \to E^m$$

是连续的, 其中 $\Omega \subset E^m$ 是有界开集. 在无穷维 Banach 空间 E 中, 总是假定 $\Phi_\lambda = I - F_\lambda$,

$$F_\lambda : \bar{\Omega} \times [a, b] \to E$$

是紧算子, 其中 $\Omega \subset E$ 是有界开集.

在算子的紧性判断中常常用到下面的引理.

引理 6.2.3 设 $F_\lambda : \bar{\Omega} \times [a, b] \to E$ 满足:

(1) 对每个 $\lambda \in [a, b]$, $F_\lambda : \bar{\Omega} \to E$ 是紧算子;

(2) F_λ 关于 $\lambda \in [a, b]$ 对 $u \in \bar{\Omega}$ 一致连续, 即对任意 $\lambda_0 \in [a, b]$, 存在 $\delta = \delta(\lambda_0) > 0$, 使得当 $\lambda \in [a, b]$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ 时, 对一切 $u \in \bar{\Omega}$ 有 $\|F_\lambda(u) - F_{\lambda_0}(u)\| < \varepsilon$. 则

$$F_\lambda : \bar{\Omega} \times [a, b] \to E$$

是紧算子. 这里 $\bar{\Omega} \times [a, b] \subset E \times \mathbb{R}$, $E \times \mathbb{R}$ 是 Banach 空间, 其中元素的范数为 $\|(u, \lambda)\| = \|u\|_E + |\lambda|$.

证明留给读者或参见 [LQ, p.82].

推论 6.2.4 设 $F : \bar{\Omega} \to E$ 是紧算子, $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, 则 $Ff : \bar{\Omega} \times [a, b] \to E$ 是紧算子.

下面讨论度 $d(\Phi_\lambda, \Omega, p)$ 与 λ 的依赖关系.

定理 6.2.5 若 $p \notin \Phi_{[a,b]}(\partial\Omega)$ (即当 $\lambda \in [a, b]$, $u \in \partial\Omega$ 时, $\Phi_\lambda(u) \neq p$), 则

$$d(\Phi_\lambda, \Omega, p) = \text{常数}, \quad \lambda \in [a, b].$$

在 $\mathbb{R}^2$ 中, 由度的积分表达式知, $d(\Phi_\lambda, \Omega, p)$ 是 λ 的连续函数, 取整数值. 因为 $[a, b]$ 上的一个连续函数若取整数值, 那么它必为常数. 故 $d(\Phi_\lambda, \Omega, p)$ 为常数.

现在假设对 Brouwer 度定理 6.2.5 成立. 因为 $\partial\Omega\times[a,b]$ 是 $E\times\mathbb{R}$ 中的有界闭集, 并且当 $\lambda\in[a,b], u\in\partial\Omega$ 时, $\Phi_\lambda(u)\neq p$, 由引理 6.1.9 知

$$h_0=\inf\{\|\Phi_\lambda(u)-p\|:u\in\partial\Omega,\ \lambda\in[a,b]\}>0.$$

对于 $0<\varepsilon<h_0$, 存在紧算子 $F_\lambda^\varepsilon:\Omega\times[a,b]\to E^{N(\varepsilon)}$, 使得

$$\|F_\lambda^\varepsilon(u)-F_\lambda(u)\|<\varepsilon,\quad \forall\ (u,\lambda)\in\Omega\times[a,b]$$

(与引理 6.1.8 类似可证). 相应地, 令 $\Phi_\lambda^\varepsilon=I-F_\lambda^\varepsilon$, 则当 $\lambda\in[a,b], u\in\partial\Omega_\varepsilon$ 时, $\Phi_\lambda^\varepsilon(u)\neq p$. 因此, 对 Leray-Schauder 度而言

$$d(\Phi_\lambda,\Omega,p)=d(\Phi_\lambda^\varepsilon,\Omega_\varepsilon,p)=\text{常数}.$$

还可考虑更一般的情形, 即定义域也随参数 λ 而变化.

定理 6.2.6 设 Ω_* 是 $E\times[a,b]$ 中的有界开集, $F_\lambda:\bar{\Omega}_*\to E$ 是紧算子, 记 $\Omega_\lambda=\{u:(u,\lambda)\in Q_*\}$. 若当 $\lambda\in[a,b], u\in\partial\Omega_\lambda$ 时, $\Phi_\lambda(u)\neq p$, 则

$$d(\Phi_\lambda,\Omega_\lambda,p)=\text{常数},\quad \lambda\in[a,b].$$

定理 6.2.5 和 6.2.6 指出: 只要 Φ_λ 和定义域 Ω_λ 随 λ 变化的过程中, $\partial\Omega_\lambda$ 的象点总不与 p 点接触, 那么在 p 点的度保持不变. 度的这种性质称为同伦不变性.

4. 度的边界性质

定理 6.2.7 设 $p\notin\Phi_i(\partial\Omega),\ i=0,1$. 若当 $u\in\partial\Omega$ 时 $\Phi_0(u)=\Phi_1(u)$, 则

$$d(\Phi_0,\Omega,p)=d(\Phi_1,\Omega,p).$$

证明 令 $\Phi_\lambda=\lambda\Phi_1+(1-\lambda)\Phi_0$, 其中 $\lambda\in[0,1]$. 那么当 $u\in\partial\Omega$ 时,

$$\Phi_\lambda(u)=\Phi_0(u)\neq p.$$

由同伦不变性得

$$d(\Phi_\lambda,\Omega,p)=\text{常数}.$$

于是

$$d(\Phi_0,\Omega,p)=d(\Phi_1,\Omega,p).$$

证毕.

5. **奇点和它的指数**

定义 6.2.8 若 $u_0 \in \Omega$ 满足 $\Phi(u_0) = 0$, 则称 u_0 为 Φ 的奇点或零点. 若存在 u_0 的某邻域 $\|u - u_0\| < \delta$ 属于 Ω, 并且在该邻域内除 u_0 外 Φ 无奇点, 则称 u_0 是 Φ 的孤立奇点.

在 E 中, 记 $U_\delta(u_0) = \{u : \|u - u_0\| < \delta\}$, 它是以 u_0 为心, 以 δ 为半径的开球. 又记 $U_\delta = U_\delta(0)$.

引理 6.2.9 设 u_0 是 Φ 的孤立奇点, 并且当 $u \in U_\delta(u_0) \setminus \{u_0\}$ 时 $\Phi(u) \neq 0$, 则有

$$d(\Phi, U_\tau(u_0), 0) = 常数, \quad \tau \in (0, \delta).$$

证明 以下简记 $U_\tau = U_\tau(u_0)$. 设 $0 < \tau_1 < \tau_2 < \delta$, 则有

$$\overline{U}_{\tau_2} = \overline{U}_{\tau_1} \cup \overline{U_{\tau_2} \setminus U_{\tau_1}}, \quad U_{\tau_1} \cap (U_{\tau_2} \setminus \overline{U}_{\tau_1}) = \varnothing,$$

见图 6.2.2. 于是

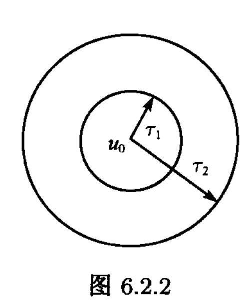


图 6.2.2

$$\begin{aligned} d(\Phi, U_{\tau_2}, 0) &= d(\Phi, U_{\tau_1}, 0) + d(\Phi, U_{\tau_2} \setminus \overline{U}_{\tau_1}, 0) \\ &= d(\Phi, U_{\tau_1}, 0). \end{aligned}$$

证毕.

定义 6.2.10 设 u_0 是 Φ 的孤立奇点 (当 $u \in U_\delta(u_0) \setminus \{u_0\}$ 时 $\Phi(u) \neq 0$), 则称 $d(\Phi, U_\tau(u_0), 0)$ (其中 $0 < \tau < \delta$) 为 Φ 在 u_0 的指数, 记为 $i(u_0, \Phi)$, 或简记为 $i(u_0)$.

定理 6.2.11 设 $0 \notin \Phi(\partial\Omega)$, Φ 在 Ω 内有有限个奇点 $u_1, u_2, \cdots, u_k$, 则

$$d(\Phi, \Omega, 0) = \sum_{j=1}^{k} i(u_j, \Phi).$$

证明留给读者.

6. **高维空间中的 Brouwer 度转化为低维空间中的 Brouwer 度**

为了强调空间的维数 m, 有时在度的记号中加上一个下标 m, 如 E^m 中的度记为 $d_m(f, \Omega, p)$.

定理 6.2.12 设 $m < l$, E^m 为 E^l 的子空间, Ω 为 E^l 中的有界开集, $F : \bar{\Omega} \to E^m$ 连续. 又设 $f(x) = x - F(x)$, $p \in E^m \setminus f(\partial\Omega)$, $\Omega_m = \Omega \cap E^m \neq \varnothing$, f 在 $\bar{\Omega} \cap E^m$ 上的限制记为 $\tilde{f}$, 则

$$d_l(f,\Omega,p)=d_m(\tilde{f},\Omega_m,p).$$

证明 仅对 $f\in C^1$ 的情况给出证明. 不妨设 p 不是 f 的临界值. 显然 $p\notin \tilde{f}(\partial\Omega_m)$. 若存在 $x\in\Omega$, 使得 $f(x)=p$, 则 $x=p+F(x)\in E^m$. 于是

$$Df(x)=\begin{pmatrix} I_{l-m} & 0 \\ * & D\tilde{f}(x) \end{pmatrix},$$

其中 $Df(x)$ 和 $D\tilde{f}(x)$ 分别是 f 和 $\tilde{f}$ 在 x 处的导函数, I_{l-m} 是 E^{l-m} 中的恒同映射. 由此可见, p 也不是 $\tilde{f}$ 的临界值. 当 $x\in f^{-1}(p)$ 时,

$$\text{sign}J_f(x)=\text{sign}J_{\tilde{f}}(x),$$

$$d_l(f,\Omega,p)=\sum_{x\in f^{-1}(p)}\text{sign}J_f(x)=\sum_{x\in \tilde{f}^{-1}(p)}\text{sign}J_{\tilde{f}}(x)=d_m(\tilde{f},\Omega_m,p).$$

证毕.

现在利用定理 6.2.5 和 6.2.12 证明引理 6.1.10.

空间 $E^{N(\varepsilon_1)}$ 和 $E^{N(\varepsilon_2)}$ 可能不相包含, 但总可取包含它们的 E 的有限维子空间 E^l. 记 $\Omega_l=\Omega\cap E^l$, 并令 $\varPhi_\lambda=\lambda\varPhi_{\varepsilon_1}+(1-\lambda)\varPhi_{\varepsilon_2}$, 则当 $\lambda\in[0,1]$, $x\in\partial\Omega_l$ 时, 有 (利用 $\varPhi=I-F$)

$$\begin{aligned}\|\varPhi_\lambda(x)-p\|&\geqslant\|\varPhi(x)-p\|-\|\varPhi_\lambda(x)-\varPhi(x)\|\\&\geqslant\|\varPhi(x)-p\|-\lambda\|F(x)-F_{\varepsilon_1}(x)\|-(1-\lambda)\|F_{\varepsilon_2}(x)-F(x)\|\\&>h_0-\lambda\varepsilon_1-(1-\lambda)\varepsilon_2>0.\end{aligned}$$

由同伦不变性得

$$d(\varPhi_{\varepsilon_1},\Omega_l,p)=d(\varPhi_{\varepsilon_2},\Omega_l,p).$$

再利用定理 6.2.12 得

$$d(\varPhi_{\varepsilon_1},\Omega_{\varepsilon_1},p)=d(\varPhi_{\varepsilon_1},\Omega_l,p)=d(\varPhi_{\varepsilon_2},\Omega_l,p)=d(\varPhi_{\varepsilon_2},\Omega_{\varepsilon_2},p).$$

证毕.

6.3 Leray-Schauder 度的计算

为了有效地利用度理论, 必须解决度的计算问题. 已经知道

$$d(I,\Omega,p)=\begin{cases}1, & p\in\Omega,\\0, & p\notin\bar{\Omega},\end{cases}$$

$$d(I-F_c,\Omega,0)=\begin{cases}1, & u_0\in\Omega,\\0, & u_0\notin\bar{\Omega},\end{cases}$$

其中 $F_c u = u_0$, u_0 为某固定元素.

本节进一步对某些特殊的紧算子给出度的计算方法.

6.3.1 Schauder 不动点定理

定理 6.3.1 (Schauder 不动点定理)　设 $\bar{\Omega}$ 是 E 中的闭凸集, $\mathrm{int}\,\bar{\Omega} = \Omega$, F 是 $\bar{\Omega}$ 上的紧算子, $F(\partial\Omega) \subset \Omega$, 则

$$d(I - F, \Omega, 0) = 1.$$

因而 F 在 Ω 内有不动点.

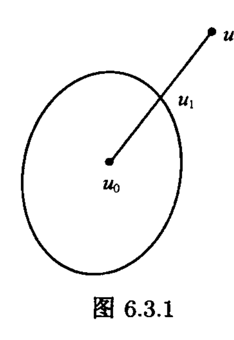


图 6.3.1

为证明定理 6.3.1, 先引述凸集的一个性质.

引理 6.3.2　设 U 是 E 中的凸集, $u_0 \in \mathrm{int}\,U$, $u_1 \in \partial U$. 若 $u_2 = m(u_1 - u_0) + u_0$, $m > 1$, 则 $u_2 \notin \overline{U}$.

引理 6.3.2 是十分直观的 (图 6.3.1), 可用 [GZF, p.185, 定理 3] 来证明, 但这里略去这个证明.

现在证明定理 6.3.1. 取 $u_0 \in \Omega$, 并令

$$\begin{aligned}\Phi_t(u) &= t(u - u_0) + (1 - t)[u - F(u)] \\ &= u - (1 - t)F(u) - tu_0.\end{aligned}$$

显然, 当 $t = 0, 1, u \in \partial\Omega$ 时, $\Phi_t(u) \neq 0$. 进一步证明, 当 $t \in (0, 1), u \in \partial\Omega$ 时 $\Phi_t(u) \neq 0$. 若不然, 则存在 $t_1 \in (0, 1)$, $u_1 \in \partial\Omega$, 使得

$$t_1(u_1 - u_0) + (1 - t_1)[u_1 - F(u_1)] = 0,$$

即

$$\frac{1}{1 - t_1}(u_1 - u_0) + u_0 = F(u_1).$$

由引理 6.3.2 知, $\dfrac{1}{1 - t_1}(u_1 - u_0) + u_0 \notin \bar{\Omega}$, 但 $F(u_1) \in \Omega$, 矛盾. 因此, 由同伦不变性得

$$d(I - F, \Omega, 0) = d(\Phi_0, \Omega, 0) = d(\Phi_1, \Omega, 0) = d(I - F_c, \Omega, 0) = 1.$$

证毕.

6.3.2 奇算子的度

定义 6.3.3　称 E 中的集合 Ω 关于原点是对称的, 若 $u \in \Omega$ 必有 $-u \in \Omega$. 称定义在关于原点对称的集合 Ω 上的算子 Φ 为奇算子, 若

$$\Phi(u) = -\Phi(-u), \quad \forall\, u \in \Omega.$$

显然, $\Phi = I - F$ 是奇算子当且仅当 F 是奇算子. 关于奇算子的度有以下性质.

定理 6.3.4 设 Ω, Ω^* 是 E 中关于原点对称的有界开集, $F : \bar{\Omega} \to E$ 是紧的奇算子, $\Phi = I - F$. 若 $0 \notin \Phi(\partial\Omega)$, 则

$$d(\Phi, \Omega, 0) = d(\Phi, \Omega^*, 0).$$

定理 6.3.5 记 U_R 是 E 中以零点为心, 以 R 为半径的开球. 如果 $F : \overline{U}_R \to E$ 是紧的奇算子, 且 $0 \notin \Phi(\partial U_R)$, 那么

$$d(\Phi, U_R, 0) = \text{奇数}.$$

在此不证明这两个定理, 只说明证明的思路:

(1) 先对 Brouwer 度证明定理 6.3.4 和 6.3.5 (对于 C^1 函数, 当 0 不是临界值时, 可直接计算 Jacobi 行列式而得证).

(2) 对于无穷维情形, 证明能够取到是奇算子的有限维逼近算子 F_ε, 利用度的定义就转化为有限维情形.

6.3.3 线性紧算子的奇点指数

设 E 是实 Banach 空间, $A : E \to E$ 是紧线性算子. 又设对任意 $R > 0$, $\Phi = I - A$ 在 $\overline{U}_R$ 上是奇算子. 若 1 不是 A 的特征值, 则 0 是 Φ 的唯一奇点, 于是

$$i(0, \Phi) = d(\Phi, U_R, 0) = \text{奇数}.$$

下面利用 A 的特征值求出这个奇点的指数.

根据紧线性算子的 Riesz-Schauder 理论, A 的特征值 (使 $Au = \lambda u$ 有非零解的 λ) 至多是可数集, 没有零以外的极限点. 对 A 的每个特征值 λ, 不变子空间

$$E_\lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{u : (A - \lambda I)^n u = 0\}$$

是有限维的. 称 E_λ 的维数为特征值 λ 的重数.

算子 A 的所有大于 1 的特征值 λ 对应的 E_λ 的直和记为 $\tilde{E}_1$, 则 $\tilde{E}_1$ 仍是 A 的不变子空间. 同时存在 A 的不变子空间 $\tilde{E}_2$, 使得

$$\tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2 = \{0\}, \quad E = \tilde{E}_1 \oplus \tilde{E}_2.$$

定理 6.3.6 设 A 是紧线性算子, 不以 1 为特征值, 它的所有大于 1 的特征值的重数之和记为 β, 则

$$i(0, I - A) = d(I - A, U_R, 0) = (-1)^\beta. \tag{3.1}$$

证明 对任意 $u \in E$, 可唯一地分解成

$$u = u_1 + u_2, \quad u_1 \in \tilde{E}_1, \quad u_2 \in \tilde{E}_2,$$

其中 $\tilde{E}_1$ 是 β 维的. 令

$$\Phi_t u = (2t-1)u_1 + u_2 - tAu = u - H(u,t),$$

其中

$$H(u,t) = 2(1-t)u_1 + tAu.$$

可以断言: 当 $t \in [0,1]$, $u \in \partial U_R$ 时, $\Phi_t u \neq 0$. 若不然, 则存在 $u = u_1 + u_2 \in \partial U_R$, $t \in [0,1]$, 使得

$$(2t-1)u_1 - tAu_1 = 0, \quad u_2 - tAu_2 = 0. \tag{3.2}$$

当 $t = 0$ 或 1 时, 由 (3.2) 式得 $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, 这与 $u = u_1 + u_2 \in \partial U_R$ 矛盾. 当 $t \in (0,1)$ 时有 $\dfrac{2t-1}{t} < 1$, 于是由 (3.2) 的第一式及 $\tilde{E}_1$ 的定义得 $u_1 = 0$, 由 (3.2) 的第二式得 $u_2 = 0$, 这也与 $u = u_1 + u_2 \in \partial U_R$ 矛盾.

因此, 当 $t \in [0,1]$, $u \in \partial U_R$ 时, $\Phi_t u \neq 0$. 由同伦不变性得

$$d(I - A, U_R, 0) = d(\Phi_1, U_R, 0) = d(\Phi_0, U_R, 0).$$

令 $I_\beta u = u_1$. 由于

$$\Phi_0 u = -u_1 + u_2 = -2u_1 + u,$$

所以

$$\Phi_0 = -2I_\beta + I.$$

根据度的定义, 有

$$d(\Phi_0, U_R, 0) = d(I - 2I_\beta, U_R, 0) = d(-I_\beta, U_R \cap \tilde{E}_1, 0) = (-1)^\beta.$$

因此 (3.1) 式成立. 证毕.

6.3.4 可导紧算子的奇点指数

设 E 是 Banach 空间. 对于可导紧算子, 可以通过它的导算子来计算原算子的孤立奇点的指数.

定义 6.3.7 设算子 $F: E \to E$, 若存在有界线性算子 $A: E \to E$, 使得

$$\lim_{u \to 0} \frac{\|F(u_0 + u) - F(u_0) - Au\|}{\|u\|} = 0,$$

则称 F 在 u_0 处可导, A 是 F 在 u_0 的导算子, 记为

$$DF(u_0) = A, \quad 或 \quad F'(u_0) = A.$$

例 设 $K(s,t,u)$, $K_u(s,t,u)$ 在 $0 \leqslant s,t \leqslant 1$, $|u| \leqslant a$ 上连续, 并记 B_a 是空间 $C([0,1])$ 中的闭球 $\|u\| \leqslant a$. 易知

$$F(u) = \int_0^1 K(s,t,u(t))\mathrm{d}t$$

是定义在 B_a 上的紧算子. 再证对任意 $u_0 \in B_a, F$ 有导算子

$$Au = \int_0^1 K_u(s,t,u_0(t))u(t)\mathrm{d}t.$$

事实上, 由于

$$\begin{aligned}&\frac{\|F(u_0+u) - F(u_0) - Au\|}{\|u\|}\\ =&\frac{1}{\|u\|}\left\|\int_0^1 \left[K(s,t,u_0(t)+u(t)) - K(s,t,u_0(t)) - K_u(s,t,u_0(t))u(t)\right]\mathrm{d}t\right\|,\end{aligned}$$

由微分中值定理及 K_u 的一致连续性可得

$$\lim_{\|u\|\to 0}\frac{1}{\|u\|}[\|F(u_0+u) - F(u_0) - Au\|] = 0.$$

因此得结论.

显然, 此例中的导算子也是紧的. 下面证明一般结论.

引理 6.3.8 若 F 是紧算子且它的导算子存在, 则其导算子也是紧的.

证明 设 F 在 u^* 的导算子 A 不紧, 则对 E 中的单位球 U_1, $A(U_1)$ 不是列紧集. 一定存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $A(U_1)$ 不存在有限 ε_0 网. 于是存在 $u_i \in U_1$, 使得

$$\|Au_i - Au_j\| > \varepsilon_0, \quad i \neq j, \quad i,j = 1,2,\cdots.$$

由导算子的定义知, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $\|u\| < \delta$ 时,

$$\|F(u^*+u) - F(u^*) - Au\| < \frac{\varepsilon_0}{3}\|u\|.$$

因此

$$\begin{aligned}&\|F(u^*+\delta u_i) - F(u^*+\delta u_j)\|\\ \geqslant&\delta\|Au_i - Au_j\| - \|F(u^*+\delta u_i) - F(u^*) - A\delta u_i\|\\ &-\|F(u^*+\delta u_j) - F(u^*) - A\delta u_j\|\\ \geqslant&\frac{\varepsilon_0\delta}{3}, \quad i \neq j, \quad i,j = 1,2,\cdots.\end{aligned}$$

由此可知, 在序列 $\{F(u^*+\delta u_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 中不能选出收敛的子列, 这与 F 的紧性矛盾. 证毕.

现在利用导算子判断可导紧算子的奇点的孤立性并计算它的指数.

定理 6.3.9　设 F 是实 Banach 空间 E 上的紧算子, $\Phi=I-F$ 以 u_0 为奇点, $DF(u_0)=A$ 不以 1 为特征值. 则

(1) u_0 是 Φ 的孤立奇点;

(2) u_0 的指数

$$i(u_0,\Phi)=(-1)^{\beta},$$

其中 β 是 A 的所有大于 1 的特征值的重数之和.

证明　因 $D\Phi(u_0)=I-A$, 所以

$$\begin{aligned}\Phi(u)&=(I-A)(u-u_0)+R(u-u_0),\\ R(u-u_0)&=o(\|u-u_0\|)\quad (u\to u_0).\end{aligned}$$

令

$$\Phi_t(u)=(I-A)(u-u_0)+tR(u-u_0),\quad t\in[0,1].$$

因为 A 不以 1 为特征值, 所以当 $u\neq 0$ 时, $u-Au\neq 0$. 再由 A 的紧性知

$$\inf_{\|u\|=1}\|u-Au\|=\alpha>0.$$

于是, 对任意 $u\neq u_0$,

$$\left\|\frac{u-u_0}{\|u-u_0\|}-A\frac{u-u_0}{\|u-u_0\|}\right\|\geqslant\alpha,$$

即

$$\|(I-A)(u-u_0)\|\geqslant\alpha\|u-u_0\|.$$

对此 α, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\|u-u_0\|\leqslant\delta$ 时,

$$\|R(u-u_0)\|\leqslant\frac{\alpha}{2}\|u-u_0\|.$$

于是

$$\|\Phi_t(u)\|\geqslant\|(I-A)(u-u_0)\|-t\|R(u-u_0)\|\geqslant\frac{\alpha}{2}\|u-u_0\|.$$

由此推知, u_0 是 Φ 的孤立奇点, 且由同伦不变性得

$$d(\Phi_t,U_\delta(u_0),0)=\text{常数},\quad t\in[0,1].$$

因此

$$\begin{aligned}i(u_0,\Phi)&=d(\Phi_1,U_\delta(u_0),0)=d(\Phi_0,U_\delta(u_0),0)\\ &=d(I-A,U_\delta(0),0)=i(0,I-A)=(-1)^{\beta},\end{aligned}$$

见定理 6.3.6. 证毕.

6.3.5 渐近线性紧算子的奇点指数

定义 6.3.10 设 F 是 E 上的紧算子, 若存在 E 上的有界线性算子 A, 使得

$$\lim_{\|u\|\to\infty}\frac{\|Fu-Au\|}{\|u\|}=0,$$

则称 F 为 E 上的渐近线性紧算子, A 为 F 在无穷远处的导算子, 记为 $DF(\infty)=A$.

引理 6.3.11 设 F 是 E 上的渐近线性紧算子, $DF(\infty)=A$, 则 A 也是紧算子.

证明 与引理 6.3.8 的证明类似.

定理 6.3.12 设 F 是实 Banach 空间 E 上的渐近线性紧算子, $DF(\infty)=A$. 若 1 不是 A 的特征值, 则存在常数 $r_0>0$, 使得当 $r\geqslant r_0$ 时,

$$d(I-F,U_r(0),0)=(-1)^{\beta},$$

其中 β 是 A 的所有大于 1 的特征值的重数之和.

证明 由于 $DF(\infty)=A$, 所以

$$\begin{aligned}\Phi(u)&\equiv u-F(u)=u-Au+R(u),\\ R(u)&=o(\|u\|)\quad(\|u\|\to\infty).\end{aligned}$$

令

$$\Phi_t(u)=u-Au-tR(u).$$

因为 1 不是 A 的特征值, 所以存在 $\alpha>0$, 使得对任意 $u\neq 0$, 有 $\|u-Au\|\geqslant\alpha\|u\|$. 对此 α, 存在 $r_0>0$, 使得当 $\|u\|\geqslant r\geqslant r_0$ 时,

$$\|R(u)\|<\frac{\alpha}{2}\|u\|.$$

所以当 $\|u\|\geqslant r\geqslant r_0$, $t\in[0,1]$ 时, 有

$$\|\Phi_t u\|\geqslant\frac{\alpha}{2}\|u\|>0.$$

利用同伦不变性得

$$d(\Phi_1,U_r(0),0)=d(\Phi_0,U_r(0),0),$$

即

$$d(I-F,U_r(0),0)=d(I-A,U_r(0),0)=(-1)^{\beta}.$$

证毕.

6.4 度理论的应用 —— 半线性椭圆型方程边值问题解的存在性

本节将利用度理论讨论边值问题

$$\begin{cases} Lu + c(x)u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ Bu = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

解的存在性, 其中 $L, B, c(x), g(x), f(x,u)$ 满足 2.1 节的条件, 并且 $c(x) \geqslant 0$. 同时, 当 $c(x) \equiv 0$ 时, 还假设边界条件中的 $b(x) \not\equiv 0$ (后面的这个条件保证与其对应的线性方程解的唯一性成立).

设 E 是 Banach 空间, 利用度理论证明 E 中的算子方程

$$\varPhi(u) \equiv u - Tu \tag{4.2}$$

解的存在性时, 常用到下面的定理.

定理 6.4.1　设算子方程

$$\varPhi(\lambda)u := u - T(\lambda)u = 0 \tag{4.3}$$

满足以下条件:

(1) $T(\lambda): [a,b] \times E \to E$ 是紧算子;

(2) 存在常数 $M > 0$, 使得对一切 $\lambda \in [a,b]$, 方程 (4.3) 在球面 ∂U_M 上无解;

(3) 存在 $\lambda_0 \in [a,b]$, 使得 $d(\varPhi(\lambda_0), U_M, 0) \neq 0$.

则对任意 $\lambda \in [a,b]$, 问题 (4.3) 在 U_M 内有解.

证明　由同伦不变性知

$$d(\varPhi(\lambda), U_M, 0) = d(\varPhi(\lambda_0), U_M, 0) \neq 0,$$

因此 $\varPhi(\lambda)u = 0$ 在 U_M 内有解. 证毕.

该定理给出的方法是: 引进一个同伦场 (含参数的算子方程), 把原问题与已知其度不为零的特殊场连接起来. 为使这个同伦场的度在某球面上有意义, 必须对解做先验估计.

为把上述原理用于边值问题 (4.1), 首先要选择适当的函数空间, 在此空间中把问题 (4.1) 转化为等价的算子方程 (4.2).

对任意 $u \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ ($u \in L_p(\Omega)$, $p > 1$), 线性问题

$$\begin{cases} Lv + c(x)v = u, & x \in \Omega, \\ Bv = g, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

有唯一解 $v \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ ($v \in W_p^2(\Omega)$), 记为 $v = A(u)$. 引理 2.2.3 说明 A 是紧算子.

令

$$F(u) = f(x, u), \tag{4.4}$$

将 (4.1) 改写成

$$u - A(F(u)) = 0. \tag{4.5}$$

引理 6.4.2 若 u 是方程 (4.5) 在 $C(\bar{\Omega})$ 中的解, 则 u 是问题 (4.1) 的古典解且 $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.

该引理的证明由读者自己完成.

现在引进含参数 t 的算子方程

$$u - A(tF(u)) = 0. \tag{4.6}$$

它等价于

$$\begin{cases} Lu + c(x)u = tf(x, u), & x \in \Omega, \\ Bu = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.7}$$

其中 $t \in [0, 1]$.

定理 6.4.3 设存在常数 $M > 0$, 使得当 $t \in [0, 1]$ 时, 若问题 (4.7) 有解 u, 必有 $\|u\| < M$, 其中 $\|\cdot\|$ 是 $C(\bar{\Omega})$ 中的范数, 则问题 (4.1) 存在解 $u(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.

证明 在 $E = C(\bar{\Omega})$ 中考察问题 (4.6), 则有

(1) $A(tF)(\cdot) : [0, 1] \times E \to E$ 是紧算子;

(2) 对一切 $t \in [0, 1]$, 方程 (4.6) 在球面 ∂U_M 上无解;

(3) $t = 0$ 时, 问题 (4.6) 有唯一解 $u = u_0 := A(0)$, 其指数为 1.

因此, 由定理 6.4.1 知, 对任意 $t \in [0, 1]$, 问题 (4.6) 在 U_M 内有解. 特别地, 当 $t = 1$ 时, 即问题 (4.1) 存在解 $u(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. 证毕.

6.5 度理论的应用 —— 多解问题

6.5.1 Banach 空间中紧算子方程的多解问题

设 E 为 Banach 空间, $T : E \to E$ 为紧算子. 令 $\Phi = I - T$. 讨论算子方程

$$\Phi(u) = u - T(u) = 0 \tag{5.1}$$

的多解问题.

引进含参数 t 的算子方程

$$\Phi_t(u) := u - T_t(u) = 0, \tag{5.2}$$

其中 $T_t: [0,1] \times E \to E$ 是紧算子, 而且 $T_1 = T$.

定理 6.5.1　假设 T_t 满足以下条件:

(1) 存在 $M > 0$, 使得对任意 $t \in [0,1]$, 若问题 (5.2) 有解 u, 则必有 $\|u\| < M$;

(2) 存在有界开凸集 V, 使得 $T_1(\overline{V}) \subset V$, 且 $0 \notin \overline{V}$;

(3) 存在 $\delta > 0$, 使得 $\overline{U}_\delta(0) \cap \overline{V} = \varnothing$, 并且当 $t \in [0,1]$ 时, 问题 (5.2) 在 $U_\delta(0)$ 中无非零解;

(4) T_0 是零算子.

则问题 (5.1) 至少存在两个非零解.

证明　由假设 (2) 及 Schauder 不动点定理, 在 V 内问题 (5.1) 存在一个非零解, 且

$$d(\Phi, V, 0) = 1. \tag{5.3}$$

由假设 (1) 知, 存在球 $U_R = U_R(0) \supset \overline{V}$, 且 $0 \notin \Phi_t(\partial U_R)$, $\forall\, t \in [0,1]$. 又由假设 (3) 知, 存在球 $\overline{U}_\delta \subset U_R$, 使得 $\overline{U}_\delta$ 与 $\overline{V}$ 不交, 且当 $t \in [0,1]$ 时, 问题 (5.2) 在 $\overline{U}_\delta$ 无非零解.

令 $U_\delta^R = U_R \setminus \overline{U}_\delta$, 则

$$U_\delta^R = V \cup (U_\delta^R \setminus \overline{V}).$$

由度的可加性得

$$d(\Phi, U_\delta^R, 0) = d(\Phi, V, 0) + d(\Phi, U_\delta^R \setminus \overline{V}, 0). \tag{5.4}$$

又由度的同伦不变性知

$$d(\Phi_t, U_\delta^R, 0) = \text{常数}, \quad t \in [0,1].$$

再由条件 (4) 得

$$d(\Phi, U_\delta^R, 0) = d(\Phi_0, U_\delta^R, 0) = d(I, U_\delta^R, 0) = 0. \tag{5.5}$$

将 (5.3) 式和 (5.5) 式代入 (5.4) 式推知

$$d(\Phi, U_\delta^R \setminus \overline{V}, 0) = -1.$$

因此, 问题 (5.1) 在 $U_\delta^R \setminus \overline{V}$ 内又有一个解, 即另一个非零解. 证毕.

定理 6.5.2　设 T 是可导渐近线性紧算子, 1 不是 $DT(\infty)$ 的特征值 (或 $I - DT(\infty)$ 可逆). 若问题 (5.1) 有两个不同的解 u_1, u_2, 且 $DT(u_i)$ 不以 1 为特征值 (或 $I - DT(u_i)$ 可逆), $i = 1, 2$, 则问题 (5.1) 至少还有另外一个解.

证明 如若不然, 可取 R 充分大, 使得 $u_1, u_2 \in U_R$. 由渐近线性紧算子的性质得

$$d(I-T, U_R, 0) = (-1)^{\beta}. \tag{5.6}$$

利用度的可加性又得

$$d(I-T, U_R, 0) = i(u_1) + i(u_2). \tag{5.7}$$

因为 $i(u_j) = 1$ 或 -1, 所以 (5.7) 式右端的值是 2, 0 或者 -2. 这与 (5.6) 式矛盾. 证毕.

6.5.2 利用严格上、下解构造凸集

现在考虑椭圆型方程组的第一边值问题

$$\begin{cases} N_i u \equiv L_i u_j + c_i u_i = f_i(x, u_1, u_2), & x \in \Omega, \\ B_i u_i \equiv u_i = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad i = 1, 2. \tag{5.8}$$

它满足第 4 章所指出的条件, 并且 $c_j(x) \geqslant 0$, $c_i(x) \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$. 还假设函数 f_i 在 $\bar{\Omega} \times \Sigma$ 上对 x 是 Hölder 连续, 对 u_1, u_2 是 Lipschitz 连续, 即存在 $M > 0$, 使得当 (u_1, u_2), $(v_1, v_2) \in \Sigma$, $x, y \in \Omega$ 时, 有

$$|f_i(x, u_1, u_2) - f_i(y, v_1, v_2)| < M\left(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| + |x - y|^{\alpha}\right), \quad i = 1, 2, \tag{5.9}$$

其中 Σ 是 (u_1, u_2) 空间中的某有界区域.

将 (5.8) 式改写成

$$\begin{cases} N_i u_i + M u_i = M u_i + f_i(x, u_1, u_2), & x \in \Omega, \\ u_i = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

对任意 $u = (u_1, u_2) \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ (或 $u \in L_p(\Omega) \times L_p(\Omega)$), 由

$$\begin{cases} N_i v_i + M v_i = M u_i + f_i(x, u_1, u_2), & x \in \Omega, \\ v_i = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad i = 1, 2 \tag{5.10}$$

可唯一解出

$$v = (v_1, v_2) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \quad (v \in W_p^2(\Omega) \times W_p^2(\Omega)),$$

记为 $v = \hat{T}u$.

引理 6.5.3 在 $C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$ (或 $C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega})$) 上 $\hat{T}$ 是紧算子, 并且问题 (5.8) 与算子方程 $u - \hat{T}u = 0$ 等价.

证明 由读者自己完成.

为了构造一个开凸集 U, 使得 $\hat{T}(\overline{U}) \subset U$, 引进严格上下解的定义.

设 $\{f_1, f_2\}$ 在 Σ 上是拟单调的.

定义 6.5.4 设 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ 是问题 (5.8) 的上、下解. 如果对 $i=1,2$, 在 $N_i\bar{u}_i$ 与 $B_i\bar{u}_i$ 满足的关系式中至少有一个不取恒等号, 在 $N_i\underline{u}_i$ 与 $B_i\underline{u}_i$ 满足的关系式中至少有一个不取恒等号, 则称 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ 是问题 (5.8) 的严格上、下解.

构造迭代序列

$$\begin{cases} N_iV_i^{(k)} + KV_i^{(k)} = MV_i^{(k-1)} + f_i(x, V_1^{(k-1)}, V_2^{(k-1)}), & x \in \Omega, \\ V_i^{(k)} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.11}$$

不妨认为 $\{f_1, f_2\}$ 在 Σ 是拟增的. 假设 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, $(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \in \Sigma$, 并且

$$\bar{u}_i(x) > \underline{u}_i(x), \quad x \in \Omega, \quad i = 1, 2.$$

取 $(V_1^{(0)}, V_2^{(0)}) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, 相应地由问题 (5.11) 确定的解记为 $(\bar{u}_1^{(1)}, \bar{u}_2^{(1)})$; 取 $(V_1^{(0)}, V_2^{(0)}) = (\underline{u}_1, \underline{u}_2)$, 相应地由问题 (5.11) 确定的解记为 $(\underline{u}_1^{(1)}, \underline{u}_2^{(1)})$. 因为

$$\begin{cases} N_i\bar{u}_i^{(1)} + M\bar{u}_i^{(1)} = M\bar{u}_j + f_i(x, \bar{u}_1, \bar{u}_2), & x \in \Omega, \\ \bar{u}_i^{(1)} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_i\bar{u}_i \geqslant f_i(x, \bar{u}_1, \bar{u}_2), & x \in \Omega, \\ \bar{u}_i \geqslant 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

并且第二个不等式组中的两个不等式至少有一个不为恒等号, 令 $w_i = \bar{u}_i - \bar{u}_i^{(1)}$, 则有

$$N_iw_i + Mw_i \geqslant 0, \quad x \in \Omega; \quad w_i|_{\partial\Omega} \geqslant 0.$$

那么, $w_i \geqslant 0, w_i \not\equiv 0$. 由强极值原理知 $w_i > 0$, 即

$$\bar{u}_i^{(1)} < \bar{u}_i, \quad x \in \Omega.$$

同理可证

$$\underline{u}_i < \underline{u}_i^{(1)}, \quad x \in \Omega.$$

再令 $z_i = \bar{u}_i^{(1)} - \underline{u}_i^{(1)}$, 有

$$\begin{cases} N_iz_i + Mz_i = M(\bar{u}_i - \underline{u}_i) + f_i(x, \bar{u}_1, \bar{u}_2) - f_i(x, \underline{u}_1, \underline{u}_2), & x \in \Omega, \\ z_i = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

由于 $\{f_1, f_2\}$ 是拟增的, 利用条件 (5.9) 得

$$N_iz_i + Mz_i > 0, \quad x \in \Omega; \quad z_i|_{\partial\Omega} = 0.$$

利用强极值原理和 Hopf 引理推得

$$z_i|_\Omega > 0, \quad \left.\frac{\partial z_i}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} < 0,$$

即

$$\underline{u}_i^{(1)} < \bar{u}_i^{(1)}, \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial n} < \frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial n}, \quad x \in \partial\Omega.$$

归纳可证, 当 $x \in \Omega$ 时,

$$\underline{u}_i < \underline{u}_i^{(1)} < \underline{u}_i^{(2)} < \cdots < \bar{u}_i^{(2)} < \bar{u}_i^{(1)} < \bar{u}_i, \quad i = 1, 2.$$

令

$$E = \left\{u : u = (u_1, u_2) \in C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega}),\ u_i\big|_{\partial\Omega} = 0,\ i = 1, 2\right\}.$$

容易证明: 对任意 $u = (u_1, u_2) \in E$, 若

$$\underline{u}_i \leqslant u_i \leqslant \bar{u}_i, \quad x \in \partial\Omega, \quad i = 1, 2,$$

则存在常数 $M_1 > 0$, 使得 $\|\hat{T}u\|_E < M_1$. 再令

$$U = \left\{u \in E : \underline{u}_i^{(1)} < u_i < \bar{u}_i^{(1)}, x \in \Omega; \right.$$
$$\left. \frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial n} < \frac{\partial u_i}{\partial n} < \frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial n}, x \in \partial\Omega,\ \|u\|_E < M_1\right\}, \tag{5.12}$$

则 U 是 E 中的开凸集. 对任意 $u \in \overline{U}$, 同上可证: 若 $v = \hat{T}u$, 则 $\|v\| < M_1$ 并且

$$\underline{u}_i^{(1)}(x) < v_i(x) < \bar{u}_i^{(1)}(x), \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial n} < \frac{\partial v_i}{\partial n} < \frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial n}, \quad x \in \partial\Omega,$$

即 $\hat{T}(\overline{U}) \subset U$.

6.5.3 椭圆型方程组的多解问题——存在严格上、下解的情形

现在回到方程组 (5.8), 即

$$\begin{cases} N_i u_i = f_i(x, u_1, u_2), & x \in \Omega, \\ u_i = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad i = 1, 2. \tag{5.13}$$

引入含参数 t 的方程组

$$\begin{cases} N_i u_i + tMu_i = t[Mu_i + f_i(x, u_1, u_2)], & x \in \Omega, \\ u_i = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad i = 1, 2, \tag{5.14}$$

其中 $t \in [0,1]$.

定理 6.5.5　假设

(1) $\{f_1, f_2\}$ 是拟单调的;

(2) 存在 $R_0 > 0$, 使得对任意 $t \in [0,1]$, 若问题 (5.14) 有非负解 $u = (u_1, u_2)$, 则 $\max\limits_{\bar{\Omega}} u_i < R_0$, $i = 1, 2$;

(3) 问题 (5.13) 存在严格上下解 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ 和 $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$, 并且满足

$$0 < \underline{u}_i < \bar{u}_i, \quad x \in \Omega, \quad i = 1, 2;$$

(4) $f_i(x, u_1, u_2)|_{u_i=0} = 0$, 并且当 $u \to 0$ 时, $f_i(x, u_1, u_2) = o(|u|)$ 对 $x \in \bar{\Omega}$ 一致成立.

那么问题 (5.13) 至少存在两个非零的非负解.

证明　考虑辅助问题

$$\begin{cases} N_i u_i = \tilde{f}_i(x, u_1, u_2), & x \in \Omega, \\ u_i = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad i = 1, 2 \tag{5.15}$$

及相应的

$$\begin{cases} N_i u_i + tMu_i = t[Mu_i + \tilde{f}_i(x, u_1, u_2)], & x \in \Omega, \\ u_i = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad i = 1, 2, \tag{5.16}$$

其中 $t \in [0,1]$,

$$\tilde{f}_i(x, u_1, u_2) = \begin{cases} f_i(x, u_1, u_2), & u_i \geqslant 0, \\ 0, & u_i < 0, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

显然 $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2\}$ 与 $\{f_1, f_2\}$ 有相同的拟单调性, $\tilde{f}_i$ 满足 f_i 的光滑性假定. 不妨设它们有相同的 Lipschitz 常数 M.

在空间 E 中, 问题 (5.15) 等价于算子方程

$$u = \hat{T}u,$$

其中 $v = \hat{T}u$ 由 (5.10) 式定义. 若该式中的 f_i 换成 $\tilde{f}_i$, 那么 $\hat{T} : E \to E$ 是紧的. 空间 E 中的范数记为 $\|\cdot\|_E$. 问题 (5.16) 等价于含参数 t 的算子方程

$$u = \hat{T}_t u,$$

其中 $v = \hat{T}_t u$ 由

$$\begin{cases} N_i v_i + tMv_i = t[Mu_i + \tilde{f}_i(x, u_1, u_2)], & x \in \Omega, \\ v_i = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad i = 1, 2 \tag{5.17}$$

确定. 那么 $\hat{T}_t : [0,1] \times E \to E$ 是紧算子.

把下面的证明分成四步.

I. 设 (u_1, u_2) 是问题 (5.16) 的解, 令

$$\Omega_i^- = \{x : x \in \Omega, u_i(x) < 0\},$$

则

$$N_i u_i = 0, \quad x \in \Omega_i^-; \quad u_i = 0, \quad x \in \partial\Omega_i^-.$$

于是在 Ω_i^- 上 $u_i \equiv 0$, 即 $\Omega_i^- = \varnothing$. 因此, 若 (u_1, u_2) 是问题 (5.16) 的解, 那么它一定是问题 (5.14) 的解且 $u_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$, $x \in \Omega$. 进而由条件 (2) 得

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_i| < R_0, \quad i = 1, 2.$$

利用嵌入定理及 L_p 估计推知

$$\begin{aligned}|u_i|_{1+\alpha} &\leqslant C_2(\|u_1\|_{2,p} + \|u_2\|_{2,p}) \\ &\leqslant C_4(\|f_1(x,u_1,u_2)\|_p + \|f_2(x,u_1,u_2)\|_p + \|u_1\|_p + \|u_2\|_p).\end{aligned}$$

因而存在 $R > 0$, 使得

$$\|u\|_E < R.$$

II. 显然 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ 也是问题 (5.15) 的上、下解. 用 $\tilde{f}_i$ 代替 f_i, 按照 (5.12) 的方式定义 E 中的开凸集 U, 则有

$$\hat{T}(\overline{U}) \subset U, \quad 0 \notin \overline{U}.$$

III. 存在 $\delta > 0$, 使得当 $t \in [0,1]$ 时, 问题 (5.16) 在 $\overline{U}_\delta(0)$ 中无非零解. 若不然, 则存在 $t_m \in [0,1]$ 和问题 (5.16) 对应于 $t = t_m$ 的解 u_m, 使得

$$\|u_m\|_E \neq 0, \quad \|u_m\|_E \to 0.$$

利用解的先验估计可得

$$\begin{aligned}\|u_m\|_E &\leqslant C_1\left(\|f_1(x,u_{1m},u_{2m}\|_p + \|f_2(x,u_{1m},u_{2m})\|_p\right) \\ &\leqslant C_2\left(\max_{x\in\Omega}|f_1(x,u_{1m},u_{2m})| + \max_{x\in\Omega}|f_2(x,u_{1m},u_{2m})|\right).\end{aligned}$$

由此及条件 (4) 推知, 当 m 充分大时,

$$\|u_m\|_E \leqslant \frac{1}{2}\|u_m\|_E.$$

这是一个矛盾.

IV. 显然 $\hat{T}_0$ 是零算子.

综合上述分析, 最后利用定理 6.5.1 即得结论. 证毕.

下面讨论一个例子.

例 考虑下面的边值问题

$$\begin{cases} \widetilde{N}_1 u_1 = \lambda_1 u_1^{p_1}(-b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + d_1), & x \in \Omega, \\ \widetilde{N}_2 u_2 = \lambda_2 u_2^{p_2}(b_{21}u_1 - b_{22}u_2 + d_2), & x \in \Omega, \\ u_1 = 0, \quad u_2 = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.18}$$

其中 $p_1, p_2 > 1$,

$$\widetilde{N}_i u = -\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{k,j}^{(i)}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + c_i(x)u, \quad i = 1, 2,$$

$$a_{k,j}^{(i)} \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}), \quad c_i \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}), \quad c_i|_{\Omega} \geqslant 0.$$

在讨论问题 (5.18) 时, 需要利用 [Ra1, 定理 1.16]. 现叙述如下:

定理 6.5.6 若函数 $g(x,u)$ 满足:

(1) g 在 $\bar{\Omega} \times [0,\infty)$ 是局部 Lipschitz 的, $g(x,0) = 0$;

(2) 存在 $a > 0$, 使得当 $u \geqslant a$ 时 $g(x,u) < 0$;

(3) 记 $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)\mathrm{d}s$. 存在 $(x^*, u^*) \in \Omega \times [0,a)$, 使得 $G(x^*,u^*) > 0$;

(4) $g(x,u) = o(u)$ ($u \to 0$, 对 $x \in \bar{\Omega}$ 一致).

则存在 $\lambda^* > 0$, 使得当 $\lambda \geqslant \lambda^*$ 时, 问题

$$\begin{cases} \widetilde{N}u := -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x)u_{x_i}) + c(x)u = \lambda g(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

存在解 $u(x) > 0$ ($x \in \Omega$), 其中 $\widetilde{N}u$ 与 $\widetilde{N}_j u$ 有相同的假定.

利用定理 6.5.5 和 6.5.6 可得

定理 6.5.7 设 b_{ij}, d_i 为正常数, 并且

$$\begin{vmatrix} -b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & -b_{22} \end{vmatrix} > 0, \tag{5.19}$$

则存在 $\lambda_i^* > 0$, 使得当 $\lambda_i \geqslant \lambda_i^*$ $(i = 1, 2)$ 时, 问题 (5.18) 至少存在两个正解.

证明 (1) 先证明问题 (5.18) 存在严格上、下解.

考察边值问题

$$\begin{cases} \widetilde{N}_i u = \lambda_i u^{p_i}(d_i - b_{ii}u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.20}$$

由定理 6.5.6 知, 存在 $\lambda_i^* > 0$, 使得当 $\lambda_i \geqslant \lambda_i^*$ 时, 问题 (5.20) 存在正解 $\underline{u}_i(x) > 0$ $(x \in \Omega)$. 由条件 (5.19) 可知, 存在常数 $M_i > \max_{\bar{\Omega}} \underline{u}_i(x)$, 使得

$$-b_{11}M_1 + b_{12}M_2 + d_1 \leqslant 0, \quad b_{21}M_1 - b_{22}M_2 + d_2 \leqslant 0.$$

易验证 (M_1, M_2), $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ 是问题 (5.18) 的严格上、下解.

(2) 设 $u_1 \geqslant 0$, $u_2 \geqslant 0$ 是方程组

$$\begin{cases} \widetilde{N}_1 u_1 + tMu_1 = t[Mu_1 + u_1^{p_1}(-b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + d_1)], & x \in \Omega, \\ \widetilde{N}_2 u_2 + tMu_2 = t[Mu_2 + u_2^{p_2}(b_{21}u_1 - b_{22}u_2 + d_2)], & x \in \Omega, \\ u_1 = 0, \quad u_2 = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解, 且它们都不恒为零. 那么 u_i 在 Ω 的某内点 x_i^* 处取到正的最大值 q_i. 于是

$$q_1^{p_1}(-b_{11}q_1 + b_{12}q_2 + d_1) \geqslant 0, \quad q_2^{p_2}(b_{21}q_1 - b_{22}q_2 + d_2) \geqslant 0,$$

从而

$$-b_{11}b_{21}q_1^2 + 2b_{12}b_{21}q_1q_2 - b_{12}b_{22}q_2^2 + b_{21}d_1q_1 + b_{12}d_2q_2 \geqslant 0.$$

由条件 (5.19) 知, $-b_{11}b_{21}y_1^2 + 2b_{12}b_{21}y_1y_2 - b_{12}b_{22}y_2^2$ 是负定二次型, 所以存在常数 $R_0 > 0$, 使得

$$\sqrt{q_1^2 + q_2^2} < R_0.$$

利用定理 6.5.5 即得结论. 证毕.

上面的讨论对于椭圆型方程式的边值问题

$$\begin{cases} Lu + c(x)u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ Bu = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5.21}$$

也是适用的. 这里 L, B, f 满足第 2 章的假设条件.

6.5.4 椭圆型方程的多解问题——极小解与极大解不等的情形

若问题 (5.21) 存在上、下解 $\bar{u}(x)$, $\underline{u}(x)$, 并且 $\underline{u}(x) \leqslant \bar{u}(x)$, 则在 $[\underline{u}(x), \bar{u}(x)]$ 中问题 (5.21) 存在极小解 $u_1(x)$ 和极大解 $u_2(x)$. 现设 $u_1(x), u_2(x)$ 是 $[\underline{u}, \bar{u}]$ 中两个不相同的解, 进一步假定:

(1) f, $f_u(x,u) \in C^\alpha(\bar{\Omega} \times [a,b])$, 其中 $[a,b] \supset [\underline{u}(x) - \delta,\ \bar{u}(x) + \delta]$ $(x \in \bar{\Omega})$, $\delta > 0$ 是某正数;

(2) 或者 $c(x) \geqslant c_0 > 0$, 或者 $b(x) \geqslant b_0 > 0$ ($b(x)$ 包含在边界条件中).

下面将证明: 问题 (5.21) 只有解 u_1 和 u_2 是一种特殊情形, 一般情形下问题 (5.21) 至少还有另外一个解.

取 $E = C(\bar{\Omega})$, 与问题 (5.21) 等价的算子方程是

$$u = AF(u), \tag{5.22}$$

其中 A, F 如 6.4 节所指出, AF 在 E 中是紧的.

为了求出 AF 在 $u = u_i$ 处的导算子, 先引述关于线性椭圆型方程解的最大模估计的引理.

引理 6.5.8 设 $f \in C(\bar{\Omega})$, u 是边值问题

$$Lu + cu = f(x), \quad x \in \Omega; \quad Bu|_{\partial\Omega} = 0$$

的古典解, 则存在常数 $C^* > 0$, 使得

$$\|u\|_C \leqslant C^* \|f\|_C,$$

其中 $\|\cdot\|_C$ 为 $C(\bar{\Omega})$ 空间中的模.

引理 6.5.9 在 E 中 AF 在 $u = u_i$ 处的导算子是

$$AF'(u_i), \quad \text{其中 } F'(u_i) = f_u(x, u_i(x)).$$

证明 已知 $u_i = AF(u_i)$, 令

$$v = AF(u), \quad w = AF'(u_i)(u - u_i),$$

则有

$$\begin{cases} L(v - u_i - w) + c(x)(v - u_i - w) = F(u) - F(u_i) - F'(u_i)(u - u_i), & x \in \Omega, \\ B(v - u_i - w)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

利用引理 6.5.8 知

$$\|v - u_i - w\|_C \leqslant C^* \|F(u) - F(u_i) - F'(u_i)(u - u_i)\|_C.$$

由此易得

$$\lim_{\|u - u_i\|_C \to 0} \frac{\|v - u_i - w\|_C}{\|u - u_i\|_C} = 0.$$

结论成立.

定理 6.5.10 若对于 $i=1,2$, 边值问题

$$\begin{cases} Lv+c(x)v-F'(u_i)v=0, & x\in\Omega, \\ Bv=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

只有零解, 则在 $[\underline{u},\ \bar{u}]$ 中问题 (5.21) 至少有三个解.

证明 令

$$\tilde{f}(x,\xi)=\begin{cases} f(x,\underline{u}(x))+\underline{u}(x)-\xi, & \xi\leqslant\underline{u}(x), \\ f(x,\xi), & \underline{u}(x)\leqslant\xi\leqslant\bar{u}(x), \\ f(x,\bar{u}(x))+\bar{u}(x)-\xi, & \xi\geqslant\bar{u}(x), \end{cases}$$

并考察边值问题

$$\begin{cases} Lu+cu=\tilde{f}(x,u), & x\in\Omega, \\ Bu=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases}\tag{5.23}$$

设 u 是问题 (5.23) 的解, 并令 $w=u-\underline{u}$,

$$\Omega_1=\{x: x\in\Omega,\ w(x)<0\}.$$

则

$$\begin{cases} Lw+cw>0, & x\in\Omega_1, \\ Bw\geqslant 0, & x\in\partial\Omega_1\cap\partial\Omega, \\ w=0, & x\in\partial\Omega_1\cap\bar{\Omega}. \end{cases}$$

由极值原理知, $w\geqslant 0\ (x\in\Omega_1)$, 即 $\Omega_1=\varnothing$, 从而 $u(x)\geqslant\underline{u}(x)$. 同理可证 $u(x)\leqslant\bar{u}(x)$. 因此问题 (5.23) 的解必是问题 (5.21) 的解.

在空间 $C(\bar{\Omega})$ 中, 问题 (5.23) 等价于算子方程

$$u=A\widetilde{F}(u),$$

其中 $\widetilde{F}(u)=\tilde{f}(x,u)$. 显然, $A\widetilde{F}$ 在 $u=u_i$ 处的导算子是 $AF'(u_i)$, 它不以 1 为特征值. 下面证明:

$A\widetilde{F}$ 是渐近线性的, 并且 $-A$ 不以 1 为特征值.

事实上, 由于 $\tilde{f}(x,\xi)+\xi$ 对 $\xi\in(-\infty,\infty)$ 是一致有界的, 所以

$$\lim_{\|u\|\to\infty}\frac{\|A\widetilde{F}(u)+Au\|}{\|u\|}\leqslant\lim_{\|u\|\to\infty}\frac{\|A\|\cdot\|\widetilde{F}(u)+u\|}{\|u\|}=0.$$

由此知 $A\widetilde{F}$ 是渐近线性, 且 $DA\widetilde{F}(\infty)=-A$.

由极值原理知, $-A$ 不以 1 为特征值.

利用定理 6.5.2 推得问题 (5.23), 从而问题 (5.21) 还有一个异于 u_1, u_2 的解. 证毕.

对这个问题更进一步的讨论可查阅 [Am2].

6.6 度理论的应用 —— 分叉问题

设 E 是 Banach 空间, 在 E 中讨论如下算子方程

$$\Phi(\lambda)u := u - T(\lambda)u = 0 \tag{6.1}$$

的解当参数 λ 变化时的分叉问题.

假设可以引进含参数 t 的算子方程

$$\Phi(t,\lambda)u := u - T(t,\lambda)u = 0, \tag{6.2}$$

并假设算子 $T(t,\lambda)$ 满足:

(1) $T(1,\lambda) = T(\lambda)$, $\lambda = 0$ 时方程 (6.1) 有且只有零解;

(2) $T(t,\lambda) : [0,1] \times \mathbb{R} \times E \to E$ 是紧算子;

(3) $T(0,\lambda)$ 是 E 中的奇算子;

(4) $T(t,\lambda)u = \lambda Gu + R(t,\lambda)u$, 其中 G 是紧线性算子, $R(t,\lambda)$ 满足: 对 $t \in [0,1]$, 当 λ 属于 $\mathbb{R}$ 中的任意有界闭区间时, 一致地有

$$\lim_{u\to 0} \frac{\|R(t,\lambda)u\|}{\|u\|} = 0.$$

由条件 (4) 知, $T(t,\lambda)$ 在 $u = 0$ 的导算子

$$DT(t,\lambda)|_{u=0} = \lambda G$$

在 E 中是紧的.

方程 (6.2) 的非零解集合记为 $N(t,\lambda)$, 又简记 $N(1,\lambda)$ 为 $N(\lambda)$.

6.6.1 局部分叉的一般结论

若对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$ 总是方程 (6.1) 的解, 称之为零解曲线.

定义 6.6.1 设 $\lambda^* \in \mathbb{R}$. 如果对于任意 $\varepsilon, \delta > 0$, 存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 满足 $|\lambda - \lambda^*| < \varepsilon$ 和 $u \in E$ 满足 $0 < \|u\| < \delta$, 使得 (λ, u) 满足方程 (6.1), 则称 $(\lambda^*, 0)$ 是方程 (6.1) (关于零解曲线) 的分叉点, 也称 λ^* 为方程 (6.1) 的分叉值.

方程 (6.1) 的分叉情况与 G 的特征值密切相关. 记

$$r(G) = \{\mu : \mu^{-1} \text{ 是 } G \text{ 的特征值}\},$$

那么它至多是可数的, 没有有限极限点.

先讨论分叉值的必要条件.

引理 6.6.2 设 $[a,b] \cap r(G) = \varnothing$, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $t \in [0,1]$, $\lambda \in [a,b]$ 时, $N(t,\lambda) \cap \bar{U}_\delta = \varnothing$.

证明 与定理 6.3.9 中孤立奇点的证明相同.

推论 6.6.3 若 λ^* 是方程 (6.1) 的分叉值, 则

$$\lambda^* \in r(G).$$

现讨论分叉值的充分条件.

定理 6.6.4 若 $1/\lambda^*$ 是 G 的奇重特征值, 则 λ^* 是方程 (6.1) 的分叉值.

证明 因 $\lambda^* \in r(G)$, 所以对充分小的正数 ε, 当 $\lambda \in [\lambda^* - \varepsilon, \lambda^* + \varepsilon]$ 且 $\lambda \neq \lambda^*$ 时, $\lambda \notin r(G)$. 还可以认为 $\lambda^* - \varepsilon$ 与 $\lambda^* + \varepsilon$ 同号. 由引理 6.6.2, 存在 $\bar{U}_\delta(0)$, 使得 $\Phi(\lambda^* - \varepsilon)$ 和 $\Phi(\lambda^* + \varepsilon)$ 在 $\bar{U}_\delta(0)$ 上只有奇点 $u = 0$. 设 Ω 是 $U_\delta(0)$ 内包含 0 的任一开集, 显然当 $u \in \partial\Omega$ 时, $\Phi(\lambda^* - \varepsilon)u \neq 0$, $\Phi(\lambda^* + \varepsilon)u \neq 0$. 由于 $1/\lambda^*$ 是 G 的奇重特征值, 所以 $i(0, \Phi(\lambda^* - \varepsilon))$ 与 $i(0, \Phi(\lambda^* + \varepsilon))$ 反号, 故

$$d(\Phi(\lambda^* - \varepsilon), \Omega, 0) \neq d(\Phi(\lambda^* + \varepsilon), \Omega, 0). \tag{6.3}$$

利用反证法和度的同伦不变性容易推出, 存在 $\lambda \in (\lambda^* - \varepsilon, \lambda^* + \varepsilon)$, 使得 $\Phi(\lambda)$ 在 $\partial\Omega$ 上有零点. 因此 λ^* 必是分叉值. 证毕.

6.6.2 一个常微分方程的分叉问题

作为方程 (6.2) 的第一个例子, 讨论非线性特征值问题

$$\begin{cases} -(p(x)u')' + q(x)u = \lambda f(u), \quad 0 < x < \pi, \\ B_0 u = -\alpha_0 u'(0) + \beta_0 u(0) = 0, \\ B_1 u = \alpha_1 u'(\pi) + \beta_1 u(\pi) = 0. \end{cases} \tag{6.4}$$

下面将讨论它的局部分叉与全局分叉问题.

假设

$$(\mathrm{H}_1): \begin{cases} f \in C^1(\mathbb{R}), \quad p \in C^1([0,\pi]), \quad q(x) \in C([0,\pi]), \\ f(0) = 0, \quad \lambda \geqslant 0, \quad \text{在 } [0,\pi] \text{ 上 } p(x) > 0, \\ \alpha_i \geqslant 0, \quad \beta_i \geqslant 0, \quad \alpha_i + \beta_i > 0, \quad i = 0, 1. \end{cases}$$

把问题 (6.4) 改写成

$$\begin{cases} -(p(x)u')' + q(x)u = \lambda[f'(0) - g(u)]u, & x \in (0, \pi), \\ B_0 u = 0, \quad B_1 u = 0, \end{cases} \tag{6.5}$$

其中

$$g(u) = \int_0^1 [f'(0) - f'(\tau u)]\mathrm{d}\tau.$$

又假定

(H_2): $f'(0) > 0$, 存在 $\rho > 0$, 使得当 $0 < |u| < \rho$ 时, $f'(0) > f'(u)$.

利用条件 $(\mathrm{H}_1), (\mathrm{H}_2)$ 可得

$$g(u) \in C(\mathbb{R}), \quad g(0) = 0, \quad \text{当 } 0 < |u| < \rho \text{ 时 } g(u) > 0.$$

问题 (6.4) 在 $u = 0$ 处的线性化问题是

$$\begin{cases} -(p(x)u')' + q(x) = \lambda f'(0)u, & x \in (0, \pi), \\ B_0 u = 0, \quad B_1(u) = 0. \end{cases} \tag{6.6}$$

它有一串简单特征值

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lambda_n \to \infty,$$

并且与 λ_n 对应的特征函数 $u_n(x) \in S_n$, 其中

$$\begin{aligned} S_n &= S_n^+ \cup S_n^-, \\ S_n^+ &= \{u : u \in C^1[0,\pi],\ B_i u = 0\ (i = 0, 1),\ u \text{ 在 } (0,\pi) \text{ 内恰有 } n-1 \text{ 个零点}, \\ &\qquad u \text{ 在 } [0,\pi] \text{ 上的一切零点都是简单的}, \lim_{x\to 0} \operatorname{sign} u(x) = 1\}, \\ S_n^- &= \{u : -u \in S_n^+\}. \end{aligned}$$

显然, S_n 是开集, $S_i \cap S_j = \varnothing$ $(i \neq j)$. 其证明可参见 [LQ, p.248, 引理 6.4.1].

记 $\lambda = 0$ 时问题 (6.6) 的 Green 函数为 $G_0(x, \xi)$, 那么问题 (6.5) 可化为等价的积分方程

$$u(x) = \lambda \int_0^\pi G_0(x, \xi)[f'(0) - g(u(\xi))]u(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

或者写成

$$u = \lambda G_0[f'(0) - g(u)]u,$$

而特征值问题 (6.6) 可以写成

$$u = \lambda G_0 f'(0) u,$$

其中 G_0 是由 Green 函数定义的积分算子:

$$G_0u=\int_0^\pi G_0(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

下面假设 $\lambda_1>0$. 取 $E=\{u: u\in C^1[0,\pi],\ B_0u=0,\ B_1u=0\}$. 引进辅助问题

$$\Phi(t,\lambda)u:=u-T(t,\lambda)u=0, \tag{6.7}$$

其中

$$T(t,\lambda)u=\lambda G_0[f'(0)-g(t,u)]u,$$
$$g(t,u)=tg(u)+(1-t)g(|u|).$$

显然, $g(1,u)=g(u)$, $T(0,\lambda)$ 是奇算子. 当 $t\in[0,1]$ 时, $g(t,u)$ 与 $g(u)$ 有相同的性质.

现在通过问题 (6.7) 讨论分叉问题 (6.5). 与问题 (6.7) 等价的问题是

$$\begin{cases} -(p(x)u')'+q(x)u=\lambda[f'(0)-g(t,u)]u, & x\in(0,\pi),\\ B_0u=0,\quad B_1u=0. \end{cases} \tag{6.8}$$

分以下几步来讨论:

1. 导算子与零奇点指数

读者可自己证明:

引理 6.6.5 $T(t,\lambda):[0,1]\times\mathbb{R}_+\times E\to E$ 是紧算子, 且

$$T(t,\lambda)u=\lambda G_0f'(0)u+o(\|u\|)\quad(u\to 0)$$

对 $t\in[0,1]$, $\lambda\in[a,b]$ 一致成立, 其中 $[a,b]$ 是 $\mathbb{R}_+$ 中的任意有界区间.

定理 6.6.6 取 $\delta>0$ 使得 $\lambda_{k-1}<\lambda_k-\delta<\lambda_k+\delta<\lambda_{k+1}$, 其中记 $\lambda_0=0$, 则当 $t\in[0,1]$ 时,

$$i(0,\Phi(t,\lambda))=\begin{cases}(-1)^{k-1}, & \lambda\in[\lambda_k-\delta,\lambda_k),\\ (-1)^k, & \lambda\in(\lambda_k,\lambda_k+\delta].\end{cases}$$

证明 算子 $\Phi(t,\lambda)=I-T(t,\lambda)$ 以 $u=0$ 为奇点, $T(t,\lambda)$ 在 $u=0$ 的导算子为 $\lambda G_0f'(0)$, 且不以 1 为特征值, 从而 $u=0$ 是孤立奇点.

当 $\lambda\in[\lambda_k-\delta,\lambda_k)$ 时, $\lambda G_0f'(0)$ 的大于 1 的特征值仅为

$$\frac{\lambda}{\lambda_1},\ \frac{\lambda}{\lambda_2},\ \cdots,\ \frac{\lambda}{\lambda_{k-1}},$$

其重数和为 $k-1$. 故

$$i(0, \Phi(t,\lambda)) = (-1)^{k-1}.$$

同理可证另一等式.

2. 非零解集合的若干性质

引理 6.6.7 问题 (6.8) 的非零解集合 $N(t,\lambda) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.

证明 设 $u \in N(t,\lambda)$, 则 u 是线性特征值问题

$$\begin{cases} -(p(x)v')' + [q(x) + \tilde{q}(x)]v = \mu f'(0)v, & x \in (0,\pi), \\ B_0 v = 0, \quad B_1 v = 0 \end{cases}$$

的特征函数, 相应的特征值为 λ, 其中 $\tilde{q}(x) = \lambda g(t, u(x))$. 因此, $u \in \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$. 证毕.

引理 6.6.8 设 $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$, 仅包含某个 λ_k. 存在 $d_k > 0$, 使得

$$N(t,\lambda) \cap \overline{U}_{d_k} \subset S_k, \quad \forall\, t \in [0,1], \quad \lambda \in [a,b].$$

证明 先证存在常数 $\alpha > 0$, 使得对任意 $\lambda \in [a,b]$, $u \in S_j$ $(j \neq k)$, 都有

$$\|u - \lambda G_0 f'(0) u\| \geqslant \alpha \|u\|.$$

若不然, 则存在 $\lambda^{(n)} \in [a,b]$, $u_n \in S_{j_n}$ $(j_n \neq k)$, 使得

$$\left\| \frac{u_n}{\|u_n\|} - \lambda^{(n)} G_0 f'(0) \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

因为 G_0 是紧的, 不妨设 $\lambda^{(n)} \to \lambda^* \in [a,b]$, $\lambda^{(n)} G_0 f'(0) \frac{u_n}{\|u_n\|} \to v$. 于是

$$\frac{u_n}{\|u_n\|} \to v, \quad \|v\| = 1, \quad v - \lambda^* G_0 f'(0) v = 0.$$

因此, $1/\lambda^*$ 是 $G_0 f'(0)$ 的特征值, 从而 λ^* 是问题 (6.6) 的特征值. 由于 $\lambda^* \in [a,b]$, 所以只能有 $\lambda^* = \lambda_k$, $v \in S_k$. 注意到 $\frac{u_n}{\|u_n\|} \in S_{j_n}$ $(j_n \neq k)$, 这与结合 S_i 的性质相矛盾.

由于 $T(t,\lambda)u = \lambda G_0 f'(0) u + o(\|u\|)$ $(u \to 0)$ 对 $t \in [0,1]$ 和 $\lambda \in [a,b]$ 一致成立, 故存在 $d_k > 0$, 使得当 $t \in [0,1], \lambda \in [a,b]$, $u \in \bigcup_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^{\infty} S_j$, $u \in \overline{U}_{d_k}$ 时, 有

$$\|u - T(t,\lambda)u\| \geqslant \frac{\alpha}{2} \|u\|.$$

又因为 $N(t,\lambda)\cap\overline{U}_{d_k}\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}S_j$, 所以 $N(t,\lambda)\cap\overline{U}_{d_k}\subset S_k$. 证毕.

引理 6.6.9 设 $[a,b]\subset\mathbb{R}_+$, 它不包含某个 λ_k, 则存在 $l_k>0$, 使得

$$N(t,\lambda)\cap\overline{U}_{l_k}\cap S_k=\varnothing,\quad \forall\, t\in[0,1],\quad \lambda\in[a,b].$$

证明 只需证明存在 $\alpha>0$, 使得对任意 $\lambda\in[a,b]$ 和 $u\in S_k$, 有

$$\|u-\lambda G_0f'(0)u\|\geqslant\alpha\|u\|.$$

若不然, 同于引理 6.6.8 可证: 存在 $w_n\in S_k$, $w_n\to v$, $\|v\|=1$ 和 $\lambda^*\in[a,b]$, 使得 $v-\lambda^*G_0f'(0)v=0$. 于是只能有 $\lambda^*=\lambda_j$, $v\in S_j$, $j\neq k$. 这与 $S_k\cap S_j=\varnothing$ 及 S_j 是开集相矛盾. 证毕.

引理 6.6.10 当 $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_k$ 时,

$$N(t,\lambda)\cap S_k\cap\overline{U}_\rho=\varnothing,$$

其中 ρ 是条件 (H_2) 中的正常数.

证明 若 $u\in N(t,\lambda)\cap S_k\cap\overline{U}_\rho$, 则线性特征值问题

$$\begin{cases}-(p(x)v')'+\tilde{q}(x)v=\mu f'(0)v, & x\in(0,\pi),\\ B_0v=0,\quad B_1v=0, & x=0,\pi\end{cases}$$

的第 k 个特征值 $\mu_k=\lambda$, 其中 $\tilde{q}(x)=q(x)+\lambda g(t,u(x))$. 显然, $\lambda\neq0$. 于是, 由条件 (H_2) 知, $\tilde{q}(x)\geqslant q(x)$, $\tilde{q}(x)\not\equiv q(x)$. 因此 $\mu_k>\lambda_k$ (特征值的比较原理), 这与假设条件矛盾. 证毕.

综合上述引理容易得到

定理 6.6.11 存在 $\delta_k>0$ 及 $\varepsilon_k>0$, 使得

$$\lambda_{k-1}<\lambda_k-\delta_k<\lambda_k+\delta_k<\lambda_{k+1}\quad (\text{其中 } \lambda_0=0),$$

且对任意 $t\in[0,1]$, 有

(1) 当 $\lambda\in[\lambda_k-\delta_k,\lambda_k]$ 时, $N(t,\lambda)\cap\overline{U}_{\varepsilon_k}=\varnothing$;

(2) 当 $\lambda\in[\lambda_k,\lambda_k+\delta_k]$ 时, $N(t,\lambda)\cap\overline{U}_{\varepsilon_k}\subset S_k$;

(3) 当 $\lambda\in[\lambda_k-\delta_k,\lambda_k+\delta_k]$ 时, $N(t,\lambda)\cap\partial\overline{U}_{\varepsilon_k}=\varnothing$.

证明 取 $\tilde{\delta}>0$, 使得

$$\lambda_{k-1}<\lambda_k-\tilde{\delta}<\lambda_k+\tilde{\delta}<\lambda_{k+1}.$$

由引理 6.6.8 与引理 6.6.10 知, 存在 $\varepsilon_k>0$, 使得当 $\lambda\in[\lambda_k-\tilde{\delta},\lambda_k]$ 时, $N(t,\lambda)\cap\overline{U}_{\varepsilon_k}=\varnothing$; 当 $\lambda\in[\lambda_k,\lambda_k+\tilde{\delta}]$ 时, $N(t,\lambda)\cap\overline{U}_{\varepsilon_k}\subset S_k$. 故结论 (1) 和 (2) 成立.

再证结论 (3). 因为 $N(t,\lambda_k)\cap\overline{U}_{\varepsilon_k}=\varnothing$, 所以存在 $0<\delta_k\leqslant\tilde{\delta}$, 当 $|\lambda-\lambda_k|\leqslant\delta_k$ 时, $N(t,\lambda)\cap\partial U_{\varepsilon_k}=\varnothing$. 若不然, 则存在 $t_n\in[0,1]$ 及 $\lambda^{(n)}\to\lambda_k$, $u_n\in\partial U_{\varepsilon_k}$, 使得

$$u_n-T(t_n,\lambda^{(n)})u_n=0.$$

由紧性, 不妨设 $t_n\to t^*$, $T(t_n,\lambda^{(n)})u_n\to v$. 于是 $u_n\to v$, $v\in\partial U_{\varepsilon_k}$ 且

$$v-T(t^*,\lambda_k)v=0.$$

此与结论 (1) 矛盾 ($\lambda=\lambda_k$ 时). 证毕.

3. 局部分叉

现在可以得到关于局部分叉的结论.

定理 6.6.12　设条件 $(\mathrm{H}_1),(\mathrm{H}_2)$ 成立. 若 $\lambda\in(\lambda_k,\lambda_k+\delta_k)$, 则存在 $\mu_k:0<\mu_k<\varepsilon_k$, 当 $t\in[0,1]$ 时,

$$d(\varPhi(t,\lambda),D_k^{\pm},0)=(-1)^{k-1},$$

其中 δ_k, ε_k 由定理 6.6.11 给出,

$$D_k^{\pm}=(U_{\varepsilon_k}\setminus\overline{U}_{\mu_k})\cap S_k^{\pm}.$$

于是问题 (6.4) 在 D_k^+ 与 D_k^- 中分别存在特征向量.

证明　因为 $\lambda\in(\lambda_k,\lambda_k+\delta_k)$, 所以存在 $\eta>0$, 使得 $\lambda_k+\eta\leqslant\lambda\leqslant\lambda_k+\delta_k$. 由引理 6.6.2, 存在 $d_k>0$, 当 $t\in[0,1]$, $s\in[\lambda_k+\eta,\lambda_k+\delta_k]$ 时,

$$N(t,s)\cap\overline{U}_{d_k}=\varnothing.$$

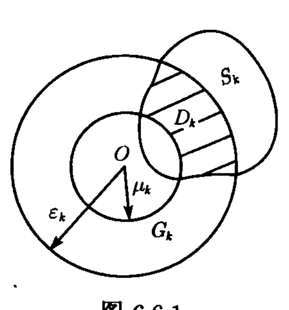


图 6.6.1

令 $\mu_k=\dfrac{1}{2}\min\{\varepsilon_k,d_k\}$, 则 $N(t,s)\cap\overline{U}_{\mu k}=\varnothing$. 将 U_{ε_k} 分解为

$$U_{\varepsilon_k}=D_k\cup G_k\cup\overline{U}_{\mu_k},$$

其中

$$D_k=(U_{\varepsilon_k}\setminus\overline{U}_{\mu_k})\cap S_k,\quad G_k=(U_{\varepsilon_k}\setminus\overline{U}_{\mu_k})\setminus S_k,$$

见图 6.6.1. 于是

$$d(\varPhi(t,\lambda),U_{\varepsilon_k},0)=d(\varPhi(t,\lambda),D_k,0)+d(\varPhi(t,\lambda),G_k,0)+d(\varPhi(t,\lambda),U_{\mu_k},0).\quad(6.9)$$

利用定理 6.6.11 和同伦不变性, 以及定理 6.6.6 得

$$d(\Phi(t,\lambda),U_{\varepsilon_k},0)=d(\Phi(t,\lambda_k-\delta_k),U_{\varepsilon_k},0)=i(0,\Phi(t,\lambda_k-\delta_k))=(-1)^{k-1},$$
$$d(\Phi(t,\lambda),U_{\mu_k},0)=d(\Phi(t,\lambda_k+\delta_k),U_{\mu_k},0)=i(0,\Phi(t,\lambda_k+\delta_k))=(-1)^{k},$$
$$d(\Phi(t,\lambda),G_k,0)=0.$$

将它们代入 (6.9) 式得

$$d(\Phi(t,\lambda),D_k,0)=2(-1)^{k-1}.$$

又因为

$$d(\Phi(t,\lambda),D_k,0)=d(\Phi(t,\lambda),D_k^+,0)+d(\Phi(t,\lambda),D_k^-,0),$$

并且 D_k^+ 和 D_k^- 与 t 无关, 关于原点对称, $\Phi(0,\lambda)$ 是奇算子, 所以

$$d(\Phi(0,\lambda),D_k^+,0)=d(\Phi(0,\lambda),D_k^-,0)=(-1)^{k-1}.$$

最后再由同伦不变性得

$$d(\Phi(t,\lambda),D_k^{\pm},0)=(-1)^{k-1}.$$

证毕.

4. **全局分叉**

为讨论全局分叉, 需要对解作先验估计.

(H_3): 存在正数 $M=M(\lambda)$, 使得当 $u\in N(s)$, $s\in[0,\lambda]$ 时, 有

$$\|u\|<M.$$

现在, 我们试图在某区域 $(U_M\setminus U_{\tau_k})\cap S_k^{\pm}$ 上应用度理论, 其中 $\tau_k=\tau_k(\lambda)$, U_{τ_k} 是某个球域.

除 $D_k^{\pm}$ 外, 又记

$$A_{M,k}^{\pm}=(U_M\setminus\overline{U}_{\varepsilon_k})\cap S_k^{\pm},\quad G_{M,k}^{\pm}=(U_M\setminus\overline{U}_{\tau_k})\cap S_k^{\pm}.$$

则当 $\tau_k=\mu_k$ 时,

$$G_{M,k}^{\pm}=A_{M,k}^{\pm}\cup D_k^{\pm}. \tag{6.10}$$

定理 6.6.13 假设条件 (H_1), (H_2) 和 (H_3) 成立, 则当 $\lambda>\lambda_k$ 时, 存在 $\tau_k=\tau_k(\lambda)$, $0<\tau_k(\lambda)<M$, 使得

$$d(\Phi(\lambda),G_{M,k}^{\pm},0)=(-1)^{k-1},$$

这里的 $\Phi(\lambda)=\Phi(1,\lambda)$. 于是问题 (6.4) 在 $G^+_{M,k}$ 与 $G^-_{M,k}$ 中存在特征函数.

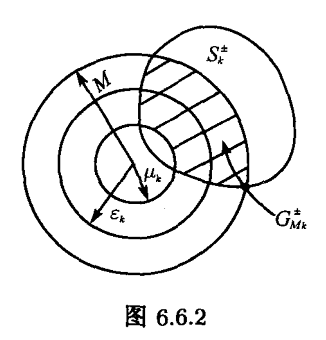


图 6.6.2

证明　当 $\lambda\in(\lambda_k,\lambda_k+\delta_k]$ 时, 取 $\tau_k=\tau_k(\lambda)=\mu_k$ 得 (6.10) 式 (图 6.6.2). 于是

$$\begin{aligned}d(\Phi(\lambda),G^+_{M,k},0)&=d(\Phi(\lambda),A^\pm_{M,k},0)+d(\Phi(\lambda),D^+_k,0)\\&=d(\Phi(\lambda),A^\pm_{M,k},0)+(-1)^{k-1}.\end{aligned}$$

由 $A^\pm_{M,k}$ 的定义及 U_M, U_{ε_k}, $S_k^\pm$ 的性质知, $\Phi(s)$ 在 $\partial A^\pm_{M,k}$ 上不为零, 其中 $s\in[0,\lambda_k+\delta_k]$. 因为 $\Phi(0)$ 在 $A^\pm_{M,k}$ 上无零点, 所以

$$d(\Phi(\lambda),A^\pm_{M,k},0)=d(\Phi(0),A^\pm_{M,k},0)=0.$$

故

$$d(\Phi(\lambda),G^\pm_{M,k},0)=(-1)^{k-1}.$$

当 $\lambda>\lambda_k+\delta_k$ 时, 取

$$\tau_k=\tau_k(\lambda)=\frac{1}{2}\min\{M,\mu_k,l_k\},$$

其中 l_k 由引理 6.6.9 给出, 使得当 $s\in[\lambda_k+\delta_k,\lambda]$ 时,

$$N(s)\cap\overline{U}_{l_k}\cap S_k=\varnothing.$$

由于当 $s\in[\lambda_k+\delta_k,\lambda]$ 时, $\Phi(s)$ 在 $\partial G^\pm_{M,k}$ 上无零点, 由同伦不变性得

$$\begin{aligned}d(\Phi(\lambda),G^\pm_{M,k},0)&=d(\Phi(\lambda_k+\delta_k),G^\pm_{M,k},0)\\&=d(\Phi(\lambda_k+\delta_k),A^\pm_{M,k},0)+d(\Phi(\lambda_k+\delta_k),D^\pm_k,0)\\&\quad+d(\Phi(\lambda_k+\delta_k),(U_{\mu_k}\setminus U_{\tau_k})\cap S^\pm_k,0)\\&=0+(-1)^{k-1}+0=(-1)^{k-1}.\end{aligned}$$

证毕.

为使条件 (H_3) 成立, 假设

$$(\mathrm{H}_3'):\ \ \beta_0>0\ 或者\ \beta_1>0,\ \ \limsup_{|u|\to\infty}\frac{f(u)}{u}\leqslant 0,\ q(x)\geqslant 0,\ x\in[0,\pi].$$

设 u 满足问题 (6.4), 并令 $u=\mathrm{e}^{-\alpha(x+1)^n}v$, 则方程变为

$$-p(x)v''+r(x)v'+q(x)v=\lambda\left(\frac{f(\mathrm{e}^{-\alpha(x+1)^n}v)}{\mathrm{e}^{-\alpha(x+1)^n}v}-\frac{a(x)}{\lambda}\right)v,\quad x\in[0,\pi],\qquad(6.11)$$

其中

$$r(x)=2n\alpha(x+1)^{n-1}p-p',$$
$$a(x)=n(n-1)\alpha(x+1)^{n-2}\left(p(x)+\frac{p'(x)(x+1)}{n-1}\right)-n^2\alpha^2(x+1)^{2n-2}p(x);$$

边界条件变为

$$-\alpha_0v'(0)+\beta_0'v(0)=0,\quad \alpha_1v'(\pi)+\beta_1'v(\pi)=0,$$

其中

$$\beta_0'=n\alpha\alpha_0+\beta_0>0,\quad \beta_1'=\beta_1-n\alpha\alpha_1(1+\pi)^{n-1}.$$

先考虑 $\beta_1>0$ 的情况. 先取 n 充分大, 再取 $\alpha>0$ 充分小, 使得

$$\beta_1'>0,\quad a(x)\geqslant a_0>0,\quad x\in[0,\pi].$$

对任意给定的正数 b, 当 $0<\lambda\leqslant b$ 时 $\dfrac{a(x)}{\lambda}\geqslant\dfrac{a_0}{b}$. 由条件 (H_3') 知, 存在正数 M_0 (与 λ 无关), 使得当 $|v|>M_0$ 时,

$$\tilde{f}(x):=\frac{f(\mathrm{e}^{-\alpha(x+1)^n}v)}{\mathrm{e}^{-\alpha(x+1)^n}v}<\frac{a_0}{2b}.$$

因此

$$\tilde{f}(x)-\frac{a(x)}{\lambda}<-\frac{a_0}{2b}<0.$$

若 v 在 $(0,\pi)$ 中的某点 x_0 处达到正的最大值, 则 $v(x_0)\leqslant M_0$. 若不然, 在该点处

$$-pv''+r(x)v'+q(x)v\geqslant 0,$$

而 $\lambda\tilde{f}(x_0)v(x_0)<0$, 此与方程 (6.11) 矛盾.

同理可证: 若 v 在 $(0,\pi)$ 中的某点 x_1 处达到负的最小值, 则 $v(x_1)\geqslant -M_0$. 因此,

$$|u(x)|\leqslant M_0,\quad x\in[0,\pi]. \tag{6.12}$$

对于 $\beta_0>0$ 的情况, 令 $t=\pi-x$, 则化为前一种情形, 即 $\beta_1>0$ 的情况.

由估计式 (6.12) 及问题 (6.4) 的方程易知, 存在常数 $M_1>0$, 使得

$$|u'(x)|<M_1,\quad x\in[0,\pi].$$

这样, 利用定理 6.6.13 有

定理 6.6.14 设条件 (H_1), (H_2) 和 (H_3') 成立, $k\geqslant 1$. 则当 $\lambda>\lambda_k$ 时, 在每个 $S_1^+,\cdots,S_k^+$, $S_1^-,\cdots,S_k^-$ 内, 问题 (6.4) 至少存在一个特征函数.

6.6.3 一个偏微分方程的分叉问题

作为抽象问题 (6.2) 的第二个例子, 下面讨论偏微分方程的非线性特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda u - f(x,u,\lambda)u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.13}$$

总的假设条件是:

($\hat{\mathrm{H}}$) (1) $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开区域;

(2) $q(x) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $q(x) \geqslant 0$, $x \in \bar{\Omega}$;

(3) $f(x,0,\lambda) = 0$, $x \in \bar{\Omega}$, $\lambda \in [0,\infty)$;

(4) $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times [0,\infty))$, 对 x 是 Hölder 连续, 对 u 是局部 Lipschitz 连续;

(5) 存在 $\rho > 0$, 使得当 $x \in \bar{\Omega}$, $0 < |u| < \rho$, $\lambda \in (0,\infty)$ 时, $f(x,u,\lambda) > 0$;

(6) 当 $\lambda = 0$ 时, 问题 (6.13) 只有零解.

与问题 (6.13) 相应的辅助问题是

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda u - F(t,\lambda,u)u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.14}$$

其中

$$F(t,\lambda,u) = tf(x,u,\lambda) + (1-t)f(x,|u|,\lambda).$$

显然, 对于 $t \in [0,1]$, F 与 f 有相同的性质.

对任意 $u \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, 由

$$\begin{cases} -\Delta v + q(x)v = u, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

确定一个算子

$$v = Gu,$$

G 在 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 上是线性紧算子. 因此, 问题 (6.14) 等价于算子方程

$$\Phi(t,\lambda) := u - \lambda Gu + GF(t,\lambda,u)u = 0. \tag{6.15}$$

令

$$T(t,\lambda)u = \lambda Gu - GF(t,\lambda,u)u,$$

并用 $\|\cdot\|$ 表示 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 中的模. 显然 $T(0,\lambda)$ 是奇算子.

引理 6.6.15 算子 $T(t,\lambda)$ 在 $u=0$ 处的导算子是

$$DT(t,\lambda)|_{u=0}=\lambda G,$$

并且对 $[0,\infty)$ 中的任意有界闭区间 $[a,b]$,

$$\|T(t,\lambda)u-\lambda Gu\|=o(\|u\|)\quad(u\to 0)$$

关于 $t\in[0,1]$ 和 $\lambda\in[a,b]$ 一致.

证明 令 $w=T(t,\lambda)u-\lambda Gu=-GF(t,\lambda,u)u$, 则有

$$\begin{cases}-\Delta w+q(x)w=-F(t,\lambda,u)u, & x\in\Omega,\\ w=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

以 $\|\cdot\|$ 表示 $L_p(\Omega)$ 中的模, $\|\cdot\|_{2,p}$ 表示 $W_p^2(\Omega)$ 中的模. 根据嵌入定理和 L_p 估计推知

$$\begin{aligned}\|w\| &\leqslant C_1\|w\|_{2,p}\leqslant C_2\|F(t,\lambda,u)u\|_p\\ &\leqslant C_2\left(\|f(\lambda,u,\lambda)\|_p+\|f(x,|u|,\lambda)\|_p\right)\|u\|.\end{aligned}$$

由此得

$$\|w\|=\|T(t,\lambda)u-T(t,\lambda)0-\lambda Gu\|=o(\|u\|)\quad(u\to 0),$$

且关于 $t\in[0,1]$ 和 $\lambda\in[a,b]$ 一致成立. 证毕.

算子 G 的特征值问题 $Gu=\dfrac{1}{\lambda}u$ 可以写成

$$\begin{cases}-\Delta u+q(x)u=\lambda u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

它存在一串特征值

$$0<\lambda_1<\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\cdots,$$

并且 λ_1 是一重的, 对应的特征函数属于 $S_1=S_1^+\cup S_1^-$, 其中

$$\begin{aligned}S_1^+&=\left\{u:\ u\in C^1(\bar\Omega),\ u|_{\partial\Omega}=0,\ u(x)|_\Omega>0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}<0\right\},\\ S_1^-&=\left\{u:\ -u\in S_1^+\right\},\end{aligned}$$

它们是 $E=\left\{u:u\in C^1(\bar\Omega),\ u|_{\partial\Omega}=0\right\}$ 中的开集. 当 $k\geqslant 2$ 时, 与 λ_k 对应的特征函数属于 $\widetilde S$:

$$\widetilde S=\left\{u:\ u\in C^1(\bar\Omega),\ u|_{\partial\Omega}=0,\ u\ \text{在}\ \Omega\ \text{内变号}\right\},$$

显然 $\bar{S}_1 \cap \widetilde{S} = \varnothing$.

引理 6.6.16　对任意 $t \in [0,1]$, $\lambda \in (0,\infty)$, 问题 (6.14) 的非零解集合 $N(t,\lambda) \subset S_1 \cup \widetilde{S}$.

证明与引理 6.6.7 相同.

当 $k=1$ 时, 前面的定理 6.6.6、引理 6.6.8—6.6.10、定理 6.6.11 和定理 6.6.12 等结论对于问题 (6.14) (即问题 (6.15)) 仍然成立, 证明是类似的.

与定理 6.6.13 类似, 可以证明

定理 6.6.17　设条件 $(\hat{\mathrm{H}})$ 成立. 又设对任意正常数 b, 存在正常数 $M(b)$, 使得当 $\lambda \in [0,b]$, (λ,u) 是问题 (6.13) 的解时, 有 $\|u\| < M(b)$. 则当 $\lambda > \lambda_1$ 时, 问题 (6.13) 至少存在一个正解和一个负解.

推论 6.6.18　设 $(\hat{\mathrm{H}})$ 成立, 又设对任意正常数 b, 存在奇数 $k>1$, 正数 α 与 R, 使得当 $\lambda \in [0,b]$, $x \in \Omega$, $|u| \geqslant R$ 时,

$$\frac{f(x,u,\lambda)}{u^{k-1}} \geqslant \alpha.$$

则当 $\lambda > \lambda_1$ 时, 问题 (6.13) 至少存在一个正解和一个负解.

证明　设 $u(x)$ 是问题 (6.13) 的解, 它在 Ω 内某点 $\bar{x}$ 处取到正的最大值 M_0, 则

$$q(\bar{x})M_0 \leqslant \lambda M_0 - \frac{f(\bar{x},M_0,\lambda)}{M_0^{k-1}}M_0^k.$$

若 $M_0 > R$, 则有 $q(\bar{x})M_0 \leqslant \lambda M_0 - \alpha M_0^k$, 从而

$$M_0^{k-1} \leqslant (b+Q_0)/\alpha, \quad \text{其中 } Q_0 = \max_{\bar{\Omega}} q(x),$$

即

$$M_0 \leqslant [(b+Q_0)/\alpha]^{1/(k-1)}. \tag{6.16}$$

同理, 若 $u(x)$ 在 Ω 内某点处取到负的最小值 $-M_0$, 也可推出估计式 (6.16). 因此

$$|u(x)| \leqslant R + [(b+Q_0)/\alpha]^{1/(k-1)}, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \lambda \in [0,b].$$

再利用嵌入定理, Schauder 估计及 L_p 估计可知, 存在常数 $M>0$, 使得 $\|u\| < M$. 由定理 6.6.17 知结论成立.

6.6.4　全局分叉的一般结论

现在, 在 Banach 空间 E 中对一般的算子方程

$$\varPhi(u) := u - T(\lambda)u = 0 \tag{6.17}$$

引述关于全局分叉的结果, 其证明可见 [Ra2].

假设

(1) $T(\lambda):\mathbb{R}\times E\to E$ 是紧算子;

(2) $T(\lambda)u=\lambda Gu+R(\lambda)u$, 其中 G 是 E 上的紧线性算子, $R(\lambda)$ 满足

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\|R(\lambda)u\|}{\|u\|}=0$$

对任意有界闭区间上的 λ 一致成立.

由条件 (2) 知, $DT(\lambda)|_{u=0}=\lambda G$.

在下面的定理中, 方程 (6.17) 的非零解是这样的 (λ,u), 它满足 (6.17), 且 $u\neq 0$.

定理 6.6.19　以 $\mathscr{S}$ 记方程 (6.17) 的非零解集合的闭包. 在总的假定下, 若 $1/\lambda^*$ 是 G 的奇重特征值, 则 $\mathscr{S}$ 包含一个过点 $(\lambda^*,0)$ 的最大子连续统 C_λ, 并且

(1) C_λ 在 $\mathbb{R}\times E$ 中无界, 或者

(2) C_λ 交直线 $u=0$ 于 $(\tilde{\lambda},0)$, 而 $1/\tilde{\lambda}$ 是 G 的另一特征值.

定理 6.6.20　在总的假定下, 若 $1/\lambda^*$ 是 G 的单重特征值, 则 $\mathscr{S}$ 包含过 $(\lambda^*,0)$ 的一对最大子连续统 C_λ^1 和 C_λ^2, 它们或者在 $\mathbb{R}\times E$ 中无界, 或者交于 $(\tilde{\lambda},0)$, 而 $1/\tilde{\lambda}$ 是 G 的另一特征值.

在文献 [Ra2] 中有这两个定理的若干应用. 如果利用这两个定理, 会更简单地得到 6.6.2 节中全局分叉结果.

6.7 评　注

度理论的重要应用是讨论椭圆型方程边值问题的解或正解的存在性. 例如, 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u=f(u), & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}\tag{7.1}$$

正解的存在性, 其中 f 在 $[0,\infty)$ 上是局部 Lipschitz 连续的, $f(0)\geqslant 0$. 利用度理论的基本步骤是:

1. **引进辅助问题**

令

$$\hat{f}(u)=\begin{cases} f(u), & u\geqslant 0,\\ f(0), & u<0, \end{cases}$$

则 $f(u)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是局部 Lipschitz 连续. 利用极值原理易证: $u(x)\neq 0$ 是辅助问题

$$\begin{cases} -\Delta u=\hat{f}(u), & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}\tag{7.2}$$

的解 $\Longleftrightarrow u(x)$ 是问题 (7.1) 的正解 ($u(x)>0,\ x\in\Omega$). 因此, 讨论问题 (7.1) 的正解时, 不妨认为当 $u<0$ 时, $f(u)=f(0)$.

2. 将边值问题化为等价的含紧算子的方程

在 $C(\bar{\Omega})$ 或 $C^1(\bar{\Omega})$ 中, 由

$$\begin{cases} -\Delta v = u, & x\in\Omega, \\ v=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

确定一个紧线性算子 $v=G(u)$, 令 $T(u)=Gf(u)$, 则问题 (7.1) 等价于算子方程

$$u-T(u)=0, \tag{7.3}$$

其中 T 是紧算子.

3. 利用计算度的有关方法

通常是计算 $d(\Phi,U_R(0),0)$, 其中 $\Phi=I-T$, $U_R(0)$ 是基本空间 E ($C(\bar{\Omega})$ 或 $C^1(\bar{\Omega})$) 中以原点 0 为心、R 为半径的开球. 首先必须保证当 $u\in\partial U_R(0)$ 时 $\Phi(u)\neq 0$, 为此常要对问题 (7.3) 的解作先验估计. 计算 $d(\Phi,U_R(0),0)$ 的常用方法是, 引进同伦变换 $\Phi_t=I-T_t$, $T_t:[0,1]\times U_R(0)\to E$ 是紧算子, 并满足

(1) $\Phi_0=\Phi$;

(2) $d(\Phi_1,U_R(0),0)\neq 0$;

(3) 当 $t\in[0,1]$, $u\in\partial B_R(0)$ 时, $\Phi_t u\neq 0$.

为保证条件 (3) 成立, 也常要对 $\Phi_t u=0$ 的解作先验估计. 因此, 在度理论的应用中, 解的先验估计是十分重要的.

若问题 (7.3) 有平凡解, 只计算 $d(\Phi,U_R(0),0)$ 是不够的, 还需计算 $d(\Phi,U_r(0),0)$, 其中 $0<r<R$. 若

$$d(\Phi,U_R(0),0)\neq d(\Phi,U_r(0),0),$$

则在 $U_r^R=U_R(0)\setminus U_r(0)$ 中问题 (7.3) 至少存在一个解 (非零解). 如果

$$d(\Phi,U_R(0),0)=d(\Phi,U_r(0),0),$$

且存在 $\overline{V}\subset U_r^R$ 是 E 中的有界闭凸集, $V=\mathrm{int}\overline{V}$, $T(\overline{V})\subset V$, 则在 V 与 U_r^R 中问题 (7.3) 至少各存在一个解 (非零解). 利用严格上、下解可以构造上述有界闭凸集, 这使得我们能够用拓扑度理论与上、下解相结合来证明问题 (7.1) 的多个正解的存在性. 在文献 [Ra1, Lio, FL] 中, 有这方面的具体例子.

问题 (7.1) 正解的存在性强烈地依赖于函数 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 在零点和无穷远点的渐近性质. 记 λ_1 是特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

的最小特征值, 不少文章 (如 [Lio, FL]) 对以下情况进行了讨论.

(1) 次线性问题:

$$\liminf_{s\to 0+}\frac{f(s)}{s}>\lambda_1,\quad \limsup_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s}<\lambda_1;$$

(2) 超线性问题:

$$\limsup_{s\to 0+}\frac{f(s)}{s}<\lambda_1,\quad \liminf_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s}>\lambda_1;$$

(3) 在零点是次线性, 在无穷远是超线性的:

$$\liminf_{s\to 0+}\frac{f(s)}{s}>\lambda_1,\quad \limsup_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s}>\lambda_1.$$

对于情形 (1), 可利用上、下解方法来讨论, 对于情形 (2) 和 (3), 可利用度理论与变分法并结合上、下解方法来讨论, 其中关键性问题是正解的先验估计. 关于正解先验估计的讨论可见 [FLN].

辅助问题 (7.2) 中的右端函数 $\hat{f}$ 不一定具有光滑性, 若要求光滑性则要直接考虑问题 (7.1), 这时常用锥映射的度理论来讨论. 记 K 是 Banach 空间 E 中的闭锥, 映射 $T: K\to K$ 就是锥映射. 关于锥映射的度理论可参见 [Ch], 它的应用可见 [D1-2, FLN, W1, W4].

若取基本空间 $H=H_0^1(\Omega)$, 内积

$$(u,v)=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x,$$

相应的模

$$\|u\|_H=\sqrt{(u,u)}.$$

在 H 中定义泛函

$$\Psi(\lambda,u)=\Psi_0(u)-\lambda J(u),$$

其中

$$\Psi_0(u)=\frac{1}{2}(u,u),\quad J(u)=\int_\Omega F(u(x))\mathrm{d}x,\quad F(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s.$$

在一定条件下, 例如

$$f\in C(\mathbb{R}),\quad |f(u)|\leqslant M,\quad \forall\, u\in\mathbb{R},$$

可以证明:

(1) $u(x)$ 是边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{7.4}$$

的古典解 $\Longleftrightarrow u(x)$ 是 $\Psi(\lambda,\cdot)$ 的临界点, 即

$$\Psi'(\lambda, u(x))v(x) = 0, \quad \forall\, v \in H,$$

其中 Ψ 的导算子

$$\Psi'(\lambda, u)v = (u, v) - \lambda \int_\Omega f(u(x))v(x)\mathrm{d}x.$$

(2) $\Psi(\lambda,\cdot)$ 在 H 上存在最小值, 其对应的最小值点即是 $\Psi(\lambda,\cdot)$ 的临界点, 从而也是边值问题 (7.4) 的古典解.

求边值问题 (7.4) 的解即求 $\Psi(\lambda,\cdot)$ 的临界点, 而

$$\Psi(\lambda, u) = I(u) - \lambda G(u),$$

其中

$$I(u)v = (u, v), \quad G(u)v = \int_\Omega f(u(x))v(x)\mathrm{d}x,$$

$$I(\cdot): H \to H^* = H \text{ 是恒同算子},$$
$$G(\cdot): H \to H^* = H \text{ 是紧算子}.$$

这样, 问题变成了求解方程

$$\Psi'(\lambda, u) = I(u) - \lambda G(u) = 0.$$

Banach 空间中含紧算子的度理论提供了解决此类问题的一种方法.

假设 f 满足:

(f_1) $f \in C^1[0,\infty)$, $f(0) > 0$;

(f_2) 存在 $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_m$, 使得 $f(a_k) = 0$, $k = 1, \cdots, m$;

(f_3) $\max\{F(u) : 0 \leqslant u \leqslant a_{k-1}\} < F(a_k)$, $k = 2, 3, \cdots, m$.

文献 [Hes] 证明了: 存在 $\bar{\lambda} > 0$, 使得当 $\lambda > \bar{\lambda}$ 时, 问题 (7.4) 至少有 $2m-1$ 个正解. 其证明方法是引进辅助问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f_k(u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中

$$f_k(u)\begin{cases} = 0, & u < -1, \\ \geqslant 0, & -1 \leqslant u < 0, \\ = f(u), & 0 \leqslant u \leqslant a_k, \\ \leqslant 0, & a_k < u \leqslant a_{k+1}, \\ = 0, & u > a_{k+1}. \end{cases}$$

先利用变分法证明存在 m 个正解, 再利用度理论讨论临界点方程

$$\Psi_k(\lambda, u) = I(u) - \lambda G_k(u) = 0,$$

证明存在另外 $m-1$ 个正解, 其中

$$G_k(u)v = \int_\Omega f_k(u(x))v(x)\mathrm{d}x.$$

拓扑度理论的另一个重要应用, 是研究扩散导致的平衡态模式, 它是一种特殊的 Turing 模式 ([Tu]), 其数学解释如下.

考虑带有齐次 Neumann 边界条件的反应扩散方程组

$$\begin{cases} u_t - d_1\Delta u = f(u,v), & x\in\Omega, \quad t>0, \\ v_t - d_2\Delta v = g(u,v), & x\in\Omega, \quad t>0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x\in\partial\Omega, \quad t>0. \end{cases} \tag{7.5}$$

其中 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 表示两种物质的分布密度 (浓度), d_1 和 d_2 是扩散系数, $f(u,v)$ 和 $g(u,v)$ 是描述两种物质关系的反应函数. 当两个扩散系数之比很大时, 正常数平衡解的稳定性会发生改变, 由稳定 (对相应的常微分方程组而言) 变为不稳定 (对反应扩散方程组而言), 并且反应扩散方程组有非均匀平衡态 (非常数正平衡解). 这种非均匀平衡态是一种特殊的图灵模式, 也称为扩散导致的模式 (pattern).

关于扩散导致的模式的研究, 目前已有大量文献, 有兴趣的读者可以参看综述文章 [Ni]. 这类模式的经典内容仅限于由 "简单" 扩散导致的平衡态模式, 这里的 "简单" 扩散是指通常意义下的扩散, 如问题 (7.5) 中的 $-d_1\Delta u$, $-d_2\Delta v$. 但是, 有许多具体例子表明, 交错扩散可以导致 "更多" 的 (新的) 平衡态模式. 因此, 研究由交错扩散导致的平衡态模式问题已成为热点. 这方面的工作, 关于竞争结构模型可参看文献 [Kan1, LMN, LN1-2, MNTT], 关于捕食结构模型可参看文献 [CQW1-2, Kan2, KM, PaW2, W2-3].

研究扩散或交错扩散导致的平衡态模式的关键一步是计算孤立正常数解处的不动点指数, 文献 [W4] 给出了一种计算框架.

拓扑度理论的再一个重要应用, 是研究非均匀环境问题. 例如, 非均匀环境下的 Holling-Tanner 捕食模型

$$
\begin{cases}
-\Delta u = \lambda u - a(x)u^2 - \beta uv, & x \in \Omega, \\
-\Delta v = \mu v\Big(1 - \dfrac{v}{u}\Big), & x \in \Omega, \\
\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, & x \in \partial\Omega,
\end{cases}
\tag{7.6}
$$

其中 $a(x)$ 是非负连续函数, λ, β 和 μ 都是正常数. 同时存在光滑的子区域 $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$, 使得

$$
a(x) \equiv 0, \quad x \in \bar{\Omega}_0; \quad a(x) > 0, \quad x \in \bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_0.
$$

该条件说明模型 (7.6) 是一种“退化”模型. 这种退化模型与非退化模型 (例如, 用 $a(x) + \varepsilon$ 代替 $a(x)$, 其中 $\varepsilon > 0$) 有本质差别, 细节可见文献 [DH]. 此外, 文献 [DW] 分别讨论了当参数 $\beta \to 0$, $\beta \to \infty$, $\mu \to \infty$ 时, 问题 (7.6) 正解的极限问题.

这方面的工作还可以参看文献 [DD] 以及文献 [Du1-2] (非均匀环境下的竞争模型).

习 题 六

6.1 设 $U = \big\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\big\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆, 对下面给定的 $f : U \to \mathbb{R}^2$, 按定义或度的性质求 $d(f, U, 0)$.

(1) $f(x,y) = \begin{pmatrix} y - x^2 \\ y \end{pmatrix}$, (2) $f(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x - 1 \\ y^2 \end{pmatrix}$,

(3) $f(x,y) = \begin{pmatrix} |y| - x \\ x^2 + 2x - y^2 \end{pmatrix}$.

6.2 证明小扰动原理: 设 $F, F_1 : \bar{\Omega} \to E$ 是紧算子, $\varPhi = I - F$, $\varPhi_1 = I - F_1$, $0 \notin \varPhi(\partial\Omega)$, $0 \notin \varPhi_1(\partial\Omega)$. 若对任意 $u \in \partial\Omega$, 有 $\|F_1 u - Fu\| \leqslant \|\varPhi(u)\|$, 则

$$
d(\varPhi, \Omega, 0) = d(\varPhi_1, \Omega, 0).
$$

6.3 设线性紧算子 A 不以 1 为特征值. 令

$$
\begin{aligned}
\varPhi_0 u &= (I - A)(u - u_0), \\
U_\delta(u_0) &= \{u : u \in E, \|u - u_0\| < \delta\},
\end{aligned}
$$

其中 u_0 是 E 中的一个元素. 证明

$$
d(\varPhi_0, U_\delta(u_0), 0) = i(0, I - A).
$$

提示: 利用定理 6.2.6.

6.4 设 A 是 $n\times n$ 矩阵, 其特征值全是非零实数, 对任意 $u\in\mathbb{R}^n$, 令 $Qu=Au$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开区域, $0\in\Omega$. 证明

$$d(Q,\Omega,0)=i(0,\Omega)=(-1)^{\beta},$$

其中 β 为 A 的所有负特征值的重数和.

在题 6.5—6.11 中, 总设 E^n 是 n 维 Banach 空间, $\Omega\subset E^n$ 是有界开区域, $Q_0:\bar{\Omega}\to E^n$ 是连续算子.

6.5 假设对任意 $x\in\partial\Omega$ 和 $\lambda\in[1,\infty)$, 都有 $Q_0x\neq\lambda x$, 并且 $0\notin\partial\Omega$. 证明

(1) $I-Q_0$ 与 I 是同伦的, 即存在 $Q(x,\mu):\bar{\Omega}\times[0,1]\to E^n$ 是连续算子, 使得对任意 $x\in\partial\Omega$, 当 $\mu\in[0,1]$ 时, $Q(x,\mu)\neq 0$, 并有 $Q(x,0)=(I-Q_0)x$, $Q(x,1)=x$;

(2) 若 $0\in\Omega$, 则 Q_0 在 Ω 内存在不动点.

6.6 假设对任意 $x\in\partial\Omega$ 和 $\lambda\in(-\infty,1]$ 有 $\Omega_0x\neq\lambda x$, 又 $0\notin\partial\Omega$. 证明

(1) $I-Q_0$ 与 $-I$ 同伦;

(2) 若 $0\in\Omega$, 则 Q_0 在 Ω 内存在不动点.

6.7 利用 6.5 题证明: 若点 $0\in\Omega$, 且对任意 $x\in\partial\Omega$ 有 $\|Q_0x\|\leqslant\|x\|, Q_0x\neq x$, 则

$$d(I-Q_0,\Omega,0)=1.$$

6.8 设 A 是 $n\times n$ 正定矩阵, $0\in\Omega$, 对任意 $x\in\partial\Omega$, 有 $(x-Q_0x,Ax)\geqslant 0$. 利用 6.5 题证明 Q_0 在 $\bar{\Omega}$ 中存在不动点.

6.9 设 Q_0 将 $\bar{\Omega}$ 映入 E^n 的真子空间 E_0, 又对任意 $x\in\partial\Omega,\lambda\in[0,1]$ 有 $Q_0x\neq\lambda x$. 证明

(1) $d(I-Q_0,\Omega,0)=d(-Q_0,\Omega,0)$;

(2) 任意取定 $x^*\in E^n\setminus E_0$, $x^*\neq 0$, 考虑常数算子 Q_c:

$$Q_cx=x^*,\quad \forall\, x\in\bar{\Omega}.$$

则 $-Q_0$ 与 Q_c 是同伦向量场, 即存在 $Q(x,\mu):\Omega\times[0,1]\to E^n$ 是连续算子, 使得对任意 $x\in\partial\Omega$, 当 $\mu\in[0,1]$ 时, $Q(x,\mu)\neq 0$, 并有 $Q(x,0)=-Q_0x$, $Q(x,1)=Q_cx$;

(3) $d(I-Q_0,\Omega,0)=0$.

6.10 设 Q_0 将 $\bar{\Omega}$ 映入 E^n 的真子空间 E_0, 又对任意 $x\in\partial\Omega$, 有 $Q_0x\neq x$, $\|Q_0x\|\geqslant\|x\|$, $0\notin\partial\Omega$. 利用 6.9 题证明

$$d(I-Q_0,\Omega,0)=0.$$

6.11　设 $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ 是有界开区域, $0 \in \Omega_1$, $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. 又设 Q_0 将 $\bar{\Omega}_2 \backslash \Omega_1$ 映入 E^n 的真子空间 E_0, 并且在 $\partial\Omega_1$ 上满足 $\|Q_0 x\| \leqslant \|x\|$, 在 $\partial\Omega_2$ 上满足 $\|Q_0 x\| \geqslant \|x\|$. 利用 6.7 题, 6.10 题及度理论证明: 在闭区域 $\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1$ 上, Q_0 至少存在一个不动点.

6.12　设 $f \in C([0,l] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, 考察边值问题

$$\begin{cases} u'' = \lambda f(x, u, u'), & x \in (0, l), \\ u(0) = u(l) = 0, \end{cases} \tag{6-1}$$

其中参数 $\lambda \in [0,1]$. 取 Banach 空间

$$E = \left\{u : u \in C^1([0,l]),\ u(0) = 0,\ u(l) = 0\right\}.$$

对任意 $u \in E$, 定义范数 $\|u\| = \max\limits_{(0,l)} |u(x)| + \max\limits_{(0,l)} |u'(x)|$. 记

$$\begin{cases} u'' = 0, & x \in (0, l), \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

的 Green 函数为 $G(x,\xi)$, 并定义

$$G(u)(x) = \int_0^l G(x,\xi) f(\xi, u(\xi), u'(\xi)) \mathrm{d}\xi.$$

证明

(1) G 在 E 中是紧算子;

(2) 假设对任意 $\lambda \in [0,1]$, 问题 (6-1) 的解有一致的先验估计, 即存在常数 $M > 0$, 使得当 $\lambda \in [0,1]$ 时, 若 u 是问题 (6-1) 的解, 必有 $\|u\| < M$. 则对任意 $\lambda \in [0,1]$, 问题 (6-1) 必存在解;

(3) 假设当 $x \in [0,l]$, $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ 时, $f(x,u,p)$ 有界, 则对任意 $\lambda \in [0,1]$, 问题 (6-1) 存在解.

在题 6.13—6.18 中考察边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda u - a u^k, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{6-2}$$

其中 a 为正常数, $k \geqslant 3$ 为奇数, $q(x) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $q(x) > 0$ $(x \in \bar{\Omega})$, $\lambda > 0$ 为参数.

取 $E = C(\bar{\Omega})$, 由

$$\begin{cases} -\Delta v + q(x)v = u, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

在 E 中定义了一个紧算子 $v=Gu$, 问题 (6-2) 等价于

$$u=\lambda Gu-aGu^k,$$

写成

$$u=Tu,$$

其中 $Tu=\lambda Gu-aGu^k$. 令 $\Phi=I-T$. 记特征值问题

$$\begin{cases}-\Delta u+q(x)u=\lambda u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

的全体特征值为

$$\lambda_1<\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\cdots.$$

6.13 证明存在一个球

$$U_R(0)=\{u: u\in E, \|u\|<R\},$$

使得当 $t\in[0,1]$ 时, 问题

$$\begin{cases}-\Delta u+q(x)u=t[\lambda u-au^k], & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

即

$$u=T_tu\quad(T_tu=t\lambda Gu-taGu^k)$$

在 $E\setminus U_R(0)$ 中无解.

6.14 证明 $d(\Phi,U_R(0),0)=1$.

6.15 设 u^* 是问题 (6-2) 的解. 求出当 $u=u^*$ 时 T 的导算子 $DT|_{u=u^*}$.

6.16 设 $\lambda_1<\lambda\leqslant\lambda_2$, u^* 是问题 (6-2) 的非零解. 证明线性特征值问题

$$\begin{cases}-\Delta v+[q(x)+au^{*k-1}]v=\mu v, & x\in\Omega,\\ v|_{\partial\Omega}=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

的最小特征值 $\mu_0=\lambda$, 并证明 u^* 在 Ω 内恒正或恒负.

6.17 利用特征值的比较原理和度理论证明, 若 $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$, u^* 是问题 (6-2) 的非零解, 则 $i(u^*,\Phi)=1$.

6.18 设 $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$. 证明问题 (6-2) 只有三个解: 零解, 一个正解, 一个负解.

第7章　平衡解的存在性与分叉问题——相图法

当空间变量是一维时, 反应扩散方程

$$u_t = u_{xx} + f(u)$$

的平衡解方程是二阶保守系统

$$u''(x) + f(u(x)) = 0.$$

前面曾利用相图法进行过详细的讨论. 本章将利用相图法讨论含参数的分叉问题:

$$\begin{cases} u'' + \lambda f(u) = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{I}$$

和

$$\begin{cases} u'' + f(u) = 0, & |x| < L, \\ u(\pm L) = 0, \end{cases} \tag{II}$$

这里区间长度 L 是参数. 上述 λ, L 均为正数, f 至少连续.

相图法具有几何直观性, 得到的是全局分叉的确切结果: 对于给定的参数可以知道它有且仅有几个解.

7.1　一般原理

假设 $f \in C^2$, 先将

$$u'' + \lambda f(u) = 0 \tag{1.1}$$

化成等价方程组

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = -\lambda f(u). \end{cases} \tag{1.2}$$

求出第一积分

$$\frac{1}{2}v^2 + \lambda F(u) = \lambda E, \tag{1.3}$$

其中 $E \geqslant 0$ 为常数,

$$F(u) = \int_0^u f(s)\mathrm{d}s.$$

系统 (1.2) 的相图依赖于 $f(u)$ 的具体形式, 为了方便, 把 x 看成 "时间" 变量. 对于边值问题 (I) 的情形, 所求轨线必须是从 v 轴上一点 p 再回到 v 轴上 (同一点或另一点) 所需时间正好是 π, 如图 7.1.1 所示.

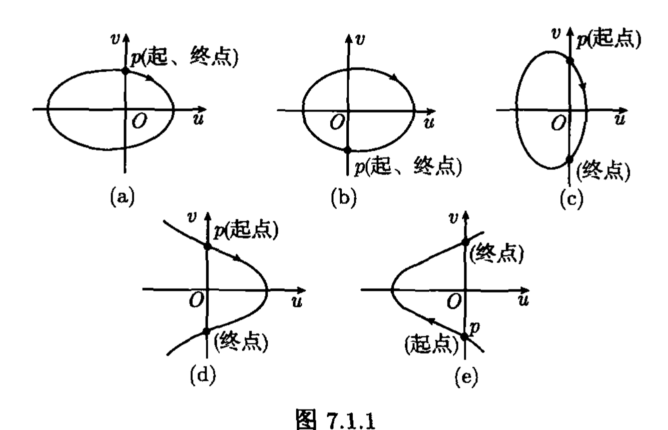


图 7.1.1

从 p 点 (除去原点) 出发的轨线 $\Gamma(p)$ 有以下两种:

(1) 从正 (负) v 轴上一点 p 沿闭轨转 k 圈回到 p 点, 这时 $u(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内恰有 $2k-1$ 个零点, 当 $u'(0)>0$ 时见图 7.1.1(a), 当 $u'(0)<0$ 时见图 7.1.1(b), $k=1,2,\cdots$.

(2) 从正 (负) v 轴上一点 p 沿闭轨转 k 圈后, 又转半圈到负 (正) v 轴上的对称点 $(k=0,1,2,\cdots)$, 见图 7.1.1(c); 或从正 (负) v 轴上一点沿非闭轨到负 (正) v 轴上的对称点 (相当于 $k=0$), 见图 7.1.1(d), (e).

设 $\Gamma(p)$ 对应的积分常数为 E, 即 (1.3) 式成立. $\Gamma(p)$ 与正、负 u 轴交点的坐标分别是 $(m_+(E),0)$ 和 $(m_-(E),0)$, 则 $m_+(E)>0, m_-(E)<0$, 并且

$$F(m_+(E))=E, \quad F(m_-(E))=E.$$

当 p 点位于 v 轴 (不是原点) 时, $E>0$. 因为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\lambda}\sqrt{E-F(u)}}=\mathrm{d}x,$$

所以轨线从正 v 轴上一点到正 u 轴上交点 $(m_+(E),0)$ 一次所需时间是

$$T_+(E)=(2\lambda)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{m_+(E)}[E-F(u)]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u, \tag{1.4}$$

从负 u 轴上交点 $(m_-(E),0)$ 到正 v 轴上一点一次所需时间是

$$T_-(E)=(2\lambda)^{-\frac{1}{2}}\int_{m_-(E)}^{0}[E-F(u)]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u. \tag{1.5}$$

只要 $(m_+(E),0)$ 和 $(m_-(E),0)$ 都不是系统 (1.2) 的奇点, 积分 (1.4) 和 (1.5) 均收敛.

根据上面的讨论并利用对称性得到:

由方程 (1.1) 确定的 $u(x)$, 若满足 $u(0)=0, u'(0)=\sqrt{2\lambda E}$ (或 $-\sqrt{2\lambda E}$)$(E>0)$, 则 $u(\pi)=0$ 的充要条件是 E 满足下列条件之一:

$$kT_+(E)+kT_-(E)=\pi/2, \tag{1.6k}$$

$$kT_+(E)+(k-1)T_-(E)=\pi/2, \tag{1.7k^+}$$

$$kT_-(E)+(k-1)T_+(E)=\pi/2. \tag{1.7k^-}$$

若对某个 $k\geqslant 1$, E 满足 (1.6k), 则 $u(x)$ 在 $(0,\pi)$ 恰有 $2k-1$ 个零点. 若 E 满足 (1.7$k^\pm$), 则 $u(x)$ 在 $(0,\pi)$ 恰有 $2k-2$ 个零点. 当 E 满足 (1.7k^+)((1.7k^-)) 时, $u'(0)>0$ (<0).

当 $E=0$ 时可类似讨论.

问题变成了对 f 附加什么条件, 可使方程 (1.6k) 和 (1.7$k^\pm$) 对 E 有解. 称方程 (1.6k) 和 (1.7$k^\pm$) 的左端为 “时间” 函数.

有时也把从 v 轴上 $p(0,\eta)$ 点出发的轨线与 v 轴第一次再交所需的时间 $T(\eta)$ 称为时间函数. 由 (1.3) 式知, η 与 E 满足 $\eta^2=2\lambda E$. 因此

$$2T^+(E)=T(\sqrt{2\lambda E}),\quad 2T_-(E)=T(-\sqrt{2\lambda E}).$$

若记初值问题

$$\begin{cases} u''+\lambda f(u)=0,\\ u(0)=0,\quad u'(0)=\eta \end{cases}$$

的解为 $u(x,\eta)$, 则 $T(\eta)=\inf\{x>0: u(x,\eta)=0\}$. 由轨线的对称性知 $u_x(T(\eta),\eta)=-\eta$.

为了讨论方程 (1.6k), (1.7$k^\pm$) 的可解性, 要对时间函数进行分析. 主要分析以下问题:

(1) 时间函数的定义域与光滑性;

(2) 时间函数的单调性;

(3) 时间函数在定义域边界点处的极限值 (往往时间函数的值域与它有关).

关于时间函数的定义域与光滑性有下面的结论:

定理 7.1.1　设 $f\in C^2$, 记 $T(\eta)$ 的定义域为 $\mathscr{D}$, 则 $\mathscr{D}$ 是开的, $T:\mathscr{D}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ 是 C^2 的. 此外对任意 $\eta\in\mathscr{D}\setminus\{0\}$,

$$T'(\eta)=\frac{1}{\eta}u_\eta(T(\eta),\eta).$$

证明 设 $\eta_0 \in \mathscr{D} \setminus \{0\}$ 且

$$T_0 = T(\eta_0) = \inf\{x > 0 : u(x, \eta_0) = 0\}.$$

因 $u_x(T_0, \eta_0) = -\eta \neq 0$, 由隐函数定理知, 唯一存在 η_0 的邻域上的 C^2 函数 $\tau(\eta)$ 满足

$$\tau(\eta_0) = T_0, \quad u(\tau(\eta), \eta) = 0.$$

由解的连续依赖性定理, 在 η_0 的充分小邻域内有

$$T(\eta) = \tau(\eta).$$

因此 $\mathscr{D}\setminus\{0\}$ 是开的, $T : \mathscr{D}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ 是 C^2 的. 再由 $u(T(\eta), \eta) = 0$ 及 $u_x(T(\eta), \eta) = -\eta$, 即得

$$u_x(T(\eta), \eta)T'(\eta) + u_\eta(T(\eta), \eta) = 0, \quad T'(\eta) = \frac{1}{\eta} u_\eta(T(\eta), \eta).$$

证毕.

后面将给出一些例子, 通过分析时间函数, 给出边值问题的分叉结构.

7.2 时间函数是单调的情形

本节利用一般原理讨论分叉问题 (I). 假定 $f \in C^2(\mathbb{R})$, 并满足

① $$f(0) = 0, \quad f'(0) > 0;$$

② $$\limsup_{|u| \to \infty} \frac{f(u)}{u} \leqslant 0;$$

③ $$\operatorname{sign} f''(u) = -\operatorname{sign} u. \tag{2.1}$$

由假设条件知, 存在唯一的 a_+ 和 a_-, 使得

(1) $-\infty \leqslant a_- < 0 < a_+ \leqslant \infty$, 在 (a_-, a_+) 内 $\operatorname{sign} f(u) = \operatorname{sign} u$, 当 a_- 有限时 $f(a_-) = 0$, 当 a_+ 有限时 $f(a_+) = 0$;

(2) $F(u)$ 在 $[0, a_+)$ 上严格上升, 在 $(a_-, 0]$ 上严格不降, $F(0) = 0$, 当 $0 \neq u \in (a_-, a_+)$ 时, $F(u) > 0$, $\lim\limits_{u \to a_\pm} F(u) = E_\pm, 0 < E_\pm \leqslant \infty$;

(3) F 在 $[0, a_+)$ 上有反函数 $m_+ : [0, E_+) \to [0, a_+)$, 在 $(a_-, 0]$ 上有反函数 $m_- : [0, E_-) \to (a_-, 0]$;

(4) $F'(0) = f(0) = 0, F''(0) = f'(0) > 0, F'(a_\pm) = f(a_\pm) = 0, F''(a_\pm) = f'(a_\pm) < 0$.

现不妨设 a_-, a_+ 为有限数, 于是问题 (1.2) 有奇点

$$(0,0)\quad (\text{中心});\quad (a_+,0)\ \text{和}\ (a_-,0)\quad (\text{鞍点}).$$

当 $F(a_-) \neq F(a_+)$ 时, 其相图如图 7.2.1 所示. 其他情形的相图与此有明显的不同, 但不影响对问题的讨论.

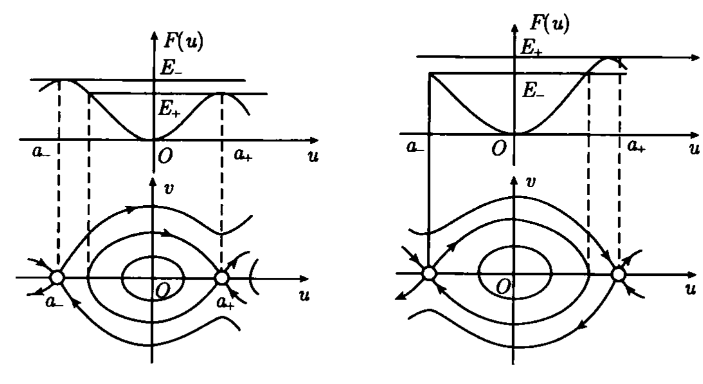


图 7.2.1

由 (1.3) 式及相图知, 只需考虑

$$0 < E < \max\{E_-, E_+\}$$

的情形. 为了讨论方程 (1.6k) 和 (1.7$k^{\pm}$) 的可解性, 先讨论 $T_{\pm}(E)$ 的性质.

令

$$F(u) = E\sin^2\theta, \quad u \in [0, a_+),$$

则

$$F'(u)\mathrm{d}u = 2E\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta.$$

于是

$$T_+(E) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-1/2}\int_0^{\pi/2}\frac{F^{1/2}(u)}{F'(u)}\mathrm{d}\theta.$$

对 $T_-(E)$ 也有类似的表达式.

引理 7.2.1　$T_{\pm}(E)$ 在 $(0, E_{\pm})$ 内可微且

$$\frac{\mathrm{d}T_{\pm(E)}}{\mathrm{d}E} > 0;\quad 0 < E < E_{\pm}.$$

因此, $T_{\pm}(E)$ 在 $(0, E_{\pm})$ 严格上升.

证明　直接计算知

$$\frac{\mathrm{d}T_+E}{\mathrm{d}E} = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-1/2}\int_0^{\pi/2}\frac{F'^2(u) - 2F(u)F''(u)}{2F^{1/2}(u)F'^2(u)}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}E}\mathrm{d}\theta$$

$$= \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-1/2}\int_0^{\pi/2}\frac{F'^2(u)-2F(u)F''(u)}{2EF'^3(u)}F^{1/2}\mathrm{d}\theta. \tag{2.2}$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}[F'^2(u)-2F(u)F''(u)] = -2F(u)f''(u) > 0, \quad 0<u<a_+,$$
$$[F'^2(u)-2F(u)F''(u)]_{u=0} = 0,$$

所以

$$F'^2(u)-2F(u)F''(u) > 0, \quad u\in(0,a_+).$$

从而由 (2.2) 式知 $\dfrac{\mathrm{d}T_+(E)}{\mathrm{d}E} > 0, \forall E\in(0,E_+)$. 同理可证另一结论. 证毕.

引理 7.2.2 $\lim\limits_{E\to 0+} T_\pm(E) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{\alpha\lambda}}$, 其中 $\alpha = f'(0)$.

证明同引理 3.3.6.

引理 7.2.3 $\lim\limits_{E\to E_\pm} T_\pm(E) = \infty$. 因此, $T_\pm(E)$ 的值域是 $\left(\dfrac{\pi}{2\sqrt{\alpha\lambda}},\infty\right)$.

证明 仅对 $T_+(E)$ 给出证明.

先设 $a_+=\infty$. 那么对任意 $u\in(0,\infty)$, 有 $f(u)>0$, $\liminf\limits_{u\to\infty}\dfrac{f(u)}{u}\geqslant 0$. 再由条件 (2.1) 中的②可得

$$\lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}=0, \quad \lim_{u\to\infty}\frac{F(u)}{u^2}=0.$$

因为 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u} = f'(0) > 0$, 所以 $p=\sup\limits_{u>0}\dfrac{f(u)}{u} > 0$. 对任意 $0<\varepsilon<p$, 存在 $u_0\in(0,\infty)$, 使得 $f(u_0)=\varepsilon u_0$. 条件 (2.1) 中的①和③表明 $f(u)/u$ 在 $(0,\infty)$ 单调下降, 于是当 $0\leqslant u\leqslant u_0$ 时,

$$f(u)\geqslant \varepsilon u, \quad F(u)\geqslant \frac{1}{2}\varepsilon u^2.$$

结合 $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{F(u)}{u^2}=0$ 知, 存在 $\bar{u}\in[u_0,\infty)$, 使得当 $0\leqslant u\leqslant\bar{u}$ 时, $F(u)\geqslant\varepsilon u^2/2$, 而 $F(\bar{u})=\varepsilon\bar{u}^2/2$. 令 $\bar{E}=F(\bar{u})$, 则由 (1.4) 式得

$$\begin{aligned}T_+(\bar{E}) &= (2\lambda)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\bar{u}}[\bar{E}-F(u)]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u\\ &\geqslant (2\lambda)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\bar{u}}\left[\frac{1}{2}\varepsilon\bar{u}^2-\frac{1}{2}\varepsilon u^2\right]^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda\varepsilon}}.\end{aligned}$$

因为 $T_+(E)$ 是严格单调上升的, 所以当 $\bar{E} < E < E_+$ 时,

$$T_+(E) > \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda\varepsilon}},$$

即 $\lim\limits_{E\to E^+} T_+(E) = \infty$.

再看 $a_+ < \infty$ 的情形. 因为 $(a_+, 0)$ 是奇点, 所以 $T_+(E_+) = \infty$. 根据解对初值的连续依赖性得 $\lim\limits_{E\to E_+} T_+(E) = \infty$. 证毕.

由 $T_\pm(E)$ 的性质可得

定理 7.2.4　记 $\lambda_n = \dfrac{n^2}{f'(0)}$, $n = 1, 2, \cdots$. 对每个 $n \geqslant 1$, 存在两个函数 $E_n^\pm$ 分别把 $[\lambda_n, \infty)$ 连续地映射到 $[0, E_\pm)$, 并具有下列性质:

(1) 对任意整数 $k \geqslant 1$ 和 $\lambda \in [\lambda_{2k-1}, \infty]$, $E_{2k-1}^\pm(\lambda)$ 是方程 $(1.7_k^\pm)$ 的唯一解;

(2) 对任意整数 $k \geqslant 1$ 和 $\lambda \in [\lambda_{2k}, \infty)$, $E_{2k}^+(\lambda) = E_{2k}^+(\lambda)$ 是方程 $(1.6k)$ 的唯一解;

(3) $E_n^\pm(\lambda_n) = 0$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

证明　例如, 令

$$T(E, \lambda) = kT_\pm(E) + (k-1)T_\mp(E),$$

则当 $0 \leqslant E < E_\pm$ 时, $T(E, \lambda)$ 的值域是 $\left[\dfrac{(2k-1)\pi}{2\sqrt{f'(0)\lambda}}, \infty\right)$, 并且 $T(E, \lambda)$ 对 E 严格单调上升. 因为当 $\lambda > \lambda_{2k-1}$ 时, $\dfrac{(2k-1)\pi}{2\sqrt{f'(0)\lambda}} < \dfrac{\pi}{2}$, 当 $\lambda = \lambda_{2k-1}$ 时, $\dfrac{(2k-1)\pi}{2\sqrt{f'(0)\lambda}} = \dfrac{\pi}{2}$, 所以存在唯一的 $E_{2k-1}^\pm(\lambda)$, 使得 $T(E_{2k-1}^\pm(\lambda), \lambda) = \pi/2$, 即满足 $(1.7k^\pm)$, 且 $E_{2k-1}^\pm(\lambda_{2k-1}) = 0$. 其余类似可证. 证毕.

由上述讨论最后得到

定理 7.2.5　设条件 (2.1) 成立, 则对任意 $n \geqslant 1$, 当 $\lambda \in [\lambda_n, \infty)$ 时, 边值问题 (I) 有解 $\varphi_n^\pm(x, \lambda)$, 且满足:

(1) $\varphi_n^\pm(x, \lambda_n) = 0$;

(2) 当 $\lambda \in (\lambda_n, \infty)$ 时, $\varphi_n^\pm(x, \lambda)$ 在 $x \in [0, \pi]$ 上恰有 $n+1$ 个零点

$$0 = x_0^\pm(\lambda) < x_1^\pm(\lambda) < \cdots < x_n^\pm(\lambda) = \pi,$$

并且

$$\begin{aligned}&\varphi_n^+(x,\lambda)>0, \quad x\in(0,x_1^+(\lambda)),\\&\varphi_n^-(x,\lambda)<0, \quad x\in(0,x_1^-(\lambda)),\\&|\varphi_n^+(x,\lambda)|<\max\{|a_-|,a_+\};\end{aligned}$$

(3) 当 $\lambda>\lambda_1, x\in(0,\pi)$ 时, $\varphi_1^+(x,\lambda)\in(0,a_+)$, $\varphi_1^-(x,\lambda)\in(a_-,0)$, 并且

$$\frac{\partial\varphi_1^+}{\partial x}(0,\lambda)>0, \quad \frac{\partial\varphi_1^-}{\partial x}(0,\lambda)<0.$$

同时, 对任意 $\lambda\in[0,\infty)$, 边值问题 (I) 无其他非零解.

7.3 时间函数是非单调的情形

现在考虑另一个边值问题

$$\begin{cases}u''+f(u)=0, \quad -L<x<L,\\ u(\pm L)=0,\end{cases}\tag{3.1}$$

其中 $f(u)=-(u-a)(u-b)(u-c)$, $a<b<c$. 这里的 L 是分叉参数, 它出现在区间的端点. 这一点与问题 (I) 没有实质性的差别. 事实上, 若令 $y=L^{-1}x$, 则问题 (3.1) 转化成

$$\begin{cases}u_{yy}+L^2f(u)=0, \quad -1<y<1,\\ u(\pm 1)=0,\end{cases}\tag{3.2}$$

变成了分叉参数 L 出现在方程中的情形. 因此, 考虑问题 (3.1) 和问题 (3.2) 都是一样的.

方程式 $u''+f(u)=0$ 的等价方程组

$$\begin{cases}u'=v,\\ v'=-f(u)\end{cases}\tag{3.3}$$

的第一积分是

$$\frac{1}{2}v^2+F(u)=E, \qquad F(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s,$$

奇点是

$$(a,0)\text{—— 鞍点}, \quad (b,0)\text{—— 中心}, \quad (c,0)\text{—— 鞍点}.$$

边值问题 (3.1) 的分叉结构与奇点的位置有关, 下面考察几种情形.

1. $a=0$ 的情形

此时 $f(u)=-u(u-b)(u-c),\ 0<b<c$, 且 $\int_0^u f(u)\mathrm{d}u>0$.

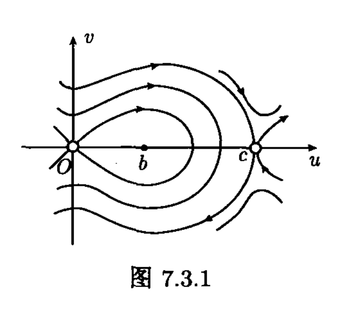


图 7.3.1

系统 (3.3) 的相图如图 7.3.1 所示.

从相图可以看出:

(1) 若问题 (3.1) 有非零解, 只可能是正解.

(2) 设从 v 轴上 A 点出发的轨线当 $t\to\infty$ 时趋于 u 轴上的 c 点, 此轨线对应的积分常数 $E=A^2/2$. 过鞍点 (0,0) 的轨线对应的积分常数 $E=0$. 这里只需考察积分常数 E $(0<E<A^2/2)$ 所对应的轨线.

从 v 轴上原点与 A 点之间的任意 p 点 (对应的积分常数为 E) 出发的轨线交 u 轴于 $m(E)$, 于是得时间函数

$$T(E)=\int_0^{m(E)}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2}\sqrt{F(m(E))-F(u)}}. \tag{3.4}$$

显然, 当 $E\searrow 0$ 或 $E\nearrow A^2/2$ 时, $T(E)\to\infty$. 这表明: 当 $0<E<A^2/2$ 时, $T(E)$ 不是单调的, 它一定有最小值, 记为 L_0. 那么当 $L<L_0$ 时, 问题 (3.1) 无非零解, 当 $L>L_0$ 时, 问题 (3.1) 至少有两个非零解 (正解).

为了确定解的个数, 需要进一步研究 $T(E)$ 的变化. 可以证明: $T(E)$ 恰有一个临界点 E_0, 即 $T'(E_0)=0$, 它是最小值点, 即 $T(E_0)=L_0$. $T=T(E)$ 的图形如图 7.3.2 所示, 而不是图 7.3.3.

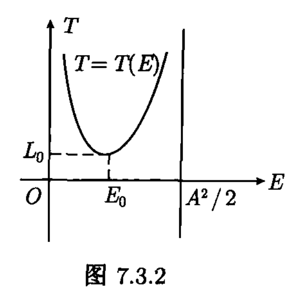


图 7.3.2

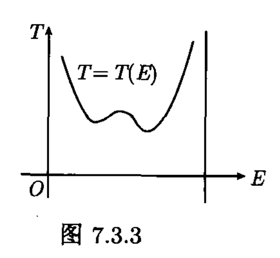


图 7.3.3

由图 7.3.2 可以看出, 当 $0<L<L_0$ 时, $u\equiv 0$ 是问题 (3.1) 的唯一解, 当 $L=L_0$ 时, 问题 (3.1) 有唯一非零解 (正解), 当 $L>L_0$ 时, 问题 (3.1) 恰有两个非零解 (正解). 同时, 对任意 $L>0, u\equiv 0$ 均是问题 (3.1) 的解.

现在证明:

定理 7.3.1 设 $a=0$, 则当 $0<E<A^2/2$ 时, $T(E)$ 恰有一个临界点即最小值点.

证明 只需证明 $T(E)$ 至多有一个临界点. 因为

$$F(m(E)) = E, \quad b < m(E) < c, \quad F'(m(E))m'(E) = 1,$$

所以 $m'(E) > 0$. 令 $\alpha = m(E)$,

$$S(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{F(\alpha) - F(u)}},$$

则

$$T(E) = \frac{1}{\sqrt{2}} S(m(E)), \quad T'(E) = \frac{1}{\sqrt{2}} S'(\alpha) m'(E).$$

因此, 只需证明 $S(\alpha)$ 至多有一个临界点. 为此, 只需证明若 $S'(\alpha) = 0$, 则 $S''(\alpha) > 0$.

作变量替换 $u = \alpha \sin\phi$, 并令

$$G(\alpha) = F(\alpha) - F(\alpha \sin\phi),$$

则有

$$S(\alpha) = \int_0^{\pi/2} G^{-1/2}(\alpha) \alpha \cos\phi \mathrm{d}\phi.$$

直接计算得

$$2S'(\alpha) = \int_0^{\pi/2} G^{-3/2} [2G - \alpha G'] \cos\phi \mathrm{d}\phi, \tag{3.5}$$

$$2S''(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \left\{ G^{-5/2} \left[-\frac{3}{2} G'(2G - \alpha G') \right] + G^{-3/2}(G' - 2G'') \right\} \cos\phi \mathrm{d}\phi.$$

由 (3.5) 式推知

$$\begin{aligned} 2S'(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{[2F(\alpha) - \alpha f(\alpha)] - [2F(u) - u f(u)]}{[F(\alpha) - F(u)]^{3/2}} \mathrm{d}u \\ &:= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{\theta(\alpha) - \theta(u)}{[F(\alpha) - F(u)]^{3/2}} \mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{3.6}$$

因为

$$\begin{aligned} \theta(x) &= 2F(x) - x f(x) = \frac{x^3}{2} [x - 2(b+c)/3], \\ \theta'(x) &= 2x^2 [x - (b+c)/2], \end{aligned}$$

所以当 $0 < \alpha \leqslant (b+c)/2$ 时, $S(\alpha) < 0$, 当 $\alpha \geqslant 2(b+c)/3$ 时, $S'(\alpha) > 0$.

若存在 $(b+c)/2 < \alpha < 2(b+c)/3$, 使得 $S'(\alpha) = 0$, 则对此 α 有

$$2S''(\alpha) = 2kS'(\alpha) + 2S''(\alpha),$$

其中 k 为任意常数. 于是

$$2S''(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \left[G^{-\frac{5}{2}}\left(-\frac{3}{2}G' + kG\right)(2G - \alpha G') + G^{-\frac{3}{2}}(G' - \alpha G'')\right]\cos\phi \mathrm{d}\phi.$$

取 $k = 3/\alpha$ 得

$$\begin{aligned} 2S''(\alpha) &= \int_0^{\pi/2} \left[G^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{2\alpha}\right)(2G - \alpha G')^2 + G^{-\frac{3}{2}}(G' - \alpha G'')\right]\cos\phi \mathrm{d}\phi \\ &\geqslant \int_0^{\pi/2} G^{-\frac{3}{2}}(G' - \alpha G'')\cos\phi \mathrm{d}\phi, \end{aligned}$$

而

$$G' = f(\alpha) - f(\alpha\sin\phi)\sin\phi, \quad G'' = f'(\alpha) - f'(\alpha\sin\phi)\sin^2\phi,$$

因此

$$\begin{aligned} 2S''(\alpha) &\geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} G^{-\frac{3}{2}}[f(\alpha) - f(\alpha\sin\phi)\sin\phi - \alpha f'(\alpha) + \alpha f'(\alpha\sin^2\phi)\sin^2\phi]\cos\phi \mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{\alpha}[F(\alpha) - F(u)]^{-3/2}[\alpha\theta'(\alpha) - u\theta'(u)]\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{3.7}$$

又

$$\begin{aligned} x\theta'(x) &= xf(x) - x^2 f'(x) = 2x^3\left[x - (b+c)/2\right], \\ (x\theta'(x))' &= 8x^2\left[x - 3(b+c)/8\right], \end{aligned}$$

$y = x\theta'(x)$ 的图形如图 7.3.4 所示, 故

$$2S''(\alpha) > 0.$$

证毕.

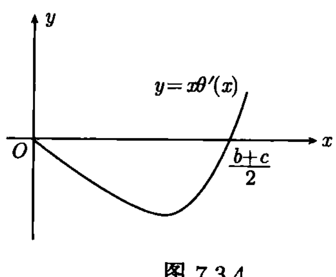


图 7.3.4

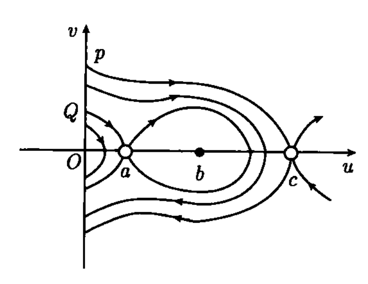


图 7.3.5

2. $a>0$ 的情形

此时 $\int_a^c f(u)\mathrm{d}u>0$, 问题 (3.3) 的相图如图 7.3.5 所示.

设 v 轴上从 P 点出发的轨线当 $t\to\infty$ 时趋于 $(c,0)$, 从 Q 点出发的轨线当 $t\to\infty$ 时趋于 $(a,0)$, 它们分别对应于积分常数 $E=P^2/2$ 和 $E=Q^2/2$, 过原点的轨线对应于积分常数 $E=0$. 只需考虑积分常数

$$0<E<Q^2/2,\quad Q^2/2<E<P^2/2$$

对应的轨线. 显然, 时间函数 (3.4) 满足

$$\lim_{E\to 0^+}T(E)=0,\quad \lim_{E\to Q^2/2}T(E)=\infty,\quad \lim_{E\to P^2/2}T(E)=\infty.$$

下面进一步分析时间函数 $T(E)$. 同上, 只需分析 $S(\alpha)$.

先设

$$Q^2/2<E<P^2/2.$$

若 $S'(\alpha)=0$, 则由 (3.6) 式和 (3.7) 式得

$$2S''(\alpha)-\frac{2}{\alpha}S'(\alpha)\geqslant\frac{1}{\alpha^2}\int_0^\alpha[F(\alpha)-F(u)]^{-3/2}[\varphi(\alpha)-\varphi(u)]\mathrm{d}u,$$

其中

$$\varphi(x)=x\theta'(x)-\theta(x)=\frac{3}{2}x^3\left(x-\frac{4}{9}\sigma\right),\quad \sigma=a+b+c.$$

于是, 当 $\alpha\geqslant 4\sigma/9, 0<u<\alpha$ 时,

$$\varphi(\alpha)-\varphi(u)>0.$$

从而

$$S''(\alpha)=S''(\alpha)-S'(\alpha)/\alpha>0.$$

因此, 当 $\alpha\geqslant 4\sigma/9$ 时, $T(E)$ 至多有一个临界点.

当 $\alpha<4\sigma/9$ 时, 直接考察 $T(E)$. 把时间函数分成两段

$$\begin{aligned}&T(E)=T_1(E)+T_2(E),\\&T_1(E)=\int_0^a\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2}\sqrt{E-F(u)}},\\&T_2(E)=\int_a^{m(E)}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2}\sqrt{F(m(E))-F(u)}}\end{aligned}$$

$$= \int_0^{m(E)-a} \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{2}\sqrt{F(m(E)) - F(w+a)}}.$$

令 $w = u - a$, 则问题 (3.1) 化成

$$\begin{cases} w'' + f(w+a) = 0, & -L < x < L, \\ w(\pm L) = -a, \end{cases}$$

从纵轴上出发的轨线的时间函数是

$$T_2^*(E) = \int_0^{m(E)-a} \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{2}\sqrt{F^*(m(E)-a) - F^*(w)}},$$

其中 $F^*(w) = \int_0^w f(s+a)\mathrm{d}s$. 易证

$$F(m(E)) - F(w+a) = F^*(m(E)-a) - F^*(w).$$

所以

$$T_2^*(E) = T_2(E).$$

由前一种情形的讨论可知, 当 $\alpha < (b+c)/2$ 时, $T_2^*(E)$ 是单调下降的.

设 $a < (b+c)/8$. 当 $\alpha < 4(a+b+c)/9$ 时, 有 $\alpha < (b+c)/2$. 于是 $T_2(E)$ 是单调下降的. 显然 $T_1(E)$ 是单调下降的, 因此 $T(E)$ 是单调下降的. 这就证明了

定理 7.3.2　设 $0 < a < (b+c)/8$ $(a < b < c)$, 则当

$$Q^2/2 < E < A^2/2$$

时, $T(E)$ 恰有一个临界点即最小值点.

现设

$$0 < E < Q^2/2.$$

当 $0 < u < a$ 时,

$$f(u) > 0, \quad F(u) > 0, \quad f''(u) > 0.$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}[F'^2(u) - 2F(u)F''(u)] = -2F(u)f''(u) < 0,$$

$$[F'^2(u) - 2F(u)F''(u)]\big|_{u=a} = -2F(a)f'(a) > 0.$$

由此推出

$$F'^2(u) - 2F(u)F''(u) > 0, \quad 0 < u < a.$$

同于引理 7.2.1 的证明, 可证

$$\frac{\mathrm{d}T(E)}{\mathrm{d}E} > 0.$$

至此得到

定理 7.3.3　设 $0 < a < b < 0$, 则当 $0 < E < Q^2/2$ 时, $T(E)$ 是严格单调上升的.

若定理 7.3.2 与定理 7.3.3 同时成立, 得到的时间函数图形如图 7.3.6 所示. 这里, 当 $0 < L < L_0$ 时, 问题 (3.1) 仅有一个正解, 当 $L = L_0$ 时, 问题 (3.1) 仅有两个正解, 当 $L > L_0$ 时, 问题 (3.1) 仅有三个正解. 除此而外, 问题 (3.1) 无其他的解.

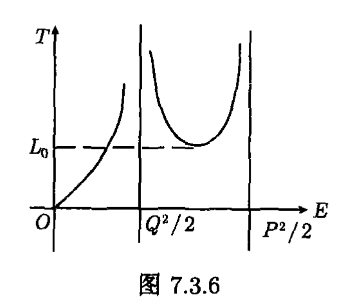


图 7.3.6

关于问题 (3.1) 更详细的讨论可查阅文献 [SW].


学习本章内容可参阅文献 [Hen, CI, SW].

7.4　评　注

当空间变量是一维时, 相图法是讨论平衡解的存在性及其分叉结构的一种较好方法, 它的基本原理是简单的.

相图法主要应用于讨论保守系统 $u'' + f(u) = 0$, 当然不只适用于 Dirichlet 边界条件, 还适用于其他边界条件.

除了 7.2 节与 7.3 节中所举的例子外, 下面讨论一个非常特殊的分叉问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u - u^k = 0, \quad 0 < x < l, \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases}$$

特征值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \quad 0 < x < l, \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

的特征值 $\lambda_n = (n+1)^2\pi^2/l^2,\ n = 0, 1, 2, \cdots$.

结论是: 设 k 为奇数, 则存在唯一的一对解 $\{u, -u\}$ 在 $(0, l)$ 内恰有 n 个零点的充要条件是 $\lambda > \lambda_n$.

设 k 为偶数, 则

(1) 存在唯一正解 (负解) 的充要条件是 $\lambda > \lambda_0 (\lambda < \lambda_0)$;

(2) 当 $\lambda > \lambda_{2n+1}$ 时, 存在唯一的一对解分别满足 $u'(0) > 0$ 和 $u'(0) < 0$, 并且它们在 $(0, l)$ 内恰有 $2n+1$ 个零点; 当 $\lambda < \lambda_{2n+1}$ 时没有这类解;

(3) 存在唯一的、在 $(0,l)$ 内恰有 $2n$ 个零点且 $u'(0)>0$ 的解的充要条件是 $\lambda>\lambda_{2n}$ $(n\geqslant 1)$;

(4) 存在递减的正序列 η_n, 当 $\lambda\geqslant\lambda_{2n}$ 时, 存在唯一的、在 $(0,l)$ 内恰有 $2n$ 个零点且 $u'(0)<0$ 的解; 当 $\lambda<\lambda_{2n}-\eta_n$ 时不存在这类解; 当 $\lambda_{2n}-\eta_n<\lambda<\lambda_{2n}$ 时恰有两个这类解.

当 k 为奇数时这实际上是 7.2 节中的一个特例, 而 k 为偶数时则不是 7.2 节的情形.

文献 [Lin1] 也提供了应用相图法的一个例子.

在 [SW2] 中更简单地证明了, 在齐次 Dirichlet 或 Neumann 边界条件下, 微分方程 $u''+f(u)=0$ 相应的时间函数是 Morse 函数, 并给出某些新的应用.

文献 [ACP] 利用相图法讨论了退化的非线性扩散问题.

文献 [Lin2] 利用相图法讨论了一个特殊的非保守系统

$$\begin{cases} u''+\dfrac{1}{x}u'=\dfrac{l^2}{u^m}, & 0<x<l,\\ u'(0)=0, \quad u(l)=1 \end{cases}$$

的全局分叉, 该文中使用的相图法与这里介绍的相图法是不同的.

文献 [ZhQ] 吸收相图法的某些思想, 利用解的对称性与单调性, 将一个保守系统边值问题

$$\begin{cases} (u^m)''+(a-x^2)u=0, & -L<x<L,\\ u(\pm L)=0 \end{cases}$$

的求解, 转化为证明一个相应的算子存在不动点.

文献 [BC] 利用相图法证明了, 在适当条件下, 问题

$$\begin{cases} u''+f(u)=0, & 0<x<l,\\ u(0)=u(l)=0 \end{cases}$$

的解是双曲的. 若 $u=\varphi(x)$ 是上述边值问题的解, 且 0 不是线性算子

$$v\to v''+\lambda f'(\varphi(x))v$$

的特征值, 则称 $\varphi(x)$ 是双曲的.

习　题　七

7.1　设 $f(u)=-u(u-b)(u-c)$, $0<b<c$, 满足

$$\int_0^c f(u)\mathrm{d}u\leqslant 0.$$

(1) 画出

$$u'' + f(u) = 0$$

的相图;

(2) 由相图能对边值问题

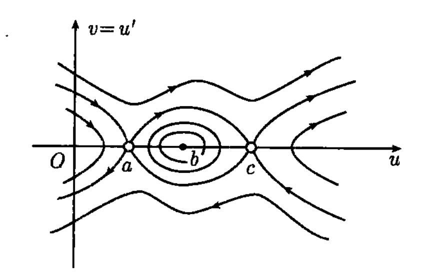
$$\begin{cases} u'' + f(u) = 0, & 0 < x < l, \\ u'(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

给出什么结论?

7.2 设 $f \in C^1$, 方程

$$u'' + f(u) = 0$$

有如下相图



其中 $(a,0),(b,0),(c,0)$ 为系统的全部奇点. 由此相图能对边值问题

$$\begin{cases} u'' + f(u) = 0, & 0 < x < l, \\ u'(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

给出什么结论?

7.3 设参数 $\lambda \geqslant 0$, 请给出边值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda(u - u^3) = 0, & x \in (0, \pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

的分支结构.

7.4 设 $f(u) = -(u-a)(u-b)(u-c),\ 0 < a < b < c$, 满足

$$\int_a^c f(u)\mathrm{d}u \leqslant 0.$$

证明边值问题

$$\begin{cases} u'' + f(u) = 0, & 0 < x < l, \\ u'(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

有唯一解且是正解.

7.5　设 $f(u) \in C^1(\mathbb{R}), b > 0, f(b) = 0$. 当 $u \neq b$ 时, $f(u) \neq 0$; 当 $u \in (0, b]$ 时, $f'(u) < 0$. 证明边值问题

$$\begin{cases} u'' + f(u) = 0, & 0 < x < l, \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

存在唯一解且是正解.

7.6　设 $g(w) \in C^1(\mathbb{R}), a < 0, g(a) = 0$. 当 $w \neq a$ 时, $g(w) \neq 0$; 当 $w \in [a, 0)$ 时, $g'(w) < 0$. 证明边值问题

$$\begin{cases} w'' + g(w) = 0, & 0 < x < l, \\ w(0) = w(l) = 0 \end{cases}$$

存在唯一解且是负解.

7.7　设 $\alpha \neq \beta$, $g(w) \in C^1(\mathbb{R}), g(\beta) = 0$. 当 $w \neq \beta$ 时, $g(w) \neq 0$; 当 w 在 α 与 β 之间时, $g'(w) < 0$. 证明边值问题

$$\begin{cases} w'' + g(w) = 0, & 0 < x < l, \\ w'(0) = \alpha, \quad w'(l) = 0 \end{cases}$$

存在唯一解.

7.8　设 $\alpha > b > 0$, $f(u) \in C^1(\mathbb{R}), f(b) = 0$, 当 $u \neq b$ 时, $f(u)(u - b) < 0$. 证明边值问题

$$\begin{cases} u'' + f(u) = 0, & 0 < x < l, \\ u(0) = 0, \quad u(l) = \alpha \end{cases}$$

存在唯一解且是正解.

7.9　考察方程

$$u'' + \lambda u - u^2 = 0 \tag{7-1}$$

及边值问题

$$\begin{cases} u'' + \lambda u - u^2 = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \tag{7-2}$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}$. 方程 (7-1) 的轨线方程是

$$v^2 = 2[E - F(u)],$$

其中 $v = u'$,

$$F(u)=\int_0^u(\lambda s-s^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}u^2\left(\frac{3}{2}\lambda-u\right).$$

从正负 v 轴上出发的轨线与正负 u 轴的第一次交点分别是 $(m_+(E),0)$ 和 $(m_-(E),0)$.

(1) 画出 $u''+\lambda u+u^2=0$ 的相图;

(2) 当 $\lambda>0$ 时, 证明

$$0<m_+(E)<\lambda,\quad \forall\quad 0<E<E^*:=\lambda^3/6,$$

$$\lim_{E\searrow 0}m_+(E)=0,\qquad \lim_{E\nearrow E^*}m_+(E)=\lambda,\qquad \frac{\mathrm{d}m_+(E)}{\mathrm{d}E}>0;$$

(3) 证明

$$m_-(E)<\min\{0,\lambda\},\qquad \lim_{E\to\infty}m_-(E)=-\infty,\qquad \frac{\mathrm{d}m_-(E)}{\mathrm{d}E}<0,$$

$$\lim_{E\searrow 0}m_-(E)=\begin{cases}0, & \lambda\geqslant 0,\\ \dfrac{3}{2}\lambda, & \lambda<0;\end{cases}$$

(4) 确定时间函数 $T_+(E)$ 与 $T_-(E)$ 的定义域并证明

$$T_\pm(E)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t)[\lambda(1+t)-2m_\pm(E)(1+t+t^2)/3]}};$$

(5) 证明 $T_+(E)$ 是 E 的严格增函数, $T_-(E)$ 是 E 的严格减函数;

(6) 证明

$$\lim_{E\searrow 0}T_\pm(E)=\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}},\quad \lambda>0,$$
$$\lim_{E\searrow 0}T_-(E)=\infty,\quad \lambda\leqslant 0,$$
$$\lim_{E\nearrow E^*}T_+(E)=\infty,\quad \lambda>0,$$
$$\lim_{E\to\infty}T_-(E)=0;$$

(7) 证明边值问题 (7-2) 有唯一正解的充要条件是 $\lambda>1$, 有唯一负解的充要条件是 $\lambda<1$.

第 8 章　非线性方程初值问题——半群理论及应用

本章在 Banach 空间 X 中研究包括常微分方程和许多非线性抛物型方程在内的一类抽象非线性微分方程的初值问题

$$\begin{cases} u'(t) = Au + f(t, u), \\ u(t_0) = x, \end{cases}$$

其中 $A: D(A) \to X$ 是某类线性算子 (可以是无界的), $x \in X, D(A) \subset X$.

先引进必要的工具 (连续半群、解析半群、扇形算子、分数幂算子与分数幂空间), 然后讨论抽象方程的初值问题.

在讨论抽象方程时, 先讨论线性方程的初值问题

$$\begin{cases} u'(t) = Au + f(t), \\ u(t_0) = x, \end{cases}$$

然后讨论非线性方程的初值问题. 在处理抽象方程与具体的非线性抛物型或双曲型方程的关系时, 先讨论一般的抽象理论, 然后举例说明如何把具体的非线性偏微分方程的初边值问题化为抽象的非线性微分方程的初值问题.

在考虑 Banach 空间 X 上的抽象微分方程时, 我们的研究对象是定义在 $t_0 \leqslant t < T(t_0 > -\infty, T \leqslant \infty)$ 上、取值在 X 的抽象函数 $u(t) \in X, t \in [t_0, T]$, 以及这种抽象函数的导数、积分等, 即所谓 Banach 空间上的分析. 有关这方面的预备知识读者可参考 [Gu].

8.1　线性齐次方程的初值问题与 C_0 半群

设 X 是 Banach 空间, 先在 X 中考察微分方程的初值问题

$$\begin{cases} u'(t) = Au, \quad t > 0, \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 A 是从 $D(A) \subset X$ 到 X 的线性算子, $x \in X$ 是任意给定的元素.

定义 8.1.1 一个取值于 X 的函数 $u(t)(t \geqslant 0)$, 若

(1) $t \geqslant 0$ 时, $u(t)$ 连续;

(2) $t > 0$ 时, $u(t)$ 连续可微, $u(t) \in D(A)$ 且满足 (1.1).

则称 $u(t)$ 是问题 (1.1) 的解 (古典解). 有时记作 $u(t;x)$ 以表示与初值 x 相应 (1.1) 的解.

引理 8.1.2 若对任意给定的 $x \in X$, 在 $0 \leqslant t < \infty$ 上问题 (1.1) 有唯一解 $u(t,x)$, 它连续依赖于初值 x, 定义 $T(t)x = u(t;x)$. 则对于 $t \geqslant 0, T(t): X \to X$ 是有界线性算子族, 并且满足:

(1) $T(0) = I$ (I 为恒同算子);

(2) 对任意 $t, s \geqslant 0$,

$$T(t+s) = T(t)T(s); \tag{1.2}$$

(3) 对任意 $x \in X, T(t)x$ 对 $t \geqslant 0$ 连续.

证明 只需注意, 若 $u(t;x)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}u(t;x)}{\mathrm{d}t} = Au(t;x),$$

则

$$\frac{\mathrm{d}u(t+s;x)}{\mathrm{d}t} = Au(t+s,x).$$

再利用唯一性假定即可得证.

后面将证明, 对于有界线性算子族 $T(t)$, 满足 (1.2) 式等价于满足

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ T(0) = I;\\(2)\ 对\ \forall t,s \geqslant 0, T(s+t) = T(s)T(t);\\(3)\ 对\ \forall x \in X, \lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x.\end{array}\right\} \tag{1.3}$$

定义 8.1.3 若对 $0 \leqslant t < \infty, T(t): X \to X$ 是有界线性算子族, 且满足 (1.3) 式, 则称 $T(t)$ 是 X 上的有界线性算子的强连续半群, 简称为 C_0 半群.

这样, 立即得到

引理 8.1.4 在引理 8.1.2 的条件下, 问题 (1.1) 的解 $u(t;x) = T(t)x$ 确定一个 C_0 半群 $T(t)$.

问题 (1.1) 的解与 C_0 半群有密切关系. 我们的目的是利用 A 来确定 C_0 半群 $T(t)$, 使得 $T(t)x$ 是问题 (1.1) 的解. 为此, 先讨论半群 $T(t)$ 的性质.

先给出 C_0 半群的一个估计式.

定理 8.1.5 设 $T(t)$ 是 C_0 半群, 则存在常数 ω 和 $M \geqslant 1$, 使得

$$\|T(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

证明 先证存在 $\eta > 0$, 当 $0 \leqslant t \leqslant \eta$ 时 $\|T(t)\|$ 有界. 若不然, 则存在 $t_n \to 0^+$, $\|T(t_n)\| \geqslant n$. 由共鸣定理知, 存在 $x \in X$, 使得 $\|T(t_n)x\|$ 无界. 这与 $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x$ 矛盾. 因此存在 $M \geqslant 1$, 使得当 $0 \leqslant t \leqslant \eta$ 时 $\|T(t)\| \leqslant M$.

对任意 $t \geqslant 0$, 可分解 $t = n\eta + \delta$, 其中 n 为非负整数, $0 \leqslant \delta < \eta$. 于是

$$\|T(t)\| = \|T(n\eta + \delta)\| = \|T(\delta)T^n(\eta)\| \leqslant MM^n \leqslant M \cdot M^{t/\eta}.$$

令 $\omega = \eta^{-1} \ln M$, 得

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

证毕.

定理 8.1.6 设 $T(t)$ 是 C_0 半群, 则对任意 $x \in X$, 函数 $T(t)x$ 对 $t \geqslant 0$ 连续.

证明 注意到 $\max\{s,t\} = \min\{s,t\} + |s-t|$, 若令 $\alpha = \min\{s,t\}, \beta = |s-t|$, 则 $\max\{s,t\} = \alpha + \beta$. 于是

$$\|T(s)x - T(t)x\| = \|T(\alpha+\beta)x - T(\alpha)x\| \leqslant \|T(\alpha)\| \cdot \|T(\beta)x - x\|.$$

由此即得结论.

若对任意 $x \in X$, 问题 (1.1) 有唯一解 $u(t;x) = T(t)x$, 它连续依赖于 x, 则由引理 8.1.2 知它确定一个 C_0 半群 $T(t)$, 且满足

$$\frac{\mathrm{d}T(t)x}{\mathrm{d}t} = AT(t)x.$$

于是

$$AT(t)x = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h) - I}{h} T(t)x.$$

由此, 引进如下定义:

定义 8.1.7 设 $T(t)$ 是 C_0 半群, 并有算子 B, 满足:

$$D(B) = \left\{ x \in X : \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ 存在} \right\},$$

$$Bx = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = \left.\frac{\mathrm{d}^+ T(t)x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}, \quad x \in D(B),$$

则称 B 是 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元 (或生成算子).

显然, B 是线性的, 但不一定有界. 元素 Bx 即是 $T(t)x$ 在 $t = 0$ 处的右导数.

对于 C_0 半群 $T(t)$, 我们将证明: $T(t)x$ 在 $t = 0$ 右可导保证了对所有 $t > 0$, $T(t)x$ 可导.

下面来讨论 C_0 半群的积分与微分性质.

定理 8.1.8 设 $T(t)$ 是 C_0 半群, B 是它的无穷小生成元, 则

(1) 当 $x \in X, t > 0$ 时,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\mathrm{d}s = T(t)x,$$

$t = 0$ 时,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x\mathrm{d}s = x;$$

(2) 当 $x \in X, t \geqslant 0$ 时, $\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s \in D(B)$ 且

$$B\left(\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s\right) = T(t)x - x;$$

(3) 对 $x \in D(B), t \geqslant 0$, 有 $T(t)x \in D(B)$ 且

$$\frac{\mathrm{d}T(t)x}{\mathrm{d}t} = BT(t)x = T(t)Bx;$$

(4) 对 $x \in D(B), t, s \geqslant 0$, 有

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t BT(\tau)x\mathrm{d}\tau = \int_s^t T(\tau)Bx\mathrm{d}\tau.$$

证明 证明 (1). 由

$$\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\mathrm{d}s - T(t)x\right\| \leqslant \left|\frac{1}{h}\right| \left|\int_t^{t+h} \|T(s)x - T(t)x\|\mathrm{d}s\right|,$$

以及 $T(t)x$ 对 t 的连续性知结论成立.

证明 (2). 因为

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s =& \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)x\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s \\ =& \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

令 $h \to 0^+$, 再利用结论 (1) 得

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s = T(t)x - x.$$

证明 (3). 设 $x \in D(B), h > 0$, 则当 $t \geqslant 0$ 时,

$$\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = \frac{T(h)-I}{h}T(t)x$$

$$= T(t)\left(\frac{T(h)x - x}{h}\right) \to T(t)Bx, \quad h \to 0^+.$$

由此得 $T(t)x \in D(B)$, 并且

$$BT(t)x = T(t)Bx, \quad \frac{\mathrm{d}^+ T(t)x}{\mathrm{d}t} = BT(t)x = T(t)Bx.$$

又因为

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{T(t) - T(t-h)}{h}x - T(t)Bx\right\| \\
=&\left\|T(t-h)\left(\frac{T(h)x - x}{h} - Bx\right) + T(t-h)Bx - T(t)Bx\right\| \\
\leqslant& M\left\|\frac{T(h)x - x}{h} - Bx\right\| + \|T(t-h)Bx - T(t)Bx\| \to 0, \quad h \to 0^+,
\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}^- T(t)x}{\mathrm{d}t} = T(t)Bx.$$

因此, 当 $x \in D(B), t \geqslant 0$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}T(t)x}{\mathrm{d}t} = T(t)Bx = BT(t)x.$$

证明 (4). 由结论 (3), 从 s 到 t 积分即得结论 (4). 证毕.

推论 8.1.9 设 $T(t)$ 是 C_0 半群, B 是它的无穷小生成元, 则 B 是闭稠定线性算子.

证明 显然 B 是线性的. 对任意 $x \in X$, 令

$$x_t = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s, \quad t > 0.$$

由定理 8.1.8(2) 知, $x_t \in D(B)$. 再由定理 8.1.8(1) 知, 当 $t \to 0^+$ 时, $x_t \to x$. 因此 $\overline{D(B)} = X$. 又设 $x_n \in D(B)$, 当 $n \to \infty$ 时, $x_n \to x$ 且 $Bx_n \to y$, 由定理 8.1.8(4) 知

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Bx_n\mathrm{d}s.$$

由于当 $n \to \infty$ 时右端的被积函数在有限区间上一致收敛, 所以

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\mathrm{d}s.$$

上式两边除以 t, 再令 $t \to 0^+$ 得 $x \in D(B)$ 且 $Bx = y$, 故 B 是闭的. 证毕.

下面将证明: 若 $T(t)$ 是 C_0 半群, 以 A 为无穷小生成元, 则对任意 $x \in D(A)$, $u(t;x)=T(t)x$ 满足:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ u:[0,\infty)\to X \text{ 连续可微;}\\ (2)\ u'(t)=Au, t\in[0,\infty);\\ (3)\ u(0)=x;\\ (4)\ u \text{ 是唯一满足 (1)–(3) 的函数;}\\ (5)\ u \text{ 连续依赖于 } x, \text{ 并且关于 } t\in[0,\infty) \text{ 的任一紧集是一致的.}\end{array}\right\} \quad (1.4)$$

定义 8.1.10 设 X_0 是 X 的线性子空间, 若对任意 $x \in X_0$, 存在函数 $u:[0,\infty) \to D(A)$ 满足条件 (1.4), 则称初值问题 (1.1) 对 A 关于 X_0 是适定的.

定理 8.1.11 设 A 是 X 中的闭稠定线性算子, 则初值问题 (1.1) 对 A 关于 $D(A)$ 是适定的充要条件是: 存在 C_0 半群 $T(t)$, 它的无穷小生成元包含 A. 这时, 对任意 $x \in D(A), u=T(t)x$ 是问题 (1.1) 的唯一解.

证明 先证充分性. 设 $T(t)$ 是 C_0 半群, 以 $B \supseteq A$ 为无穷小生成元. 令 $u=T(t)x$, 显然 u 满足条件 (1.4) 中的 (1) – (3).

现设 $v(t)$ 是满足条件 (1.4) 中 (1) – (3) 的任意一个抽象函数. 令

$$w(t,s)=T(t-s)v(s),$$

则有

$$\frac{\partial w(t,s)}{\partial s}=T(t-s)Av(s)-T(t-s)Av(s)=0, \quad 0<s<t.$$

又 $w(t,s)$ 在 $0 \leqslant s \leqslant t$ 连续, 因此

$$v(t)=w(t,t)=w(t,0)=T(t)v(0)=T(t)x.$$

条件 (1.4) 中的 (4) 得证.

因 $u(t;x)=T(t)x$, 对任意 $x,y \in D(A)$, 有

$$\|u(t;x)-u(t;y)\| \leqslant \|T(t)\| \cdot \|x-y\| \leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}\|x-y\|,$$

所以 u 满足条件 (1.4) 中的 (5), 充分性得证.

再证必要性. 设问题 (1.1) 对 A 关于 $D(A)$ 是适定的. 对任意 $x \in D(A)$, 由问题 (1.1) 确定唯一解 $u(t;x)$. 定义

$$\hat{T}(t)x=u(t;x), \quad \forall x \in D(A),$$

那么 $\hat{T}(t)$ 是 $D(A)$ 上的有界线性算子. 因为 $\overline{D(A)}=X$, 故存在唯一的有界线性算子 $T(t):X\to X$, 它是 $\hat{T}(t)$ 的延拓. 显然, 对任意 $x \in D(A)$, 有

$$\hat{T}(0)x=x, \quad \hat{T}(t+s)x=\hat{T}(t)\hat{T}(s)x, \quad \forall t,s \geqslant 0.$$

因为 $\overline{D(A)} = X$, 所以

$$T(0) = I, \quad T(t+s) = T(t)T(s), \quad \forall t, s \geqslant 0.$$

现在证明

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0.$$

由适定性定义知, 对任意 $\eta > 0$ 存在 $\delta_\eta > 0$, 使得当 $y \in D(A), \|y\| \leqslant \delta_\eta, t \in [0,T]$ 时, 有

$$\|\hat{T}(t)y\| = \|u(t;y)\| < \eta.$$

于是, 对任意 $y \in D(A), y \neq 0$, 当 $t \in [0,T]$ 时,

$$\left\|\hat{T}(t)\frac{y}{\|y\|}\delta_\eta\right\| < \eta,$$

即

$$\|\hat{T}(t)y\| < \eta\delta_\eta^{-1}\|y\|.$$

这说明 $\hat{T}(t)$ 作为 $D(A)$ 到 $D(A)$ 的有界线性算子, 其范数

$$\|\hat{T}(t)\| \leqslant \eta\delta_\eta^{-1},$$

$T(t)$ 作为 X 到 X 的有界线性算子, 其范数

$$\|T(t)\| \leqslant \|\hat{T}(t)\| \leqslant \eta\delta_\eta^{-1}.$$

因此, 存在常数 M_T, 使得当 $t \in [0,T]$ 时, $\|T(t)\| \leqslant M_T$.

对任意 $x \in X, \varepsilon > 0$, 存在 $y \in D(A)$ 使得

$$\|y - x\| < \varepsilon/3, \quad \|T(t)x - T(t)y\| < \varepsilon/3, \quad t \in [0,T].$$

对此 y, 存在 $\tau > 0$, 使得当 $t \in [0,\tau]$ 时,

$$\|T(t)y - y\| = \|\hat{T}(t)y - y\| < \varepsilon/3.$$

于是, 当 $t \in [0,\tau]$ 时,

$$\|T(t)x - x\| \leqslant \|T(t)x - T(t)y\| + \|T(t)y - y\| + \|y - x\| < \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0$. 故 $T(t)$ 为 C_0 半群.

对任意 $x \in D(A)$, 当 $h \to 0^+$ 时,

$$\frac{1}{h}[T(h)x - x] = \frac{1}{h}[u(h;x) - x] \to \left.\frac{\mathrm{d}^+ u}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = Ax,$$

即 $T(t)$ 的无穷小生成元包含 A. 证毕.

若 $T(t)$ 是 C_0 半群, 以 A 为无穷小生成元, 则当 $x \in X$ 而 $x \notin D(A)$ 时, 初值问题 (1.1) 不一定有解. 这时可引进广义解.

定义 8.1.12 设 $T(t)$ 是 C_0 半群, 以 A 为无穷小生成元, 对 $x \in X$, 称 $T(t)x$ 为问题 (1.1) 在 X 上的适度解（在 $C([0,\infty),X)$ 中的广义解）.

讨论问题 (1.1) 的古典解或适度解的存在唯一性与讨论由无穷小生成元确定的 C_0 半群密切相关.

8.2 线性算子是 C_0 半群的无穷小生成元的充要条件

现在考虑最重要的问题: 由闭线性算子 A 确定 C_0 半群 $T(t)$, 使得 A 是它的无穷小生成元. 为此, 先设 $T(t)$ 是 C_0 半群, 以 B 为无穷小生成元, 探讨 B 有什么性质, 然后指出 B 的哪些特点是本质的, 即指出线性算子 B 为 C_0 半群的无穷小生成元的充要条件.

推论 8.1.9 已经指出, C_0 半群的无穷小生成元一定是闭稠定线性算子. 下面将考察 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元 B 的预解算子 $(\lambda I-B)^{-1}$.

先看一个特殊情形: 若 B 是 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的有界线性算子对应的 $n\times n$ 矩阵, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t(\lambda I-B)}x] = -(\lambda I-B)\mathrm{e}^{-t(\lambda I-B)}x.$$

若 $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t(\lambda I-B)}x = 0$, 则

$$x = (\lambda I-B)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(\lambda I-B)}x\mathrm{d}t,$$

$$(\lambda I-B)^{-1}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{tB}x\mathrm{d}t,$$

$$(\lambda I-B)^{-1}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t, \tag{2.1}$$

其中 $T(t)=\mathrm{e}^{tB}$, 以 B 为无穷小生成元.

下面将对一般的 C_0 半群 $T(t)$ 证明 (2.1) 式, 为此先引入算子 $R(\lambda)$:

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t,$$

并讨论其性质.

定理 8.2.1 设 $T(t)$ 是 C_0 半群, $\|T(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}, A$ 是 $T(t)$ 的无穷小生成元, 则

(1) A 是闭稠定的线性算子;

(2) 对任意满足 $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ 的 λ 和自然数 n, 有 $\lambda \in \rho(A)$ 且

$$R(\lambda, A)^n x = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t,$$

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^n},$$

其中 $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ 是 A 的预解算子, $\rho(A)$ 是 A 的预解集.

结论 (1) 已由推论 8.1.9 给出. 结论 (2) 的证明分成以下几个引理进行.

引理 8.2.2 设 $T(t)$ 是 C_0 半群, $\|T(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}$, 则当 $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega, x \in X$ 时, 积分

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t$$

收敛于 X 中的某元素.

证明 只需注意, 对任意 $b_2 > b_1 > 0$, 有

$$\left\|\int_{b_1}^{b_2} \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t\right\| \leqslant M\int_{b_1}^{b_2} \mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,\lambda-\omega)t}\mathrm{d}t \cdot \|x\|,$$

由此即得结论.

引理 8.2.3 设 $T(t)$ 是 C_0 半群, $\|T(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}, A$ 是 $T(t)$ 的无穷小生成元, 则当 $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ 时, 有 $\lambda \in \rho(A)$ 并且

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

是定义在 X 上的有界线性算子, 同时还有

$$\|R(\lambda, A)\| = \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{\mathrm{Re}\,\lambda - \omega}.$$

证明 对任意 $h > 0, x \in X$ 和 $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$, 因为

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda, A)x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}[T(t+h)x - T(t)x]\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{e}^{\lambda h}}{h}\int_0^h \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

令 $h \to 0^+$ 知, 右端的极限是 $\lambda R(\lambda, A)x - x$. 因此, $R(\lambda, A)x \in D(A)$ 且

$$AR(\lambda, A)x = \lambda R(\lambda, A)x - x,$$

即

$$(\lambda I - A)R(\lambda, A)x = x, \quad x \in X. \tag{2.2}$$

另一方面, 当 $x \in D(A)$ 时, 有

$$R(\lambda, A)Ax = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)Ax\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}AT(t)x\mathrm{d}t.$$

由于 A 是闭的, 所以

$$R(\lambda, A)Ax = A\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t = AR(\lambda, A)x.$$

因此, 由 (2.2) 式又得

$$R(\lambda, A)(\lambda I - A)x = x, \quad x \in D(A).$$

这就证明了 $(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda, A)$ 是定义在整个空间 X 上, 因此 $\lambda \in \rho(A)$.

进一步有估计式

$$\|R(\lambda, A)x\| \leqslant M\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\ \lambda-\omega)t}\mathrm{d}t\|x\| \leqslant \frac{M}{\mathrm{Re}\ \lambda - \omega}\|x\|,$$

即

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{M}{\mathrm{Re}\ \lambda - \omega}.$$

证毕.

引理 8.2.4 在引理 8.2.3 的条件下, 当 $\mathrm{Re}\ \lambda > \omega$ 时, 有

$$\frac{\mathrm{d}^n R(\lambda, A)x}{\mathrm{d}\lambda^n} = (-1)^n\int_0^{\infty} t^n\mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t,$$
$$\frac{\mathrm{d}^n R(\lambda, A)}{\mathrm{d}\lambda^n} = (-1)^n n! R^{n+1}(\lambda, A),$$
$$R^n(\lambda, A)x = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t,$$
$$\|R^n(\lambda, A)\| \leqslant \frac{M}{(\mathrm{Re}\ \lambda - \omega)^n}.$$

证明 对于

$$R(\lambda, A)x = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t,$$

在积分号下关于 λ 求导任意次可得第 1 式. 利用预解算子 $R(\lambda, A)$ 的性质 (预解恒等式):

$$\frac{\mathrm{d}R(\lambda, A)}{\mathrm{d}\lambda} = -R^2(\lambda, A),$$

可归纳证得第 2 式. 利用导算子的定义以及第 1 式和第 2 式可得第 3 式. 再利用 $\|T(t)x\| \leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}\|x\|$ 和第 3 式即得第 4 式. 证毕.

由上述引理立即可推出定理 8.2.1 的结论 (2). 定理 8.2.1 得证.

定理 8.2.1 的逆定理也成立, 即由条件 (1) 和 (2) 可以断定 A 是某 C_0 半群的无穷小生成元. 事实上, 还可证明:

定理 8.2.5　线性算子 A 是 C_0 半群 $T(t)(\|T(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{\omega t})$ 的无穷小生成元的充要条件是: A 满足

(1) A 是闭稠定的线性算子;

(2) 对任意 $\lambda > \omega$, 有 $\lambda \in \rho(A)$ 且

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

这个结果通常称为推广的 Hille-Yosida 定理.

当 $M = 1$ 时, 有

定理 8.2.6　线性算子 A 是 C_0 半群 $T(t)(\|T(t)\| \leqslant \mathrm{e}^{\omega t})$ 的无穷小生成元的充要条件是: A 满足

(1) A 是闭稠定的线性算子;

(2) 对任意 $\lambda > \omega$, 有 $\lambda \in \rho(A)$ 且

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{1}{\lambda - \omega}.$$

定理 8.2.5 与定理 8.2.6 的必要性已经证明, 充分性的证明可参见 [Paz, p.8-13], 此处略去.

推论 8.2.7　设线性算子 A 是 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元, 则 $T(t)$ 为指数衰减半群 (即存在 $\omega < 0$ 使 $\|T(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}$) 的充要条件是: 存在 $\omega < 0$, 使得对任意 $\lambda > \omega$, 有 $\lambda \in \rho(A)$, 且

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{2.3}$$

或等价地说, 存在 $\omega < 0$, 使得对任意 $\mathrm{Re}\ \lambda > \omega$, 有 $\lambda \in \rho(A)$, 且

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant \frac{M}{(\mathrm{Re}\ \lambda - \omega)^n}, n = 1, 2, \cdots. \tag{2.4}$$

推论 8.2.7 中的系列谱估计 (2.3) 式或 (2.4) 式一般很难直接验证. 下面给出 C_0 半群 $T(t)$ 为指数衰减半群的另一充要条件, 其谱条件相对容易验证.

定理 8.2.8　设线性算子 A 是 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元, 则 $T(t)$ 为指数衰减半群的充要条件是: A 满足

$$\sup\{\mathrm{Re}\ \lambda : \lambda \in \sigma(A)\} < 0, \tag{2.5}$$

$$\sup_{\mathrm{Re}\ \lambda \geqslant 0} \|R(\lambda, A)\| < \infty. \tag{2.6}$$

定理 8.2.8 的必要性可由推论 8.2.7 得到. 充分性的证明可见 [Hu], 这里略去.

8.3 C_0 半群对应的线性与非线性方程的初值问题

8.3.1 线性齐次与非齐次方程的初值问题

回到线性齐次方程的初值问题 (1.1), 由定理 8.1.11、定义 8.1.12、定理 8.2.5 及定理 8.2.6, 可得

定理 8.3.1 设 $A: D(A) \to X$ 满足条件

(1) A 是 X 上的闭稠定线性算子;

(2) 存在实数 ω 和 $M \geqslant 1$, 使得 $\rho(A) \supset \{\lambda : \lambda > \omega\}$, 且当 $\lambda > \omega$ 时有

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

或

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{1}{\lambda - \omega}.$$

那么 (1) 对任意 $x \in D(A)$, 问题 (1.1) 存在唯一古典解 $u(t) = \mathrm{e}^{tA}x \in C([0,\infty), D(A)) \bigcap C^1([0,\infty), X)$, 即问题 (1.1) 对 A 关于 $D(A)$ 是适定的;

(2) 对任意 $x \in X$, 问题 (1.1) 存在唯一适度解 $u(t) = \mathrm{e}^{tA}x \in C([0,\infty), X)$.

现在考虑线性非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t = Au + f(t), \\ u|_{t=0} = x, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $f : [0, T] \to X$. 易证

定理 8.3.2 假设 A 在 X 上生成 C_0 半群, 并且

$$f \in C([0,T), X), f(t) \in D(A), Af \in C([0,T), X); \text{ 或 } f \in C^1([0,T), X),$$

则对任意 $x \in D(A)$, 问题 (3.1) 存在唯一古典解 $u \in C^1([0,T), X) \cap C([0,T), D(A))$, 且满足

$$u(t, x) = \mathrm{e}^{tA}x + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} f(s)\mathrm{d}s.$$

注 3.1 设 A 为 X 上某 C_0 半群的无穷小生成元, 当 $f \in L_1((0,T), X)$ 时, 易验证对任意 $x \in X$, 函数 $u(t; x) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s \in C([0,T], X)$, 此时称 $u(t; x)$ 为问题 (3.1) 在 $[0, T]$ 上的适度解.

定理 8.3.3 假设 A 在 X 上生成 C_0 半群.

(1) 设 $x \in D(A)$. 若 f 在 $[0,T]$ 上 Lipschitz 连续; 或者 $f \in L_1((0,T),X)$ 在 $(0,T)$ 上连续, $f(s) \in D(A), 0 < s < T$ 且 $Af \in L_1((0,T),X)$, 则问题 (3.1) 存在唯一古典解 $u(t;x) \in C([0,T), D(A)) \cap C^1([0,T), X)$.

(2) 设 $x \in X \setminus D(A)$. 若 $f \in L_1((0,T),X)$, 则问题 (3.1) 存在唯一适度解 $u(t;x) \in C([0,T],X)$.

定理 8.3.3(1) 的证明详见 [Paz].

8.3.2 非线性方程初值问题

本节考虑下面非线性方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t = Au + f(t,u), \quad t > t_0, \\ u|_{t=t_0} = x, \end{cases} \tag{3.2}$$

其中 A 在 X 上生成 C_0 半群.

定义 8.3.4　若 $u(t;t_0,x) \in C((t_0,t_1),D(A)) \cap C^1((t_0,t_1),X) \cap C([t_0,t_1),X)$, 且在 $[t_0,t_1)$ 上满足 (3.2), 则称 $u(t;t_0,x)$ 为问题 (3.2) 在 $[t_0,t_1)$ 上的古典解.

若 $u(t;t_0,x) \in C([t_0,t_1),X)$, 且在 $[t_0,t_1)$ 上满足积分方程

$$u(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}x + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A} f(s,u(s))\mathrm{d}s, \tag{3.3}$$

则称 $u(t;t_0,x)$ 为问题 (3.2) 在 $[t_0,t_1)$ 上的适度解.

显然, 若问题 (3.2) 的古典解满足 $f(t,u(t)) \in L_1((t_0,t_1),X)$, 则它必是问题 (3.2) 的适度解或积分方程的连续解. 反之不一定成立.

定义映射:

$$G(u)(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}x + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A} f(s,u(s))\mathrm{d}s, \quad \forall u \in C([t_0,t_1],X),$$

那么问题 (3.2) 在 X 中的适度解可看成 G 在 X 中的不动点. 下面利用压缩映像原理、强连续半群的强连续性及增长估计, 类似常微分方程情形可得到非线性抽象微分方程 (3.2) 关于适度解的局部存在唯一性定理及延拓性定理.

定理 8.3.5(适度解的局部存在唯一性)　设 A 在 X 上生成连续半群, U 是 $\mathbb{R} \times X$ 中的某开集, $f(t,u): U \to X$ 关于 t 连续, 关于 u 满足局部 Lipschitz 条件, 即当 $(t^*,u^*) \in U$ 时, 存在 (t^*,u^*) 的一个邻域 $V \subset U$ 及常数 $L > 0$, 使得

$$\|f(t,u) - f(t,v)\|_X \leqslant L\|u-v\|_X, \quad \forall (t,u),(t,v) \in V. \tag{3.4}$$

则对任一固定 $(t_0,x) \in U$, 存在 $T > 0$ (充分小), 使得问题 (3.2) 存在唯一定义在 $[t_0,t_0+T]$ 上的适度解 $u(t;t_0,x) \in C([t_0,t_0+T],X)$.

证明 因为 $(t_0,x)\in U$ 并且 U 是开集, 所以可取充分小 δ, $\tau>0$, 不妨设 $0<\tau\leqslant 1$, 使得

$$V=\{(t,u):t_0\leqslant t\leqslant t_0+\tau,\|u-x\|_X\leqslant\delta\}\subset U,$$

并且对任意 $(t,u_1),(t,u_2)\in V$ 有

$$\|f(t,u_1)-f(t,u_2)\|_X\leqslant L\|u_1-u_2\|_X. \tag{3.5}$$

取 $0<T\leqslant\tau\leqslant 1$, 定义

$$Y=\{v:v\in C([t_0,t_0+T],X)\},\quad \|v\|_Y=\max\{\|v(t)\|_X:t\in[t_0,t_0+T]\},$$

显然 Y 是一完备的度量空间. 取 Y 中闭凸集

$$S=\{v:v\in C([t_0,t_0+T],X),\text{且}\|v(t)-x\|_X\leqslant\delta\}.$$

对于 $v\in S$, 定义映射 G:

$$G(v)(t)=\mathrm{e}^{(t-t_0)A}x+\int_{t_0}^t\mathrm{e}^{(t-s)A}f(s,v(s))\mathrm{d}s,$$

下面将证明可适当选取 T, 使得 G 是映 S 到自身的压缩映射.

显然, 若 $v\in X$, 则 $G(v)\in X$. 若 $v\in S$, 则

$$\|G(v)(t)-x\|_X\leqslant\|(\mathrm{e}^{(t-t_0)A}-I)x\|_X+\int_{t_0}^t\|\mathrm{e}^{(t-s)A}f(s,v(s))\|_X\mathrm{d}s.$$

因为存在 $M_0>0$ 使得

$$\|\mathrm{e}^{tA}\|_{X\to X}\leqslant M_0,\quad 0\leqslant t\leqslant T\leqslant 1, \tag{3.6}$$

所以, 对于 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T$ 有

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t\|\mathrm{e}^{(t-s)A}f(s,v(s))\|_X\mathrm{d}s&=\int_{t_0}^t\|\mathrm{e}^{(t-s)A}[f(s,v(s))-f(s,x)]\|_X\mathrm{d}s\\&\quad+\int_{t_0}^t\|\mathrm{e}^{(t-s)A}f(s,x)\|_X\mathrm{d}s\\&\leqslant M_0(L\delta+K)T,\end{aligned}$$

其中

$$K=\max\{\|f(t,x)\|_X:t\in[t_0,t_0+T]\}.$$

由半群 e^{tA} 的强连续性, 对固定的 $x \in X$, 可取 $T > 0$ 充分小, 使得

$$\|(e^{(t-t_0)A} - I)x\|_X \leqslant \delta/2, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T, \tag{3.7}$$

且

$$M_0(L\delta + K)T \leqslant \delta/2.$$

那么

$$\|G(v)(t) - x\|_Y \leqslant \delta,$$

即 $G(v) \in S$.

若 $u, v \in S$, 则对 $\forall t \in [t_0, T]$ 有

$$\begin{aligned}\|G(u)(t) - G(v)(t)\|_X &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|e^{(t-s)A}\| \cdot \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \\ &\leqslant M_0 LT \|u - v\|_Y \leqslant \frac{1}{2}\|u - v\|_Y, \quad 当\ T > 0\ 充分小,\end{aligned}$$

于是 $\|Gu - Gv\|_Y \leqslant \dfrac{1}{2}\|u - v\|_Y$, 即 G 是压缩的.

由压缩映射原理, G 在 S 中有唯一不动点 u, 故 u 是积分方程 (3.3) 的一个连续解, 即为 (3.2) 的唯一适度解. 证毕.

注 3.2 由定理 8.3.5 的证明可见局部存在区间长度 T 的大小依赖区域 U、初值 (t_0, x) 的选取及 f 的性质. 对 U 为 $\mathbb{R}^+ \times X$ 情形, 下面进一步可证局部存在区间 T 的大小仅依赖 $\|x\|_X$ 及 t_0 的上界, 且类似常微分方程情形有相应的延拓性定理.

定理 8.3.6 设 A 在 X 上生成连续半群, 设 $f(t, u) : [0, +\infty) \times X \to X$ 为连续的且关于 u 满足局部 Lipschitz 条件, 即对任意固定的 $C_1, C_2 > 0$, 存在常数 $L(C_1, C_2) > 0$, 使得

$$\|f(t, u) - f(t, v)\|_X \leqslant L(C_1, C_2)\|u - v\|_X, \ 当\ 0 \leqslant t \leqslant C_1 + 1, \|u\|_X \leqslant C_2, \|v\|_X \leqslant C_2.$$

则对每个 $x \in X$, 存在 $T_{\max} \leqslant \infty$, 使得初值问题 (3.2) 存在唯一饱和适度解 $u(t; t_0, x)$ 具最大存在区间 $[t_0, T_{\max})$. 进而若 $T_{\max} < \infty$, 则

$$\lim_{t \to T_{\max}^-} \|u(t; t_0, x)\|_X = \infty. \tag{3.8}$$

证明 首先证明对固定的 $t_0 \geqslant 0$ 及 $x \in X$, 存在 T 仅依赖 $\|x\|_X$ 及 t_0, 使得初值问题 (3.2) 在 $[t_0, t_0 + T]$ 上存在唯一适度解 $u(t; t_0, x)$. 为此只需证明存在合适

的集合 S 及 T 仅依赖 $\|x\|_X$ 及 t_0 的上界, 使得定理 8.3.5 的证明中定义的映射 G 为 $S \to S$ 的压缩映像. 与定理 8.3.5 不同, 这里取集合:

$$\begin{aligned} &S = \{v : v \in C([t_0, t_0 + T], X), \quad \text{且} \|v(t)\|_X \leqslant R\}, \quad \text{其中} \quad R \geqslant 2M_0\|x\|_X, \\ &T = \min\left\{1, \frac{R}{2M_0(L(t_0, R)R + K(t_0))}\right\}, \quad K(t_0) = \sup_{s \in [0, t_0+1]} \|f(s, 0)\|_X. \end{aligned} \tag{3.9}$$

类似定理 8.3.5 的证明, 易验证对任意 $v \in S$ 有

$$\begin{aligned} \|G(v)(t)\|_X &\leqslant \|e^{(t-t_0)A}x\|_X + \int_{t_0}^t \|e^{(t-s)A} f(s, v(s))\| ds \\ &\leqslant M_0\|x\|_X + M_0 \int_{t_0}^t \|[f(s, v(s)) - f(s, 0)]\|_X ds + M_0 \int_{t_0}^t \|f(s, 0)\|_X ds \\ &\leqslant M_0\|x\|_X + M_0(L(t_0, R)R + K(t_0))T \leqslant R, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T]. \end{aligned}$$

故 $G(v) : S \to S$. 同理易验证 G 为 S 上的压缩映射. 于是在 $[t_0, t_0 + T]$ 上初值问题 (3.2) 存在唯一适度解.

由解的局部存在唯一性及经典的延拓性讨论, 易证存在唯一饱和适度解具最大存在区间 $[t_0, T_{\max})$. 进而由 (3.9) 知: (3.2) 解的局部存在区间的长度 T 的下界仅依赖 $\|x\|_X$ 的上界及 t_0 的上界.

由反证法, 设 (3.8) 不成立, 即存在 (3.2) 的一饱和适度解 $u(t; t_0, x)$ 及一序列 $t_n \to T_{\max}^- < \infty$, 使得 $\|u(t_n; t_0, x)\|$ 一致有界. 于是由 (3.9) 知存在某 $T > 0$, 使得以任意 t_n 为初始时刻, 以 $(t_n, u(t_n))$ 为初值的初值问题 (3.2) 在 $[t_n, t_n + T]$ 上存在唯一适度解. 若取 t_n 充分靠近 $T_{\max}$, 则 $t_n + T > T_{\max}$, 于是 $u(t; t_0, x)$ 可延拓到 $t = T_{\max}$ 右侧, 此与 $u(t; t_0, x)$ 为饱和解矛盾. 证毕.

对于 $u \in D(A)$, 定义 $\|u\|_A = \|u\|_X + \|Au\|_X$, 再定义空间 $Y = (D(A), \|u\|_Y)$ 及范数 $\|u\|_Y = \|u\|_A$, 则 Y 为 Banach 空间. 易证若 A 在 X 上生成 C_0 半群, 则 A 在 Y 上也生成 C_0 半群, 于是由定理 8.3.6 可得到初值 $x \in Y$ 时, 初值问题 (3.2) 在 Y 上唯一饱和适度解的存在性, 即有

定理 8.3.7(古典解的局部存在唯一性) 设 A 在 X 上生成连续半群, $f(t, u) : \mathbb{R}^+ \times Y \to Y = D(A)$ 关于 t 连续, 关于 u 满足局部 Lipschitz 条件, 即对任意给定 $K > 0$, 存在常数 $C(K) > 0$ 使得

$$\|f(t, u) - f(t, v)\|_Y \leqslant C(K)\|u - v\|_Y, \quad \text{对}\forall \|u\|_Y, \|v\|_Y, t_0 \leqslant t \leqslant K.$$

则对任意的 $x \in D(A)$, 问题 (3.2) 存在唯一饱和古典解 $u(t; t_0, x) \in C^1([t_0, T_{\max}), X) \cap C([t_0, T_{\max}), D(A))$.

现在有两个问题, 一是对给定的线性算子 A, 如何验证它的条件 (1) 和 (2); 另一个是当 A 及 f 进一步满足何种条件时, 才能保证对任意 $x \in X$ (不仅是 $x \in D(A)$), 问题 (1.1), 问题 (3.1) 及问题 (3.2) 有唯一古典解. 这些都是后面要考虑的问题.

8.3.3 应用: 二阶非线性波方程的初值问题

考虑一维空间中的二阶非线性波方程的初值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + h(u), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = v_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.10}$$

定理 8.3.8　(1) 假设 $h \in C^1(\mathbb{R}), h(0) = 0$, 则对任意给定的 $(u_0, v_0) \in H^1(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R})$, 初值问题 (3.10) 存在唯一饱和弱解 $u(t) \in C([0, T_{\max}), H^1(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T_{\max}), L_2(\mathbb{R}))$.

(2) 假设 $h \in C^2(\mathbb{R}), h(0) = 0$, 则对任意给定的 $(u_0, v_0) \in H^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$, 初值问题 (3.10) 存在唯一饱和古典解 $u(t) \in C([0, T_{\max}), H^2(\mathbb{R})) \cap C^2([0, T_{\max}), L_2(\mathbb{R}))$.

证明　初值问题 (3.10) 可等价地写成下面的一阶非线性方程组

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(u) \end{pmatrix} \triangleq A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \vec{F}(u, v), \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3.11}$$

下面利用 8.3.2 节的连续半群理论研究初值问题 (3.11) 解的局部存在唯一性. 首先需验证算子 A 在合适的空间 X 上生成连续半群. 取 $X = H^1(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R})$, $D(A) = H^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$, 这里 X 及 $D(A)$ 为复 Hilbert 空间, 其中 X 上的实内积定义为

$$((u_1, v_1), (u_2, v_2))_X = \mathrm{Re} \int_R (u_1\overline{u}_2 + v_1\overline{v}_2)\mathrm{d}x + \mathrm{Re} \int_R u_{1x}\overline{u}_{2x}\mathrm{d}x, \forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in X.$$

易证 $A : D(A) \to X$ 为一闭稠定线性算子, 这里略去证明.

下证, A 在 X 上生成 C_0 半群. 先计算 $\sigma(A)$ 或 $\rho(A)$.

对任意给定的 $(f, g) \in X$, 考虑线性微分方程组

$$(\lambda I - A) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

对 (3.12) 两端关于自变量 x 做 Fourier 变换得

$$\begin{cases} \lambda\hat{u}(\tau) - \hat{v}(\tau) = \hat{f}(\tau), \\ \lambda\hat{v}(\tau) - (\mathrm{i}\tau)^2\hat{u}(\tau) = \hat{g}(\tau). \end{cases} \tag{3.13}$$

对 (3.13) 求解易得

$$(\lambda^2+\tau^2)\hat{u}(\tau)=\lambda\hat{f}(\tau)+\hat{g}(\tau),\quad \hat{v}(\tau)=\lambda\hat{u}(\tau)-\hat{f}(\tau). \tag{3.14}$$

由 (3.12) 和 (3.14), 利用 $\|u\|_{H^k(\mathbb{R})}\sim\|(1+\tau^2)^{k/2}\hat{u}(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R})}$, $\|u\|_{L_2(\mathbb{R})}=\|\hat{u}\|_{L_2(\mathbb{R})}$, 易验证若 $\mathrm{Re}\,\lambda\neq 0$, 则对任意 $(f,g)\in X=H^1(\mathbb{R})\times L_2(\mathbb{R})$, (3.12) 存在唯一解 $(u,v)\in H^2(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})$, 且满足

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R})}\leqslant C_1(\lambda)(\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}+\|g\|_{L_2(\mathbb{R})}),$$

$$\|v\|_{H^1(\mathbb{R})}\leqslant|\lambda|\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}+\|f\|_{H^1(\mathbb{R})}\leqslant C_2(\lambda)(\|f\|_{H^1(\mathbb{R})}+\|g\|_{L_2(\mathbb{R})}).$$

即若 $\mathrm{Re}\,\lambda\neq 0$, 则 $\lambda I-A$ 可逆且有有界逆 $(\lambda I-A)^{-1}:X\to D(A)$. 于是 $\{\lambda:\mathrm{Re}\,\lambda\neq 0\}\subset\rho(A)$, 进而由 (3.14) 可证对 $\lambda=\mathrm{i}k$, $k\in\mathbb{R}$, 存在 $(f,g)\in H^1(\mathbb{R})\times L_2(\mathbb{R})$, 使得 (3.12) 在 $H^2(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})$ 中无解, 故 $\sigma(A)=\mathrm{i}\mathbb{R}$.

下面对 $\mathrm{Re}\,\lambda\neq 0$, 估计 $\|(\lambda I-A)^{-1}\|_{X\to X}$ (验证 C_0 半群无穷小生成元的条件).

设 $\mathrm{Re}\,\lambda\neq 0$, 由 $\lambda I-A$ 可逆, 知对任意给定的 $(f,g)\in X$, 存在唯一 $(u,v)\in D(A)$ 满足 (3.12), 即

$$\begin{cases}\lambda u-v=f,\\ \lambda v-u_{xx}=g.\end{cases} \tag{3.15}$$

要证存在某 $\omega\in\mathbb{R}$ 使得

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|_{X\to X}\leqslant\frac{1}{\lambda-\omega},\quad \forall\lambda>\omega.$$

即对 $\forall(f,g)\in X$, (3.15) 的解满足:

$$\|(u,v)\|_X\leqslant\frac{1}{\lambda-\omega}\|(f,g)\|_X,\quad \forall\lambda>\omega,$$

或等价地

$$\|(f,g)\|_X^2\geqslant(\lambda-\omega)^2\|(u,v)\|_X^2,\quad \forall\lambda>\omega.$$

具体计算有

$$\begin{aligned}\|(f,g)\|_X^2=&\|f\|_{L_2}^2+\|f_x\|_{L_2}^2+\|g\|_{L_2}^2\\ =&\langle\lambda u-v,\lambda\overline{u}-\overline{v}\rangle+\langle\lambda u_x-v_x,\lambda\overline{u}_x-\overline{v}_x\rangle+\langle\lambda v-u_{xx},\lambda\overline{v}-\overline{u}_{xx}\rangle\\ =&\lambda^2\|u\|_{L_2}^2+\lambda^2\|v\|_{L_2}^2+\lambda^2\|u_x\|_{L_2}^2+\|v\|_{L_2}^2+\|v_x\|_{L_2}^2+\|u_{xx}\|_{L_2}^2\\ &-\lambda\int_R(u\overline{v}+\overline{u}v)\mathrm{d}x-\lambda\int_R(u_x\overline{v}_x+\overline{u}_xv_x)\mathrm{d}x-\lambda\int_R(v\overline{u}_{xx}+\overline{v}u_{xx})\mathrm{d}x\\ =&\lambda^2(\|u\|_{H^1}^2+\|v\|_{L_2}^2)+\|v\|_{L_2}^2+\|v_x\|_{L_2}^2+\|u_{xx}\|_{L_2}^2-\lambda\int_R(u\overline{v}+\overline{u}v)\mathrm{d}x\\ \geqslant&(\lambda-1)^2(\|u\|_{H^1}^2+\|v\|_{L_2}^2)+(2\lambda-1)(\|u\|_{L_2}^2+\|v\|_{L_2}^2)-2\lambda\|u\|_{L_2}\|v\|_{L_2}\\ \geqslant&(\lambda-1)^2(\|u\|_{H^1}^2+\|v\|_{L_2}^2),\qquad \text{当 }\lambda>1.\end{aligned}$$

于是

$$\|(u,v)\|_X \leqslant \frac{\|(f,\ g)\|_X}{\lambda-1}, \quad 当\ \lambda>1, \quad \forall (f,g)\in X.$$

即有

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|_{X\to X} \leqslant \frac{1}{\lambda-1}, \quad 当\ \lambda>1,$$

由定理 8.2.6, A 在 X 上生成 C_0 半群, 且 $\|T(t)\|\leqslant e^t$.

现在考虑初值问题 (3.11), 即

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \vec{F}(u,v), \quad 其中\ \vec{F}(u,v)=\begin{pmatrix} 0 \\ h(u) \end{pmatrix}.$$

由 $h\in C^1(\mathbb{R})$,$h(0)=0$ 及 $H^1(\mathbb{R})\hookrightarrow L_\infty(\mathbb{R})$, 易见当 $u\in H^1(\mathbb{R})$ 时, $h(u)\in L_2(\mathbb{R})$.

下面验证 $\vec{F}(u,v)$ 在 X 上满足局部 Lipschitz 条件: 对 $\forall(u_1,v_1)$, $(u_2,v_2)\in X=H^1(\mathbb{R})\times L_2(\mathbb{R})$, 有

$$\begin{aligned}
\|\vec{F}(u_1,v_1)-\vec{F}(u_2,v_2)\|_X &= \|h(u_1)-h(u_2)\|_{L_2} \\
&= \left\|\int_0^1 h_u(u_2+t(u_1-u_2))\mathrm{d}t\ (u_1-u_2)\right\|_{L_2} \\
&\leqslant \int_0^1 \|h_u(u_2+t(u_1-u_2))\|_{L_\infty}\mathrm{d}t\ \|u_1-u_2\|_{L_2} \\
&\leqslant K(\|u_1\|_{L_\infty},\|u_2\|_{L_\infty})\|u_1-u_2\|_{L_2} \\
&\leqslant K(\|u_1\|_{H^1},\|u_2\|_{H^1})\|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|_X.
\end{aligned}$$

由定理 8.3.6 对任意 $(u_0,v_0)\in H^1(\mathbb{R})\times L_2(\mathbb{R})$, 初值问题 (3.11) 存在唯一饱和适度解 $(u(t),\ u_t(t))\in C([0,T_{\max}),H^1(\mathbb{R})\times L_2(\mathbb{R}))$, 于是定理 8.3.8 的结论 (1) 得证.

对 $Y=D(A)=H^2(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})$, 若假设 $h\in C^2(\mathbb{R}),h(0)=0$, 易验证 $\vec{F}(u,v)$ 在 Y 上满足局部 Lipschitz 条件. 于是由定理 8.3.7, 对任意 $(u_0,v_0)\in H^2(\mathbb{R})\times H^1(R)$, 初值问题 (3.11) 存在唯一饱和古典解 $(u(t),u_t(t))\in C([0,T_{\max}),H^2(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R}))\cap C^1([0,T_{\max}),H^1(\mathbb{R})\times L_2(\mathbb{R}))$, 于是定理 8.3.8 的结论 (2) 得证.

注 3.3 对高维空间 $(\mathbb{R}^n, n\geqslant 2)$ 中的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{tt}=\Delta u+h(u), & x\in\mathbb{R}^n, \quad t>0, \\ u\,|_{t=0}=u_0, & x\in\mathbb{R}^n, \\ u_t\,|_{t=0}=v_0, & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.16}$$

定义 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$, 取 $X=H^1(\mathbb{R}^n)\times L_2(\mathbb{R}^n)$. 类似一维情形可证 A 在 X 上生

成 C_0 半群, 且

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{X\to X} \leqslant \frac{1}{\lambda - 1}, \quad 当\lambda > 1.$$

当 $n \geqslant 2$ 时, 若 $h \in C^1(\mathbb{R})$, $h(0) = 0$, 由于 $H^1(\mathrm{R}^n) \not\hookrightarrow L_\infty(\mathbb{R}^n)$, 对应的 $\vec{F}(u,v)$ 在 X 上一般不满足局部 Lipschitz 条件. 但对 $n = 2,3$ 时, 若 $h \in C^2$, 取 $(u_0,v_0) \in D(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathrm{R}^n)$, 利用 $H^2(\mathbb{R}^n)) \hookrightarrow L_\infty(\mathbb{R}^n)$, 易验证 $\vec{F}(u,v)$ 在 $Y = D(A)$ 上满足局部 Lipschitz 条件. 于是对任意 $(u_0,v_0) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$, 初值问题 (3.16) 存在唯一饱和古典解 $u(t) \in C([0,T_{\max}),H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^2([0,T_{\max}),L_2(\mathbb{R}^n))$.

8.4 解析半群与扇形算子

8.4.1 解析半群与初值问题的解

若 $T(t)$ 是 X 上的 C_0 半群, 并以 A 为无穷小生成元, 那么只能保证对任意 $x \in D(A)$, 问题 (1.1) 有古典解 $u(t;x) = T(t)x$. 为了确保对任意 $x \in X$, 问题 (1.1) 都有古典解, 考察可微半群与解析半群.

定义 8.4.1 设 $T(t)$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群. 若对任意 $x \in X$, 抽象函数 $T(t)x$ 关于 $t > 0$ 可微, 则称 $T(t)$ 是可微半群.

定义 8.4.2 X 上的一族有界线性算子 $T(t)$, 若满足:

(1) 对任意 $x \in X$, 抽象函数 $T(t)x$ 在 $0 < t < \infty$ 上是实解析的;

(2) $T(0) = I$, 且对任意 $x \in X$, 有 $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x$;

(3) 对任意 $t,s \geqslant 0$, 有 $T(t+s) = T(t)T(s)$.

则称 $T(t)$ 是实解析半群.

定义 8.4.3 设 $\Delta = \{z : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$. 有界线性算子族 $\{T(z)\}_{z\in\Delta}$ 称为解析半群, 若

(1) $T(z)$ 在 Δ 内解析;

(2) $T(0) = I$ 是恒同算子, 且对任意 $x \in X$, 有 $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in\Delta}} T(z)x = x$;

(3) 对任意 $z_1, z_2 \in \Delta$, 有 $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_1)$.

定理 8.4.4 设 $T(t)$ 是 X 上的可微半群, 以 A 为无穷小生成元, 则对任意 $x \in X$, 问题 (1.1) 有唯一古典解 $u(t;x) = T(t)x$.

证明 因为 $T(t)$ 可微, 所以对任意 $t > 0, x \in X$, 极限 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{T(t+h)x - T(t)x}{h}$ 存在. 因此 $T(t)x \in D(A)$, 且

$$\frac{\mathrm{d}T(t)x}{\mathrm{d}t} = AT(t)x.$$

对任意 $t>0$, 取 $0<s<t$, 那么

$$AT(t)x = AT(t-s)T(s)x = T(t-s)AT(s)x.$$

由此知 $\dfrac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}$ 连续.因此, $u(t;x)=T(t)x$ 是问题 (1.1) 的解. 类似于定理 8.1.11 可证唯一性. 证毕.

推论 8.4.5 若 A 是解析半群的无穷小生成元, 则对任意 $x\in X$, 问题 (1.1) 有唯一古典解.

8.4.2 可微半群与解析半群的性质

定理 8.4.6 设 $T(t)$ 是可微半群, B 是它的无穷小生成元. 那么下面的结论成立:

(1) $T(t):X\to D(B^n), \forall t>0, n=1,2,3,\cdots$, 并且对任意 $x\in X$, $T(t)x$ 关于 $t>0$ 无穷次可微, $T^{(n)}(t)=B^nT(t)$ 是有界线性算子;

(2) 对任意自然数 $n, T^{(n-1)}(t)$ 按算子范数关于 $t>0$ 连续;

(3) 对任意自然数 n, 成立 $T^{(n)}(t)=(BT(t/n))^n=(T'(t/n))^n$.

证明 当 $n=1$ 时, 由假设知, 对任意 $t>0, x\in X$, 有 $T(t)x\in D(B)$, 且 $T'(t)x=BT(t)x$. 因为 B 是闭的, $T(t)$ 有界, 所以对任意 $t>0, BT(t)$ 是闭的. 再由闭图像定理知, $BT(t)$ 是有界线性算子.

下面估计 $\|T(t_2)x-T(t_1)x\|$. 设当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时 $\|T(t)\|\leqslant M$. 对任意 $t_1,t_2: 0<t_1\leqslant t_2\leqslant t_1+1$, 有

$$\begin{aligned}\|T(t_2)x-T(t_1)x\| &= \left\|\int_{t_1}^{t_2} BT(s)x\mathrm{d}s\right\|\\ &= \left\|\int_{t_1}^{t_2} T(s-t_1)BT(t_1)x\mathrm{d}s\right\|\\ &\leqslant M\|BT(t_1)\|(t_2-t_1)\|x\|,\end{aligned}$$

即

$$\|T(t_2)-T(t_1)\|\leqslant M\|BT(t_1)\|(t_2-t_1).$$

所以 $T(t)$ 按算子范数关于 $t>0$ 连续. 因此, 当 $n=1$ 时结论 (1) – (3) 成立.

现设对自然数 n, 结论 (1) – (3) 成立, 则对任意 $t>0, x\in X$, 取 $0<s<t$. 因为 $T(t):X\to D(B^n), T^{(n)}(t)x=B^nT(t)x$, 所以

$$T^{(n)}(t)x = B^nT(t-s)T(s)x = T(t-s)B^nT(s)x.$$

于是 $T^{(n)}(t)x\in D(B)$, 即 $T(t)x\in D(B^{n+1})$ 且

$$T^{(n+1)}(t)x = BT(t-s)B^nT(s)x = B^{n+1}T(t)x.$$

显然, $B^{n+1}T(t) = B(B^nT(t))$ 是有界线性算子.

又因为

$$\begin{aligned}\|T^{(n)}(t_2)x - T^{(n)}(t_1)x\| &= \left\|\int_{t_1}^{t_2} B^{n+1}T(s)x\mathrm{d}s\right\| \\ &= \left\|\int_{t_1}^{t_2} T(s-t_1)B^{n+1}T(t_1)x\mathrm{d}s\right\| \\ &\leqslant MM_1(t_2-t_1)\|x\|,\end{aligned}$$

其中 $\|B^{n+1}T(t_1)\| \leqslant M_1$, 所以 $T^{(n)}(t)$ 按算子范数关于 $t>0$ 连续.

最后由

$$\begin{aligned}T^{(n)}(t) &= \left(BT\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(BT\left(\frac{t-s}{n}\right)T\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n \\ &= \left(T\left(\frac{t-s}{n}\right)BT\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n = T(t-s)\left(BT\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n, \quad 0<s\leqslant t,\end{aligned}$$

得

$$T^{(n+1)}(t) = BT(t-s)\left(BT\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n.$$

令 $s = \dfrac{n}{n+1}t$, 又得

$$T^{(n+1)}(t) = BT\left(\frac{t}{n+1}\right)\left(BT\left(\frac{t}{n+1}\right)\right)^n = \left(BT\left(\frac{t}{n+1}\right)\right)^{n+1}.$$

因此, 对自然数 $n+1$, 结论 (1) – (3) 也成立. 证毕.

下面考察解析半群.

定理 8.4.7 设 $T(z)$ 在扇形 $\Delta_{\delta_1} = \{z : |\arg z| < \delta_1\}$ 上是解析半群且一致有界 (即存在常数 $M_1>0$, 对任意 $z\in\Delta_{\delta_1}$ 有 $\|T(z)\|\leqslant M_1$), B 是 $T(z)$ 的无穷小生成元. 那么

(1) 存在常数 $C>0$, 使得对任意 $\sigma>0, \tau\neq 0$, 有

$$\|R(\sigma+\mathrm{i}\tau, B)\| \leqslant C/|\tau|; \tag{4.1}$$

(2) 存在 $0<\delta<\pi/2$ 和 $M>0$, 使得

$$\rho(B) \supset \Sigma_\delta := \left\{\lambda : |\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi}{2}+\delta, \lambda\neq 0\right\},$$

$$\|R(\lambda, B)\| \leqslant M/|\lambda|, \quad \forall\lambda\in\Sigma_\delta. \tag{4.2}$$

证明 (1) 因为 $T(z)$ 关于实数 $z\geqslant 0$ 是一致有界的 C_0 半群 ($\|T(z)\|\leqslant M_1$), 于是对任意 $x\in X$ 和 $\sigma>0$, 有

$$R(\sigma+\mathrm{i}\tau, B)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}\tau)t}T(t)x\mathrm{d}t.$$

根据 $T(z)$ 的解析性和一致有界性, 当 $\tau>0$ 时可以把积分路径从正实轴移到射线 $\{z=\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta'}:0<\rho<\infty\}$, 当 $\tau<0$ 时可以把积分路径移到射线 $\{z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta'}:0<\rho<\infty\}$, 其中 $0<\delta'<\delta$, 并且积分值保持不变. 当 $\tau>0$ 时,

$$\begin{aligned}\|R(\sigma+\mathrm{i}\tau,B)x\| &\leqslant \int_0^\infty |\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}\tau)\rho(\cos\delta'-\mathrm{i}\sin\delta')}|\cdot M_1\|x\|\mathrm{d}\rho\\ &\leqslant \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho(\sigma\cos\delta'+\tau\sin\delta')}M_1\|x\|\mathrm{d}\rho\\ &\leqslant \frac{M_1\|x\|}{\sigma\cos\delta'+\tau\sin\delta'},\end{aligned}$$

所以

$$\|R(\sigma+\mathrm{i}\tau,B)\|\leqslant C/\tau.$$

当 $\tau<0$ 时, 类似可证.

(2) 因为 B 是一致有界的 C_0 半群的无穷小生成元, 所以对 $\mathrm{Re}\,\lambda>0$, 有 $\|R(\lambda,B)\|\leqslant M_1/\mathrm{Re}\,\lambda$. 又由 (1) 知, 当 $\mathrm{Re}\,\lambda>0, \mathrm{Im}\,\lambda\neq 0$ 时, $\|R(\lambda,B)\|\leqslant C/|\mathrm{Im}\lambda|$. 因此, 存在常数 $M_2>0$, 使得

$$\|R(\lambda,B)\|\leqslant M_2/|\lambda|,\quad \mathrm{Re}\,\lambda>0.$$

对任意 $\sigma>0$, 有 $R(\lambda,B)$ 在 $\lambda=\sigma+\mathrm{i}\tau$ 处的 Taylor 展式:

$$\begin{aligned}R(\lambda,B)&=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^mR(\lambda,B)}{\mathrm{d}\lambda^m}\Big|_{\lambda=\sigma+\mathrm{i}\tau}(\lambda-\sigma-\mathrm{i}\tau)^n\\ &=\sum_{n=0}^\infty R(\sigma+\mathrm{i}\tau,B)^{n+1}(\sigma+\mathrm{i}\tau-\lambda)^n,\end{aligned}\tag{4.3}$$

当 $\|R(\sigma+\mathrm{i}\tau,B)\|\cdot|\sigma+\mathrm{i}\tau-\lambda|\leqslant K<1$ 时此级数收敛. 取 $\lambda=\mathrm{Re}\,\lambda+\mathrm{i}\tau$, 由 (4.1) 式得

$$\|R(\sigma+\mathrm{i}\tau,B)\|\cdot|\sigma+\mathrm{i}\tau-\lambda|=\|R(\sigma+\mathrm{i}\tau,B)\|\cdot|\sigma-\mathrm{Re}\,\lambda|\leqslant\frac{C}{|\tau|}|\sigma-\mathrm{Re}\,\lambda|.$$

于是当 $|\sigma-\mathrm{Re}\,\lambda|\leqslant K|\tau|/C$ 时, 级数 (4.3) 收敛. 由于 $\sigma>0,\tau\neq 0$ 和 $K<1$ 是任意的, 这就意味着

$$\rho(B)\supset\{\lambda:\mathrm{Re}\,\lambda\leqslant 0, |\mathrm{Re}\,\lambda|/|\mathrm{Im}\lambda|<1/C\}.$$

特别有

$$\rho(B)\supset\{\lambda:|\mathrm{arg}\lambda|\leqslant\delta+\pi/2,\lambda\neq 0\},$$

其中 $\delta = K\text{arctg}\dfrac{1}{C}, 0 < K < 1$. 在这个区域上有

$$\|R(\lambda, B)\| \leqslant \frac{1}{1-K}\frac{C}{|\tau|} \leqslant \frac{\sqrt{C^2+1}}{1-K}\frac{1}{|\lambda|} = \frac{M}{|\lambda|}.$$

证毕.

对于实解析半群 $T(t)$, 也可证明

定理 8.4.8 设 $T(t)$ 是一致有界 (实) 解析半群, 以 B 为无穷小生成元, 则存在 $0 < \delta < \pi/2$ 和 $M > 0$, 使得

$$\rho(B) \supset \Sigma_\delta = \{\lambda : |\arg\lambda| \leqslant \delta + \pi/2, \lambda \neq 0\},$$

$$\|R(\lambda, B)\| \leqslant M/|\lambda|, \quad \lambda \in \Sigma_\delta.$$

证明略, 可参见 [Paz].

对于一般 (实) 解析半群 $T(t)$, 它也是 C_0 半群, 于是存在正数 M_1 和实数 a, 使得

$$\|T(t)\| \leqslant M_1 \mathrm{e}^{-at}.$$

注意到:

(1) $T(t)$ 以 B 为无穷小生成元当且仅当 $S(t) = \mathrm{e}^{at}T(t)$ 以 $B + aI$ 为无穷小生成元;

(2) $\lambda \in \rho(B)$ 当且仅当 $\lambda + a \in \rho(B + aI)$.

立即可得

定理 8.4.9 设 $T(t)$ 是 (实) 解析半群, $\|T(t)\| \leqslant M_1\mathrm{e}^{-at}$, 以 B 为无穷小生成元, 则存在 $0 \leqslant \varphi < \pi/2$ 和 $M > 0$, 使得

$$\rho(B) \supset \Sigma'_\varphi = \{\lambda : |\arg(\lambda + a)| \leqslant \pi/2 + \varphi, \lambda + a \neq 0\},$$
$$\|R(\lambda, B)\| \leqslant M/|\lambda + a|, \quad \lambda \in \Sigma'_\varphi.$$

推论 8.4.10 在定理 8.4.9 中, 若 $B = -A$, 则

$$\rho(A) \supset S_{a,\varphi} = \{\lambda : \varphi \leqslant |\arg(\lambda - a)| \leqslant \pi, \lambda \neq a\},$$
$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant M/|\lambda - a|, \quad \lambda \in S_{a,\varphi}.$$

8.4.3 扇形算子

我们已证明, 线性算子 $-A$ 是某个解析半群的无穷小生成元时它一定满足如下条件:

(1) A 是 Banach 空间 X 中的闭稠定线性算子;

(2) 在复平面 $\mathbb{C}$ 上存在某扇形

$$S_{a,\varphi}=\{\lambda:\lambda\in\mathbb{C},\varphi\leqslant|\arg(\lambda-a)|\leqslant\pi,\lambda\neq a\}\subset\rho(A),$$

其中 $\varphi\in(0,\pi/2)$ 为某常数, a 为某实数 (图 8.4.1);

(3) 存在常数 $M\geqslant 1$ 使得 $\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant M/|\lambda-a|,\lambda\in S_{a,\varphi}$.

而更为重要的问题是, 算子 A 满足什么条件时, $-A$ 一定是某解析半群的无穷小生成元. 为讨论这个问题, 首先要研究满足上述条件的一类算子.

定义 8.4.11　设 Banach 空间 X 中的线性算子 A 满足如上条件 (1), (2), (3), 则称 A 为扇形算子, $S_{a,\varphi}$ 为相应的扇形.

扇形 $S_{a,\varphi}$ 的张角是 $2\pi-2\varphi>\pi$. 因为 A 是闭的, 当 $\lambda\in\rho(A)$ 时必有 $R(\lambda I-A)=X$, 即 $D((\lambda I-A)^{-1})=X$.

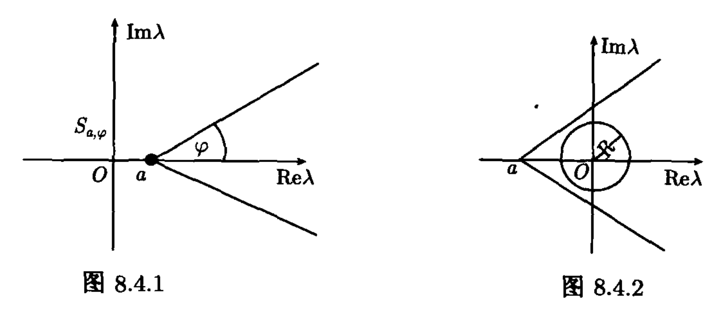


图 8.4.1　　图 8.4.2

下面给出扇形算子的两个简单判别法.

引理 8.4.12　设 A 是 Banach 空间 X 上的闭稠定线性算子, 满足: 存在常数 $R_0>1,\varphi_0\in(0,\pi/2)$, 使得当 $|\lambda|>R_0$, $|\arg\lambda|\geqslant\varphi_0$ 时, $(\lambda I-A)^{-1}$ 存在, 定义域是 X, 且

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant M_1/|\lambda|,$$

其中 M_1 为某正常数. 则 A 是扇形算子.

证明　取适当大的 $R>R_0$, 以原点为心、以 R 为半径作球 $|\lambda|=R$, 再在负实轴上取一定点 a, 并作扇形 $S_{a,\varphi}$ (图 8.4.2), 使得当 $\lambda\in S_{a,\varphi}$ 时, 有 $|\lambda|>R$ 且 $|\arg\lambda|\geqslant\varphi_0$. 于是由假设条件知 $S_{a,\varphi}\subset\rho(A)$, 并且当 $\lambda\in S_{a,\varphi}$ 时,

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant\frac{M_1}{|\lambda-a|}\cdot\frac{|\lambda-a|}{|\lambda|}\leqslant\frac{M}{|\lambda-a|}.$$

因此 A 是扇形算子. 证毕.

定理 8.4.13　设 A 是 Banach 空间 X 上的闭稠定线性算子, 满足: 存在常数 $\omega\in\mathbb{R}$ 及 $M>0$, 使得 $\{\lambda:\lambda\in\mathbb{C},\mathrm{Re}\,\lambda\leqslant\omega,\lambda\neq\omega\}\subset\rho(A)$, 且

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{|\lambda - \omega|}, \quad 当 \operatorname{Re}\lambda \leqslant \omega, \quad \lambda \neq \omega, \tag{4.4}$$

则 A 是扇形算子.

证明 由 (4.4) 只需证存在一扇形 $S_{\omega,\phi}$, $0 < \phi < \pi/2$, 使得 $S_{\omega,\phi} \subset \rho(A)$, 且存在 $M_1 > 0$ 使得

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{M_1}{|\lambda - \omega|}, \quad \forall \lambda \in S_{\omega,\phi} \cap \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \omega\}.$$

设 $\lambda_0 \in \rho(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, 对任意 $y \in X$, 显然方程 $\lambda x - Ax = y$ 等价于

$$[I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}]x = (\lambda_0 I - A)^{-1}y. \tag{4.5}$$

记 $R(\lambda_0, A) = (\lambda_0 I - A)^{-1}$, 易证当 λ 满足 $|\lambda - \lambda_0|\|R(\lambda_0, A)\| < 1$ 时, $[I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, A)]^{-1}$ 存在, 且

$$[I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, A)]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda - \lambda_0)^n R^n(\lambda_0, A). \tag{4.6}$$

由 (4.5) 式及 (4.6) 式, 显然有

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0, A)\|^{-1}\} \subset \rho(A), \tag{4.7}$$

且

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}|\lambda - \lambda_0|^n \|R(\lambda_0, A)\|^{n+1}, \quad 当 |\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0, A)\|^{-1}. \tag{4.8}$$

由 (4.4) 式及 (4.7) 式知, 对每一实 $r \neq 0$, 以 $\omega + \mathrm{i}r$ 为心、以 $|r|/M$ 为半径的开球均包含在 $\rho(A)$ 中, 易见集合 $\{\operatorname{Re}\lambda \leqslant \omega, \lambda \neq \omega\}$ 与这些开球的并集包含下面的扇形

$$S_{\omega,\phi} = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \phi \leqslant |\arg(\lambda - \omega)| \leqslant \pi, \phi = \arctan(2M), \lambda \neq \omega\}.$$

对任意 $\lambda \in S_{\omega,\phi} \cap \{\operatorname{Re}\lambda > \omega\}$, 存在 $r \neq 0$, $0 < \theta \leqslant 1$, 使得 $\lambda = \omega + \mathrm{i}r + \dfrac{\theta|r|}{2M}$. 进而取 $\lambda_0 = \omega + \mathrm{i}r$, 由 (4.4) 式及 (4.8) 式有

$$\begin{aligned}\|(\lambda I - A)^{-1}\| &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}|\lambda - \lambda_0|^n \frac{M^{n+1}}{|\lambda_0 - \omega|^{n+1}} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|r|^n}{(2M)^n}\frac{M^{n+1}}{r^{n+1}} \\ &\leqslant \frac{2M}{|r|} \leqslant \frac{2M(1 + 1/(4M^2))}{|\lambda - \omega|}, \quad \forall \lambda \in S_{\omega,\phi} \cap \{\operatorname{Re}\lambda > \omega\}.\end{aligned}$$

证毕.

显然引理 8.4.12, 定理 8.4.13 关于 A 的假设也可作为扇形算子的等价定义.

下面举几个扇形算子的例子.

例 1 若 A 是 Banach 空间 X 中的有界线性算子, 则 A 是扇形算子.

证明　$\lambda I - A = \lambda\left(I - \dfrac{A}{\lambda}\right)$, 当 $|\lambda| > \|A\|$ 时 $(\lambda I - A)^{-1}$ 存在, 且 $D((\lambda I - A)^{-1}) = X$, 当 $\|A\|/|\lambda| \leqslant \alpha_0 < 1$ 时,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| = \left\|\lambda^{-1}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \times \frac{1}{1-\alpha_0}.$$

因此, A 是扇形算子.

例 2　若 A 是 Hilbert 空间上的自共轭稠定算子且有下界, 即存在实数 μ 使得

$$(Ax, x) \geqslant \mu\|x\|^2,$$

则 A 是扇形算子.

证明　易证所有非实数均属于 $\rho(A)$, 且实数 $\lambda < \mu$ 时也属于 $\rho(A)$, 故 $\{\mathrm{Re}\,\lambda \leqslant \mu, \lambda \neq \mu\} \subset \rho(A)$. 由定理 8.4.13, 只需证明存在 $M > 0$ 使得

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{|\lambda - \mu|}, \quad \forall x \in X, \quad \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant \mu, \quad \lambda \neq \mu. \tag{4.9}$$

因为

$$((\lambda I - A)x, x) = \lambda(x, x) - (Ax, x) = (\lambda - \mu)\|x\|^2 + \mu\|x\|^2 - (Ax, x), \quad \forall x \in X,$$

$$\|(\lambda I - A)x\| \cdot \|x\| \geqslant |\lambda - \mu| \cdot \|x\|^2, \quad \forall x \in X, \quad \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant \mu, \quad \lambda \neq \mu,$$

故

$$\|(\lambda I - A)^{-1}y\| \leqslant \frac{1}{|\lambda - \mu|}\|y\|, \quad \forall y \in X, \quad \text{当 } \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant \mu, \lambda \neq \mu.$$

于是

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|\lambda - \mu|}, \quad \text{当 } \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant \mu, \lambda \neq \mu.$$

由定理 8.4.13, A 为扇形算子.

例 3　设 A 是 X 中的扇形算子, B 是 Y 中的扇形算子, 定义

$$(A \times B)\{x, y\} = \{Ax, By\}, \quad x \in D(A), \quad y \in D(B),$$

则 $A \times B$ 是 $X \times Y$ 中的扇形算子.

证明　按照定义, 有

$$\lambda\{x, y\} - (A \times B)\{x, y\} = \{(\lambda I - A)x, (\lambda I - B)y\}.$$

显然可取共同的扇形 $S_{a,\varphi}$, 使得

$$\rho(A) \supset S_{a,\varphi}, \quad \rho(B) \supset S_{a,\varphi}.$$

于是 $\rho(A \times B) \supset S_{a,\varphi}$. 又

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\| \leqslant M/|\lambda-a|, \quad \|(\lambda I-B)^{-1}\| \leqslant M/|\lambda-a|,$$

所以

$$\|(\lambda I-A\times B)^{-1}\| = \|(\lambda-A)^{-1}\|+\|(\lambda I-B)^{-1}\| \leqslant 2M/|\lambda-a|.$$

因此, $A\times B$ 是 $X\times Y$ 中的扇形算子.

最后给出扇形算子的一些性质.

引理 8.4.14 设 A 是扇形算子, 则存在 $\varphi_0\in(0,\pi/2)$ 及正常数 R_0, M_0, C, 使得当 $|\arg\lambda|\geqslant\varphi_0, |\lambda|\geqslant R_0$ 时,

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\| \leqslant M_0/|\lambda|, \quad \|A(\lambda I-A)^{-1}\| \leqslant C.$$

引理 8.4.14 的证明留作练习.

定理 8.4.15 设 A 是扇形算子, B 是线性算子满足 $D(B)\supset D(A)$, 且对任意 $x\in D(A)$ 有

$$\|Bx\| \leqslant \varepsilon\|Ax\|+K\|x\|,$$

其中 ε, K 为正常数, $\varepsilon C<1, C$ 由引理 8.4.14 给出, 则 $A+B$ 是扇形算子.

证明 由引理 8.4.14, 存在 $R_0>0, \varphi_0\in(0,\pi/2)$ 使得 A 满足引理 8.4.14 中的估计. 当 $|\lambda|\geqslant R_0$, $|\arg\lambda|\geqslant\varphi_0$ 时, 将 $\lambda I-(A+B)$ 改写成

$$\lambda I-(A+B) = [I-B(\lambda I-A)^{-1}](\lambda I-A).$$

先估计 $\|B(\lambda I-A)^{-1}\|$. 对任意 $x\in X$, 由于

$$\|B(\lambda I-A)^{-1}x\| \leqslant \varepsilon\|A(\lambda I-A)^{-1}x\|+K\|(\lambda I-A)^{-1}x\| \leqslant \varepsilon C\|x\|+\frac{KM_0}{|\lambda|}\|x\|,$$

故存在 $R\geqslant R_0$, 使得当 $|\arg\lambda|\geqslant\varphi_0, |\lambda|\geqslant R$ 时, 有

$$\|B(\lambda I-A)^{-1}\| \leqslant \varepsilon C+\frac{KM_0}{|\lambda|}<1.$$

因此, 当 $|\arg\lambda|\geqslant\varphi_0, |\lambda|\geqslant R$ 时, $[I-B(\lambda I-A)^{-1}]^{-1}$ 是 $X\to X$ 的有界线性算子, 并且

$$\|[I-B(\lambda I-A)^{-1}]^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|B(\lambda I-A)^{-1}\|}.$$

再利用

$$[\lambda I-(A+B)]^{-1} = (\lambda I-A)^{-1}[I-B(\lambda I-A)^{-1}]^{-1}$$

可推得, $[\lambda I-(A+B)]^{-1}$ 定义于 X, 且当 $|\arg\lambda|\geqslant\varphi_0, |\lambda|\geqslant R$ 时, 有

$$\begin{aligned}\|[\lambda I-(A+B)]^{-1}\| &\leqslant \|(\lambda I-A)^{-1}\|\times\|[I-B(\lambda I-A)^{-1}]^{-1}\| \\ &\leqslant \frac{M_0}{|\lambda|}\frac{1}{1-\|B(\lambda I-A)^{-1}\|} \leqslant \frac{M}{|\lambda|}.\end{aligned}$$

易证 $A+B$ 是闭稠定的. 因此, 由引理 8.4.12 知, $A+B$ 也是扇形算子. 证毕.

推论 8.4.16 若 A 是扇形算子, B 是有界线性算子, $D(B)\supset D(A)$, 则 $A+B$ 是扇形算子.

推论 8.4.17 若 A 是扇形算子, 则 $\lambda I+A$ 是扇形算子.

8.4.4 由扇形算子确定解析半群

本节将证明扇形算子 A 能确定一解析半群 $T(t)$, 使得 $-A$ 是它的无穷小生成元. 由此可得, 对任意 $x\in X$, 初值问题 (1.1) 存在唯一古典解.

如果 $T(t)$ 是解析半群并以 $-A$ 为无穷小生成元, 则有

$$R(\lambda,-A)x:=(\lambda I+A)^{-1}x=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t,\quad \forall\lambda\in\rho(-A).$$

反过来, 讨论是否可由此式确定解析半群 $T(t)$, 即求它的逆变换. 为此, 引进

$$\mathrm{e}^{-tA}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_\Gamma(\lambda I+A)^{-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}\lambda, & t>0,\\ I, & t=0,\end{cases}\tag{4.10}$$

其中 Γ 是 $\rho(-A)$ 中的积分路径, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. 下面证明 (4.10) 确定 X 上一解析半群, 并以 $-A$ 为无穷小生成元.

定理 8.4.18 设 A 是扇形算子, 相应的扇形为 $S_{a,\varphi},\Gamma$ 是 $\rho(-A)$ 中的一条路径, 满足: 存在 $\theta\in(\pi/2,\pi)$, 使得当 $\lambda\in\Gamma$ 且 $|\lambda|\to\infty$ 时, 有 $\arg\lambda\to\pm\theta$. 又设 e^{-tA} 由 (4.10) 式定义, 则

(1) 对任意 $t>0,\mathrm{e}^{-tA}$ 收敛, 是 X 上的有界线性算子族, 且积分与具有所述性质的积分路径 Γ 的选取无关;

(2) 存在常数 $C>0$, 使得对任意 $t>0$, 有

$$\|\mathrm{e}^{-tA}\|\leqslant C\mathrm{e}^{-at},\quad \|A\mathrm{e}^{-tA}\|\leqslant\frac{C}{t}\mathrm{e}^{-at};$$

(3) e^{-tA} 是解析半群, 以 $-A$ 为无穷小生成元, 并且 e^{-tA} 可以解析地开拓到一个包括正实轴在内的扇形 $\{z:|\arg z|<\varepsilon,z\neq0\}$ 中;

(4) 对 $t>0$ 和 $x\in X$, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-tA}=-A\mathrm{e}^{-tA},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-tA}x=-A\mathrm{e}^{-tA}x.$$

为证此定理, 先叙述一个引理.

引理 8.4.19 设 $B=A-aI$, 则

(1)

$$\rho(A)\supset S_{a,\varphi},\quad \|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant M/|\lambda-a|,\quad \forall\lambda\in S_{a,\varphi}$$

等价于

$$\rho(B) \supset S_{0,\varphi}, \quad \|(\lambda I - B)^{-1}\| \leqslant M/|\lambda|, \quad \forall \lambda \in S_{0,\varphi}.$$

(2) 若 e^{-tA} 或 e^{-tB} 收敛, 则另一个也收敛, 并且

$$\mathrm{e}^{-tA} = \mathrm{e}^{-tB}\mathrm{e}^{-at}.$$

证明留给读者.

现在证明定理 8.4.18. 由引理 8.4.19 知, 只需对 $a=0$ 来证明定理 8.4.18. 而当 $a=0$ 时积分路径如图 8.4.3 所示.

先证明定理 8.4.18 的 (1). 注意到当 $t>0, r_0>0, \theta \in (\pi/2, \pi)$ 时, 积分

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r}\mathrm{e}^{tr\cos\theta}\mathrm{d}r \quad 和 \quad \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r}\mathrm{e}^{tr\cos(-\theta)}\mathrm{d}r$$

都收敛, 由此易证对任意给定的满足定理所述性质的积分路径 Γ, 当 $t>0$ 时积分 $\displaystyle\int_{\Gamma}(\lambda I + A)^{-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}\lambda$ 绝对收敛, 且确定了一族有界线性算子. 显然, 它的值域属于 $D(A)$.

设 l 是位于两条积分路径 Γ_1 和 Γ_2 之间, 且以原点为心、以 R 为半径的圆弧段. 分别记 Γ_1 和 Γ_2 对应的 θ 为 θ_1 和 θ_2. 不妨认为 $\theta_1 \leqslant \theta_2$. 那么, 对任意 $t>0$, 当 $R \to \infty$ 时,

$$\left\|\int_{l}(\lambda I+A)^{-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}\lambda\right\| \leqslant \frac{M_1}{R}\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_2+\varepsilon} \mathrm{e}^{tR\cos\theta}R\sin\theta\mathrm{d}\theta \leqslant M_1\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_2+\varepsilon} \mathrm{e}^{tR\cos\theta'}\sin\theta\mathrm{d}\theta \to 0,$$

其中 $\varepsilon>0$ 适当小使得 $\pi/2 < \theta_1 - \varepsilon < \theta_2 + \varepsilon < \pi$, $\theta' = \theta_1 - \varepsilon$ 满足 $\cos\theta' < 0$. 再由被积函数的解析性知, 积分 (4.9) 与 Γ 的选择无关.

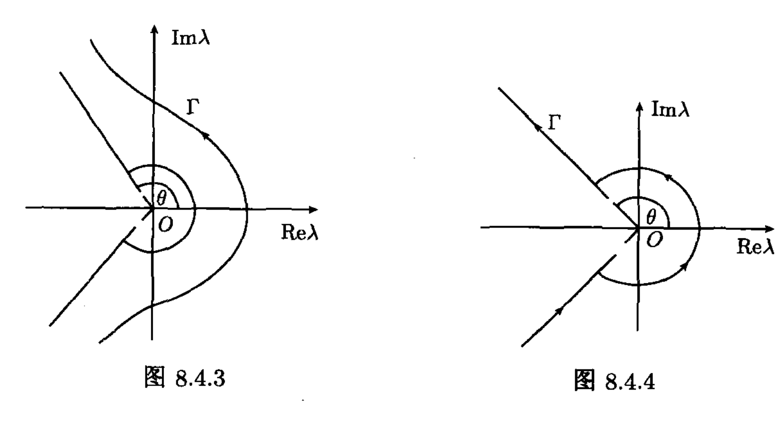


图 8.4.3　　图 8.4.4

再证明定理 8.4.18 的 (2). 当 $t>0$ 时, 在 e^{-tA} 的积分中先取

$$\Gamma=\{(r,\theta):r\geqslant t^{-1},\theta=\pm\theta_0\}\bigcup\{(r,\theta):r=t^{-1},-\theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_0\},$$

如图 8.4.4, 其中 $\pi/2<\theta_0<\pi$ 固定, 再令 $\mu=\lambda t$, 相应地 Γ 变成 Γ'. 仔细分析得

$$\|\mathrm{e}^{-tA}\|=\frac{1}{2\pi}\left\|\int_\Gamma \mathrm{e}^\mu\left(\frac{\mu}{t}I+A\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}\mu}{t}\right\|\leqslant\frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma'}|\mathrm{e}^\mu|\frac{|\mathrm{d}\mu|}{|\mu|}\leqslant C,$$

这里的正常数 C 与 t 无关. 注意到 $(\lambda I+A)(\lambda I+A)^{-1}=I$, 在积分中令 $\mu=\lambda t$ 得

$$\begin{aligned}
A\mathrm{e}^{-tA}&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma A(\lambda I+A)^{-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}\lambda\\
&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}\lambda-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\lambda(\lambda I+A)^{-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}\lambda,\\
\|A\mathrm{e}^{-tA}\|&\leqslant\frac{M_1}{t}\int_{\Gamma'}|\mathrm{e}^\mu||\mathrm{d}\mu|\leqslant\frac{C}{t}.
\end{aligned}$$

现在证明定理 8.4.18 的 (3) 与 (4). 这里仍然按照 (2) 的证明过程取积分路径 Γ. 先证半群性质. 利用预解式性质

$$(\lambda I+A)^{-1}(\mu I+A)^{-1}=(\mu-\lambda)^{-1}[(\lambda I+A)^{-1}-(\mu I+A)^{-1}],$$

并将积分路径 Γ 往右移得 Γ', 那么

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-tA}\mathrm{e}^{-sA}&=\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2\int_\Gamma\int_{\Gamma'}(\lambda I+A)^{-1}(\mu I+A)^{-1}\mathrm{e}^{\lambda t+\mu s}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda\\
&=\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2\int_\Gamma\int_{\Gamma'}[(\lambda I+A)^{-1}-(\mu I+A)^{-1}](\mu-\lambda)^{-1}\mathrm{e}^{\lambda t+\mu s}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda\\
&=\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2\int_\Gamma(\lambda I+A)^{-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\int_{\Gamma'}(\mu-\lambda)^{-1}\mathrm{e}^{\mu s}\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda\\
&\quad-\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2\int_{\Gamma'}(\mu I+A)^{-1}\mathrm{e}^{\mu s}\int_\Gamma(\mu-\lambda)^{-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

由留数定理知

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma'}(\mu-\lambda)^{-1}\mathrm{e}^{\mu s}\mathrm{d}\mu=\mathrm{e}^{\lambda s},\quad \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma(\mu-\lambda)^{-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}\lambda=0,$$

所以

$$\mathrm{e}^{-tA}\mathrm{e}^{-sA}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma(\lambda I+A)^{-1}\mathrm{e}^{\lambda(t+s)}\mathrm{d}\lambda=\mathrm{e}^{-(t+s)A}.$$

其次证明: 对任意 $x\in X$, 有 $\lim\limits_{t\to0^+}\mathrm{e}^{-tA}x=x$. 因为 $\|\mathrm{e}^{-tA}\|\leqslant C$, 且 $\overline{D(A)}=X$,

所以只要对任意 $x \in D(A)$ 来证明即可.

若 $x \in D(A), t > 0$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-tA}x - x &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \mathrm{e}^{\lambda t}[(\lambda I + A)^{-1} - \lambda^{-1}]x\mathrm{d}\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \lambda^{-1}\mathrm{e}^{\lambda t}(\lambda I + A)^{-1}Ax\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

令 $\lambda t = \mu$, 相应地 Γ 为 $\widetilde{\Gamma}$, 于是

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{-tA}x - x\| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\tilde\Gamma} \frac{|\mathrm{e}^\mu|}{|\mu|}\left(\frac{\mu}{t} + A\right)^{-1}\|Ax\| \cdot |\mathrm{d}\mu| \\ &\leqslant M_1 \int_{\tilde\Gamma} \frac{|\mathrm{e}^\mu|}{|\mu|^2}|\mathrm{d}\mu| \cdot \|Ax\|t \leqslant M\|Ax\|t.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{t\to 0^+} \mathrm{e}^{-tA}x = x, \quad x \in D(A).$$

再证明微分公式并证明 $-A$ 是生成元. 易知, $t > 0$ 时

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-tA} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma (\lambda I + A)^{-1}\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma (\lambda I + A)(\lambda I + A)^{-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}\lambda - A\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma (\lambda I + A)^{-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}\lambda - A\mathrm{e}^{-tA} = -A\mathrm{e}^{-tA}.\end{aligned}$$

同理可证 (4) 中的另一式. 又同理可证, 对任意 $x \in D(A), t > 0$, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-tA}x = -\mathrm{e}^{-tA}Ax,$$

$$\frac{1}{t}(\mathrm{e}^{-tA}x - x) = -\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{e}^{-sA}Ax\mathrm{d}s.$$

在上式中令 $t \to 0^+$, 得

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(\mathrm{e}^{-tA}x - x) = -Ax.$$

记 e^{-tA} 的生成元为 G, 上面的极限说明 $G \supset -A$. 再证反包含关系.

若 $x \in D(G)$, 则

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(\mathrm{e}^{-tA}x - x) = Gx.$$

对任意 $s > 0$, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-sA}Gx = G\mathrm{e}^{-sA}x &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-tA}\mathrm{e}^{-sA}x - \mathrm{e}^{-sA}x}{t} \\ &= -A\mathrm{e}^{-sA}x (\text{因为 } \mathrm{e}^{-sA}x \in D(A)).\end{aligned}$$

再利用

$$\lim_{s\to 0^+} \mathrm{e}^{-sA}Gx = Gx, \quad \lim_{s\to 0^+} \mathrm{e}^{-sA}x = x$$

以及 A 是闭算子, 得

$$\lim_{s\to 0^+} (-A\mathrm{e}^{-sA}x) = Gx,$$

且 $x \in D(A)$. 于是 $-Ax = Gx$, 即 $-A \supset G$. 故 $G = -A$.

最后证明解析性. 前面实际上已经证明 e^{-tA} 是可微半群, 因此 $T(t) = \mathrm{e}^{-tA}$ 满足

$$\|T^{(n)}(t)\| = \left\|T'\left(\frac{t}{n}\right)^n\right\| \leqslant \left\|AT\left(\frac{t}{n}\right)\right\|^n \leqslant \left(\frac{cn}{t}\right)^n,$$

$$\frac{1}{n!}\|T^{(n)}(t)\| \leqslant \frac{n^n}{n!}\left(\frac{c}{t}\right)^n \leqslant \left(\frac{\mathrm{e}c}{t}\right)^n \left(\text{因为}\frac{n^n}{n!} \leqslant \mathrm{e}^n\right).$$

所以当 $|z-t| \leqslant Kt/(\mathrm{e}c)$ 时, 级数

$$T(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^{(n)}(t)}{n!}(z-t)^n$$

按算子范数收敛, 其中 $0 < K < 1$. 取 $t =\mathrm{Re}\, z$, 并令

$$\Delta = \left\{z : |\arg z| < \mathrm{arctg}\frac{1}{c\mathrm{e}}\right\},$$

$$T(z) = T(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^{(n)}(t)}{n!}(z-t)^n,$$

则 $T(z)$ 在 Δ 内是解析的. 当 z 是实数时 $T(z) = T(t)$, 它是 $T(t)$ 的解析延拓. 证毕.

定理 8.4.20 设 A 是扇形算子, $\delta_0 = \inf[\mathrm{Re}\, \sigma(A)] > 0$, 则对任意 $0 < \delta < \delta_0$, 存在常数 $C_\delta > 0$, 使得

$$\|\mathrm{e}^{-tA}\| \leqslant C_\delta \mathrm{e}^{-\delta t}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

证明留作习题.

推论 8.4.21 解析半群 e^{tA} 为指数衰减半群当且仅当 A 满足

$$\sup\{\mathrm{Re}\, \lambda : \lambda \in \sigma(A)\} < 0.$$

注 4.1 推论 8.4.21 也可由定理 8.2.8 直接推出. 事实上, 对解析半群情形, 易证定理 8.2.8 中谱估计 (2.6) 式可由谱条件 (2.5) 式直接推出, 因此半群指数衰减只需谱条件 (2.5) 式. 而对 C_0 半群的情形, 谱估计 (2.6) 式通常比谱条件 (2.5) 式更难验证, 且此时引理 8.4.19 的结论 (2) 一般不成立. 故定理 8.4.20 的结论对一般 C_0 半群情形不成立.

8.5 解析半群对应的线性方程的初值问题

利用定理 8.4.18 及定理 8.1.11 中证明唯一性的方法, 对线性齐次方程初值问题

$$\begin{cases} u'(t) + Au = 0, \quad 0 < t < T, \\ u(0) = x \end{cases} \tag{5.1}$$

立即可得

定理 8.5.1 设 A 是扇形算子, 则对任意 $x \in X$, 问题 (5.1) 存在唯一古典解

$$u(t,x) = \mathrm{e}^{-tA}x \in C([0,\infty),X) \cap C^1((0,\infty),X) \cap C((0,\infty),D(A)).$$

现在考虑线性非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u'(t) + Au = f(t), \quad 0 < t < T, \\ u(0) = x \end{cases} \tag{5.2}$$

解的存在唯一性, 其中 A 为扇形算子.

由定理 8.3.3 的 (2) 知, 若 $f(t) \in L_1(0,T)$, 则对任意 $x \in X$, 问题 (5.2) 存在唯一适度解 $u(t;x) \in C([0,T),X)$ 满足

$$u(t;x) = \mathrm{e}^{-tA}x + \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A} f(s)\mathrm{d}s. \tag{5.3}$$

定理 8.5.2 设 A 是 X 中的扇形算子, $x \in X, f : (0,T) \to X$ 局部 Hölder 连续, 并且对某个 $\rho > 0$,

$$\int_0^\rho \|f(t)\|\mathrm{d}t < \infty,$$

则问题 (5.2) 有唯一古典解且满足 (5.3) 式.

证明 定义 $T(t) = \mathrm{e}^{-tA}$,

$$U(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s. \tag{5.4}$$

由定理 8.3.3 及 (5.3) 式, 仅需证 $U(t) \in C((0,T),D(A)) \cap \mathrm{C}^1((0,T),X)$ 且满足

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + AU = f(t), \quad t \in (0,T).$$

将 $U(t)$ 表为

$$U(t) = U_1(t) + U_2(t) = \int_0^t T(t-s)(f(s)-f(t))\mathrm{d}s + \int_0^t T(t-s)f(t)\mathrm{d}s,$$

而

$$U_2(t) = \int_0^t T(t-s)f(t)\mathrm{d}s = \int_0^t T(s)f(t)\mathrm{d}s.$$

由引理 8.1.8 知, $U_2 \in D(A)$ 且

$$AU_2 = -T(t)f(t) + f(t) \in C((0,T),X).$$

对于 U_1, 定义

$$U_{1,\varepsilon,\eta}(t) = \int_\eta^{t-\varepsilon} T(t-s)(f(s)-f(t))\mathrm{d}s, \quad 0<\eta<t-\varepsilon,$$
$$U_{1,\varepsilon}(t) = U_{1,\varepsilon,0}(t).$$

对任意给定 $T>t>0$, 总可取充分小的正数 ε 和 η, 使得 $0<\eta<t-\varepsilon$. 当 $s\in[\eta,t-\varepsilon]$ 时, $AT(t-s)$ 有界, $f(s)-f(t)$ 连续, 所以 Riemann 积分

$$\int_\eta^{t-\varepsilon} AT(t-s)(f(s)-f(t))\mathrm{d}s$$

存在. 考察积分和

$$\sum AT(t-s_i)(f(s_i)-f(t))\Delta s_i = A\sum T(t-s_i)(f(s_i)-f(t))\Delta s_i,$$

令 $\max\limits_i \Delta s_i \to 0$ 取极限得

$$\int_\eta^{t-\varepsilon} AT(t-s)(f(s)-f(t))\mathrm{d}s = \lim A\sum T(t-s_i)(f(s_i)-f(t))\Delta s_i.$$

再利用 A 的闭性又知, $\int_\eta^{t-\varepsilon} T(t-s)(f(s)-f(t))\mathrm{d}s \in D(A)$ 且

$$\int_\eta^{t-\varepsilon} AT(t-s)(f(s)-f(t))\mathrm{d}s = A\int_\eta^{t-\varepsilon} T(t-s)(f(s)-f(t))\mathrm{d}s.$$

由于左端当 $\eta=0$ 时积分存在, 并且 A 是闭算子, 所以 $U_{1,\varepsilon}(t)\in D(A)$ 且

$$AU_{1,\varepsilon}(t) = \int_0^{t-\varepsilon} AT(t-s)(f(s)-f(t))\mathrm{d}s.$$

根据定理 8.4.18 的结论 (2) 又知

$$\begin{aligned}&\int_0^t \|AT(t-s)(f(s)-f(t))\|\mathrm{d}s\\ \leqslant &\int_0^{t-\varepsilon} \|AT(t-s)(f(s)-f(t))\|\mathrm{d}s + C\int_{t-\varepsilon}^t (t-s)^{-1+\theta}\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 $0<\theta<1$ 是 f 的 Hölder 指数, 所以积分 $\int_0^t AT(t-s)(f(s)-f(t))\mathrm{d}s$ 存在. 利用 A 的闭性便可推得 $U_1(t)\in D(A)$ 且

$$AU_1(t)=\int_0^t AT(t-s)(f(s)-f(t))\mathrm{d}s.$$

最后证明 $AU_1(t)$ 的连续性. 设 $[t_1,t_2]$ 是 $(0,T)$ 的闭子区间. 对任意 $t\in[t_1,t_2]$, 取 $0<\delta<t_1$, 有

$$AU_1(t)=\int_0^\delta AT(t-s)(f(s)-f(t))\mathrm{d}s+\int_\delta^t AT(t-s)(f(s)-f(t))\mathrm{d}s. \tag{5.5}$$

当 δ 固定时, (5.5) 式右端第二项积分关于 t 连续, 第一项积分是 $O(\delta)$ 且关于 $t\in[t_1,t_2]$ 一致, 所以 $AU_1(t)\in C((0,T),X)$.

综合上面关于 U_1,U_2 的讨论, 有

$$U(t)\in D(A),\quad \forall t\in(0,T),\quad \text{并且 } AU(t)\in C((0,T);X).$$

当 $h>0$ 时, 由 (5.3) 式得

$$\frac{U(t+h)-U(t)}{h}=\frac{T(h)-I}{h}U(t)+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(t+h-s)f(s)\mathrm{d}s.$$

因为 $U(t)\in D(A)$, 故有

$$\lim_{h\to0^+}\frac{T(h)-I}{h}U(t)=-AU(t).$$

又因为

$$\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(t+h-s)f(s)\mathrm{d}s=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\int_0^h T(s)f(t+h-s)\mathrm{d}s=f(t),$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}^+U(t)}{\mathrm{d}t}=-AU(t)+f(t).$$

当 $h<0$ 时, 类似可证

$$\frac{\mathrm{d}^-U(t)}{\mathrm{d}t}=-AU(t)+f(t).$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}=-AU(t)+f(t),\quad U(t)\in C^1((0,T),X).$$

证毕.

8.6　分数幂算子与分数幂空间

8.6.1　概述

现在讨论抽象的非线性微分方程

$$u'(t)+Au=f(t,u),\quad t>t_0 \tag{6.1}$$

及其相应的初值问题

$$\begin{cases} u'(t)+Au=f(t,u), & t>t_0,\\ u(t_0)=x, \end{cases} \tag{6.2}$$

其中 A 是 Banach 空间 X 中的扇形算子, X 中的范数记为 $\|\cdot\|$.

设 X_s 是 X 的线性子空间, 并且在 X_s 中可引进另一范数 $\|\cdot\|_s$ 使其构成 Banach 空间. 又设 U_s 是 $\mathbb{R}\times X_s$ 中的开集, f 定义在 U_s 内, $f:U_s\to X$. 一种特殊情形是 $X_s=X$.

把问题 (6.2) 化为等价的积分方程

$$u(t)=T(t-t_0)x+\int_{t_0}^{t}T(t-s)f(s,u(s))\mathrm{d}s, \tag*{(6.2)$'$}$$

其中 $T(t)=\mathrm{e}^{-tA}$. 为了保证问题 (6.2) 定义在 $[t_0,t_1)$ 上的解 u 是线性初值问题

$$\begin{cases} v'(t)+Av=f(t,u(t)),\\ v(t_0)=x \end{cases}$$

的解, 根据定理 8.5.2, 只需在 (t_0,t_1) 上, $t\to f(t,u(t))$ 是局部 Hölder 连续的, 且对某个 $\rho>0$, $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\rho}\|f(t,u(t))\|\mathrm{d}t<\infty$. 为此, 给出 (6.2) 的如下古典解定义.

定义 8.6.1　称 $u(t)$ 为定义在 $[t_0,t_1)$ 上初值问题 (6.2) 的古典解, 若 $u(t)\in C([t_0,t_1),X_s)$ 且同时满足:

(1) $u(t_0)=x$;

(2) 在 (t_0,t_1) 上, $(t,u(t))\in U_s, u(t)\in D(A)$, $u'(t)$ 存在并满足方程 (6.1);

(3) 在 (t_0,t_1) 上, $t\to f(t,u(t))$ 是局部 Hölder 连续的, 且对某个 $\rho>0$, $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\rho}\|f(t,\,u(t))\|\mathrm{d}t<\infty$.

类似于讨论 $\mathbb{R}^n$ 中的常微分方程, 首先建立初值问题 (6.2) 的古典解与积分方程 (6.2)$'$ 的连续解的等价性, 然后建立初值问题解的局部存在唯一性及解的延拓定理.

假设:

(H_{X_s}) A 是 X 中的扇形算子, X_s 是 X 的完备子空间, 其中的范数为 $\|\cdot\|_s$. 集合 U_s 是 $\mathbb{R}\times X_s$ 中的开集, $f: U_s \to X$ 关于 t 局部 Hölder 连续, 关于 u 局部 Lipschitz 连续, 即若 $(t^*,u^*)\in U_s$, 则存在 (t^*,u^*) 的一个邻域 $V\subset U_s$, 使得对任意 $(t,u)\in V,(s,v)\in V$, 有

$$\|f(t,u)-f(s,v)\|\leqslant L(|t-s|^\mu+\|u-v\|_s), \tag{6.3}$$

其中 L,μ 为正常数, $0<\mu<1$.

取不同的空间 X_s (连同它的范数), 条件 (6.3) 的强弱是不同的. 一个特殊情形是 $X_s=X$, 这时条件 (6.3) 即是

$$\|f(t,u)-f(s,v)\|\leqslant L(|t-s|^\mu+\|u-v\|). \tag{6.4}$$

另一特殊情形是 $X_s = D(A) := X^1$. 若 $0\in\rho(A)$, 对任意 $x\in X^1$, 引进范数 $\|x\|_1=\|Ax\|$, 易证 X^1 是 Banach 空间 (习题 8.18). 这时的条件 (6.3) 即是

$$\|f(t,u)-f(s,v)\|\leqslant L(|t-s|^\mu+\|u-v\|_1). \tag{6.5}$$

对任意 $x\in D(A)=X^1$, 由于 $x=A^{-1}Ax$, 所以 $\|x\|\leqslant M\|x\|_1$. 由此可知条件 (6.4) 强于条件 (6.5).

先对 $X_s=X$, 即在条件 (6.4) 下讨论初值问题 (以后再选取另外的 X_s, 以减弱 f 的条件). 此时, 把条件 (H_{X_s}) 写成 (H_X), 把开集 U_s 写成 U.

首先建立初值问题 (6.2) 的古典解与积分方程 (6.2)′ 的连续解 (问题 (6.2) 的适度解) 的等价性. 在下面的讨论中要用到如下结论.

引理 8.6.2 设 A 是扇形算子, $\mathrm{Re}\,\sigma(A)>0, T(t)=\mathrm{e}^{-tA}$, 则对任意 $0<\alpha\leqslant 1$, 存在正常数 C_α, 使得对任意 $t>0,h>0$, 有

$$\|T(t+h)-T(t)\|\leqslant C_\alpha h^\alpha t^{-\alpha}. \tag{6.6}$$

证明留作习题 (习题 8.19).

定理 8.6.3 设 (H_X) 成立. 有

(1) 若 $u(t)$ 是定义在 $[t_0,t_1)$ 上问题 (6.2) 的古典解, 则 u 在 $[t_0,t_1)$ 上满足积分方程 (6.2)′.

(2) 如果 $u(t)\in C([t_0,t_1),X)$, 且对 $t_0\leqslant t<t_1, u$ 满足积分方程 (6.2)′; 又若对某个 $\rho>0$, 积分 $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\rho}\|f(s,u(s))\|\mathrm{d}s<\infty$. 那么在 $[t_0,t_1)$ 上, $u(t)$ 是问题 (6.2) 的古典解.

证明 先证 (1). 设 $u(t)$ 是定义在 $[t_0,t_1)$ 上问题 (6.2) 的解. 考察

$$\begin{cases} v'(t)+Av=\tilde{f}(t), \quad t_0<t<t_1, \\ v(t_0)=x, \end{cases} \tag{6.7}$$

其中 $\tilde{f}(t)=f(t,u(t))$. 由解的定义知, $\tilde{f}:[t_0,t_1)\to X$ 是局部 Hölder 连续的, 对某 $\rho>0$,

$$\int_{t_0}^{t_0+\rho}\|\tilde{f}(t)\|\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_0+\rho}\|f(t,u(t))\|\mathrm{d}t<\infty.$$

因此, 线性问题 (6.7) 存在唯一解

$$v(t)=\mathrm{e}^{-(t-t_0)A}x+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-(t-s)A}f(s,u(s))\mathrm{d}s,$$

但 $u(t)$ 也是问题 (6.7) 的解, 所以在 $[t_0,t_1)$ 上, $u(t)$ 满足积分方程 (6.2)$'$.

再证 (2). 设 $u\in C([t_0,t_1);X)$, 在 $[t_0,t_1)$ 上满足积分方程 (6.2)$'$, 又对某个 $\rho>0$, 积分 $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\rho}\|f(t,u(t))\|\mathrm{d}t<\infty$. 先证$u:(t_0,t_1)\to X$ 是局部 Hölder 连续的. 记 $T(t)=\mathrm{e}^{-tA}$. 若 $[t_0^*,t_1^*]\subset(t_0,t_1), t_0^*<t<t+h<t_1^*$, 则

$$\begin{aligned} u(t+h)-u(t)=&[T(t+h-t_0)-T(t-t_0)]x \\ &+\int_{t_0}^{t}[T(t+h-s)-T(t-s)]f(s,u(s))\mathrm{d}s \\ &+\int_{t}^{t+h}T(t+h-s)f(s,u(s))\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

不妨设 $0\in\rho(A)$. 由引理 8.6.2,

$$\|T(t+h-t_0)-T(t-t_0)\|\leqslant M_1\frac{h}{t-t_0}\leqslant M_1\frac{h}{t_0^*-t_0}:=M_1'h,$$

$$\begin{aligned}\left\|\int_{t_0}^{t}[T(t+h-s)-T(t-s)]f(s,u(s))\mathrm{d}s\right\| &\leqslant M_2h^{\alpha}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}\|f(s,u(s))\|\mathrm{d}s \\ &\leqslant M_2'h^{\alpha}, \quad 0<\alpha<1,\end{aligned}$$

$$\left\|\int_{t}^{t+h}T(t+h-s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\right\|\leqslant M_3h.$$

于是

$$\|u(t+h)-u(t)\|\leqslant Mh^{\alpha}.$$

因此, $u:(t_0,t_1)\to X$ 是局部 Hölder 连续的, 从而在 (t_0,t_1) 上, $t\to\tilde{f}(t)=f(t,u(t))$ 是局部 Hölder 连续的. 这就证明了 $u(t)$ 是线性问题 (6.7) 的解, 从而在 $[t_0,t_1)$ 上也是问题 (6.2) 的解. 证毕.

利用定理 8.3.5 和定理 8.6.3, 可得初值问题 (6.2) 古典解的局部存在唯一性定理.

定理 8.6.4(古典解的局部存在唯一性) 设 (H_X) 成立, 则对任意 $(t_0,x)\in U$, 存在 $T=T(t_0,x)$, 使得在 $[t_0,t_0+T]$ 上初值问题 (6.2) 有唯一古典解.

根据定理 8.6.4, 在 (H_X) 假设下当 $U=\mathbb{R}\times X$ 时延拓性定理 8.3.6 的结论仍成立, 此时定理 8.3.6 中的解为古典解. 事实上, 对更一般的区域 U, 类似常微分方程情形仍有解的延拓定理, 详见后面的定理 8.7.4.

8.6.2 分数幂算子的定义与例子

在 8.6.1 节中我们在 X 上讨论了非线性初值问题, 其优点是对初值 x 不加限制 $(\forall x\in X)$, 缺点是对 f 有较强的限制. 现在选择子空间 X_s, 以减弱 f 的条件, 当然初值的取值范围就要缩小.

如何选择子空间 X_s 呢? 从定理 8.6.3 的证明来看, 其关键是要确保积分方程在 X_s 中存在局部解及积分方程的解 $u(t)$ 从 (t_0,t_1) 到 X_s 是局部 Hölder 连续的.

取 $X_s=D(A):=X^1$. 对任意 $x\in X^1$, 若 $u:[t_0,t_1)\to X^1$ 是问题 $(6.2)'$ 的解, 则 $\|u(t+h)-u(t)\|_1=\|A(u(t+h)-u(t))\|(h>0)$. 易估计

$$\begin{aligned}\|[T(t+h-t_0)-T(t-t_0)]x\|_1&=\|[T(t+h-t_0)-T(t-t_0)]Ax\|\\&\leqslant M_1\frac{h}{t-t_0}\|Ax\|,\end{aligned}$$

$$\left\|\int_{t_0}^t[T(t+h-s)-T(t-s)]f(s,u(s))\mathrm{d}s\right\|_1\leqslant\int_{t_0}^t\|[T(h)-I]AT(t-s)f(s,u(s))\|\mathrm{d}s.$$

由 (6.6), 对任意 $t>s>0$, $h>0$ 及 $\alpha\in(0,1]$, 有

$$\begin{aligned}\|[T(h)-I]AT(t-s)f(s,u(s))\|&\leqslant\left\|[T(h)-I]T\left(\frac{t-s}{2}\right)AT\left(\frac{t-s}{2}\right)f(s,u(s))\right\|\\&\leqslant C_1\left\|[T(h)-I]T\left(\frac{t-s}{2}\right)\right\|\cdot\left\|AT\left(\frac{t-s}{2}\right)\right\|\|f(s,u(s))\|\\&\leqslant C_\alpha\frac{h^\alpha}{(t-s)^{1+\alpha}}\|f(s,u(s))\|,\quad 0<\alpha\leqslant1.\end{aligned}$$

这样做, 不能得到 $u:(t_0,t_1)\to X^1$ 的局部 Hölder 连续性. 在后面定理 8.7.3 的证明中类似可见, 当 $X_s=X^1$ 时在 (H_{X_s}) 假设下无法得到积分方程在 $C([t_0,t_0+T],X_1)$ 中解的存在性. 因此, 必须另选子空间 X_s.

事实上, 当 $X_s=X^1$ 时, 条件 (H_{X_s}) 暗含非线性方程 (6.1) 可为完全非线性方程, 此时易找到反例说明初值问题 (6.2) 无古典解或古典解不唯一. 例如, 取 $A=-\Delta$, $f(t,u)=2Au$, 则 (6.1) 为 $u_t=-\Delta u$, 此时初值问题 (6.2) 的解一般不适定. 因此在条件 (H_{X_s}) 中不能选取 $X_s=X^1$.

把 $[T(h)-I]x$ 形式地写成

$$[T(h)-I]x=-\int_0^h A^{1-\alpha}T(s)A^{\alpha}x\mathrm{d}s.$$

引进分数幂算子 A^{α}, 希望它满足:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ A^{\alpha}\text{ 具有通常指数函数的运算法则},\\(2)\ \text{当 }0<\alpha\leqslant\beta<1\text{ 时},D(A^{\alpha})\supset D(A^{\beta})\supset D(A),\\(3)\ \|A^{\alpha}T(t)\|\leqslant C_{\alpha}t^{-\alpha},\quad\forall t>0.\end{array}\right\}\qquad(6.8)$$

然后取 $X_s=D(A^{\alpha}):=X^{\alpha}$, 对任意 $x\in D(A^{\alpha})$, 令 $\|x\|_{\alpha}=\|A^{\alpha}x\|$. 以 X^{α} 为“工作空间”, 期望证明积分方程 (6.2)′ 的解 $u:(t_0,t_1)\to X^{\alpha}$ 是局部 Hölder 连续的. 本节的主要目的是引进分数幂算子 A^{α} 与分数幂空间 X^{α} (当 $\alpha=0$ 时 $X^0=X$), 以便在 X^{α} 中讨论非线性方程的初值问题.

为了引进分数幂算子, 先看一个例子. 已知当 $a,\alpha>0$ 时,

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}s^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s=a^{\alpha}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t,$$

即

$$a^{-\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t.$$

推广之, 可引进分数幂算子的如下定义.

定义 8.6.5　设 A 是扇形算子, $\mathrm{Re}\,\sigma(A)>0$.

(1) 对任意 $\alpha>0$, 定义

$$A^{-\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-tA}\mathrm{d}t;$$

(2) $A^0=I$;

(3) 对任意 $\alpha>0$, 定义

$$A^{\alpha}=(A^{-\alpha})^{-1}.$$

因为 $\mathrm{Re}\,\sigma(A)>0$, 所以存在正常数 δ 和 c, 使得

$$\|\mathrm{e}^{-tA}\|\leqslant c\mathrm{e}^{-\delta t},\quad t\geqslant 0.$$

因此定义 (1) 中的积分是收敛的.

后面将证明: 当 $\alpha>0$ 时, $A^{-\alpha}$ 是一一的, 因而存在逆算子, 所以定义 (3) 有意义.

若 $\alpha \leqslant 0$, 则 $D(A^{\alpha}) = X$. 若 $\alpha > 0$, 则 $D(A^{\alpha}) = R(A^{-\alpha})$. 对 $\alpha = 1$, A^{-1} 就是 A 的逆. 事实上, 因为 $\Gamma(1) = 1$, 所以

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-tA}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} -A^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-tA} = -A^{-1}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-tA}\mathrm{d}t = A^{-1}.$$

例 1 设 A 是正纯量算子 (即 $X = \mathbb{R}$ 中的有界线性算子对应的 1×1 矩阵 (a), 其中元素 a 为正实数), 那么 $A^{-\alpha}$ 就是通常意义下正数 a 的 $-\alpha$ 次幂.

例 2 若 $A = I + B, B$ 是有界线性算子, 并且 $\|B\| < 1$, 则

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} = (I+B)^{-\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{n}B^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}B^n. \end{aligned}$$

事实上, 直接计算知

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-tA} &= \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-tB} = \mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-Bt)^n, \\ A^{-\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-Bt)^n\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}B^n\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{n+\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}B^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}B^n. \end{aligned}$$

8.6.3 分数幂算子的性质

定理 8.6.6 设 A 是扇形算子, $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$. 有

(1) 对任意 $\alpha > 0, A^{-\alpha}$ 是 X 上的有界线性算子;

(2) 当 $\alpha > 0, \beta > 0$ 时, $A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$;

(3) 对任意 $\alpha > 0, A^{-\alpha}$ 是一一的.

证明 (1) 由于 $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$, 所以存在 $\delta > 0, c > 0$, 使得 $\|\mathrm{e}^{-tA}\| \leqslant c\mathrm{e}^{-\delta t}, \forall t \geqslant 0$. 于是

$$\|A^{-\alpha}x\| \leqslant \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\delta t}\mathrm{d}t\|x\| = \delta^{-\alpha}\|x\|.$$

从而, $A^{-\alpha}$ 是有界线性算子.

(2) 令 $\Gamma^* = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$, 直接计算得

$$\begin{aligned}
A^{-\alpha}A^{-\beta} &= \frac{1}{\Gamma^*}\int_0^\infty\int_0^\infty t^{\alpha-1}s^{\beta-1}\mathrm{e}^{-(t+s)A}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma^*}\int_0^\infty\int_t^\infty t^{\alpha-1}(u-t)^{\beta-1}\mathrm{e}^{-uA}\mathrm{d}u\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma^*}\int_0^\infty \left[\mathrm{e}^{-uA}\int_0^u t^{\alpha-1}(u-t)^{\beta-1}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u \ (\text{图 } 8.6.1) \\
&= \frac{1}{\Gamma^*}\int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1}\mathrm{e}^{-uA}\left[\int_0^u \left(\frac{t}{u}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{u}\right)^{\beta-1}\mathrm{d}\left(\frac{t}{u}\right)\right]\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\Gamma^*}\int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1}\mathrm{e}^{-uA}\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}\mathrm{d}z\mathrm{d}u \\
&= A^{-\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

(3) 由结论 (2) 知, 对正整数 n,

$$A^{-n} = A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1} = (A^{-1})^n.$$

因为 A^{-1}(A 的逆算子) 是一一的, 所以 A^{-n} 也是一一的. 又若 $A^{-\alpha}x = 0$, 则对任意正整数 $n > \alpha$,

$$A^{-n}x = A^{-(n-\alpha)}A^{-\alpha}x = 0.$$

于是 $x = 0$, 即 $A^{-\alpha}$ 是一一的. 证毕.

推论 8.6.7　若 $\alpha \geqslant \beta$, 则 $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$.

证明　先设 $\beta > 0$. 若 $y \in R(A^{-\alpha})$, 则存在 $x \in X$, 使得 $y = A^{-\alpha}x$. 于是

$$\begin{aligned}
A^{-\alpha}x &= A^{-\beta-(\alpha-\beta)}x \\
&= A^{-\beta}(A^{-(\alpha-\beta)}x) \in R(A^{-\beta}),
\end{aligned}$$

从而 $R(A^{-\alpha}) \subset R(A^{-\beta})$, 即 $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$. 其余情形显然成立.

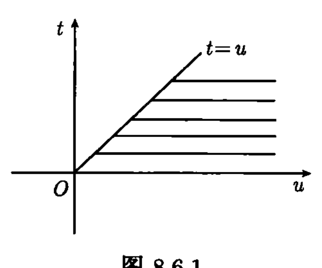


图 8.6.1

推论 8.6.8　对任意 α 和 β, 令 $r = \max\{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$, 则在 $D(A^r)$ 上有

$$A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}.$$

证明　只需考虑以下两种情形.

(1) α 与 β 异号. 不妨设 $\alpha > 0, \beta < 0$. 此时 $r = \alpha$.

当 $\alpha + \beta < 0$ 时, 有

$$A^{\alpha+\beta}A^{-\alpha} = A^\beta, \quad A^{-\alpha}A^{\alpha+\beta} = A^\beta,$$

即在 $D(A^\alpha)$ 上

$$A^{\alpha+\beta} = A^\beta A^\alpha = A^\alpha A^\beta.$$

当 $\alpha+\beta>0$ 时, 由

$$A^{-(\alpha+\beta)}A^\beta = A^{-\alpha}, \quad A^\beta A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\alpha}$$

得结论. 当 $\alpha+\beta=0$ 时结论显然成立.

(2) α 与 β 均为正, 此时 $r=\alpha+\beta$. 这时由 (1) 知

$$A^{-\beta}A^{\alpha+\beta} = A^{\alpha+\beta}A^{-\beta} = A^\alpha.$$

故结论成立. 证毕.

定理 8.6.9 设 A 是扇形算子, $\operatorname{Re}\sigma(A)>0, 0<\alpha<1$, 则

(1) $A^{-\alpha} = \dfrac{\sin\pi\alpha}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty t^{-\alpha}(tI+A)^{-1}\mathrm{d}t$;

(2) 存在常数 C 与 α 无关, 使得

$$\|A^{-\alpha}\| \leqslant C;$$

(3) 对每个 $x\in X$,

$$\lim_{\alpha\to0^+} A^{-\alpha}x = x.$$

证明 (1) 因为 A 是扇形算子, 所以 $\lambda I+A$ 也是扇形算子. 由于当 $\lambda\geqslant0$ 时,

$$\operatorname{Re}\sigma(\lambda I+A) > \lambda \geqslant 0,$$

所以

$$(\lambda I+A)^{-1} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tA}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t.$$

由此得

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(\lambda I+A)^{-1}\mathrm{d}\lambda &= \int_0^\infty \lambda^{-\alpha}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tA}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tA}\left[\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}\lambda\right]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-tA}\left[\int_0^\infty s^{-\alpha}\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t \\
&= \Gamma(1-\alpha)\int_0^\infty t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-tA}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}A^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

(2) 由扇形算子的性质知, 存在 $R_0 \geqslant 1, C_1 > 0$, 使得当 $\lambda \geqslant R_0$ 时,

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leqslant C_1/\lambda.$$

对此 R_0, 又存在 $C_0 > 0$, 使得当 $0 \leqslant \lambda \leqslant R_0$ 时,

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leqslant C_0.$$

于是

$$\begin{aligned}\|A^{-\alpha}\| &\leqslant \left|\frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\right| \int_0^{R_0} \lambda^{-\alpha}\|(\lambda I + A)^{-1}\| \mathrm{d}\lambda \\ &\quad + \left|\frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\right| \int_{R_0}^{\infty} \lambda^{-1-\alpha}\|\lambda(\lambda I + A)^{-1}\| \mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant \left|\frac{\sin \pi(1-\alpha)}{\pi(1-\alpha)}\right| C_0 R_0 + \left|\frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}\right| C_1 \leqslant C.\end{aligned}$$

(3) 设 $x \in D(A)$, 则存在 $y \in X$, 使得 $x = A^{-1}y$. 于是

$$A^{-\alpha}x - x = A^{-(1+\alpha)}y - A^{-1}y = \int_0^{\infty} \left(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} - 1\right) \mathrm{e}^{-tA} y \mathrm{d}t.$$

因为 $\|\mathrm{e}^{-tA}\| \leqslant M_1 \mathrm{e}^{-\delta t} (\delta > 0)$, 所以

$$\|A^{-\alpha}x - x\| \leqslant M_1 \int_0^{T_0} \left|\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} - 1\right| \mathrm{d}t \|y\| + M_2 \int_{T_0}^{\infty} t\mathrm{e}^{-\delta t} \mathrm{d}t \|y\|,$$

其中 $T_0 \geqslant 1$ 是任意给定的正数. 由这个不等式易证

$$\lim_{\alpha \to 0^+} A^{-\alpha}x = x, \quad x \in D(A).$$

又因为 $\overline{D(A)} = X$ 及 $A^{-\alpha}$ 对 $\alpha \in (0,1)$ 是一致有界的, 所以对任意 $x \in X$ 有

$$\lim_{\alpha \to 0^+} A^{-\alpha}x = x.$$

定理得证.

定理 8.6.10 设 A 是扇形算子, $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0, 0 < \alpha < 1$. 若 $x \in D(A)$, 则

$$A^{\alpha}x = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} A(tI + A)^{-1} x \mathrm{d}t.$$

证明 因为 $0 < 1-\alpha < 1$, 由定理 8.6.9 得

$$A^{\alpha-1}x = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} (tI + A)^{-1} x \mathrm{d}t.$$

又因为 $x \in D(A)$, 所以 $x \in D(A^\alpha), A^{\alpha-1}x \in D(A)$. 由于 A 是闭线性算子, 若要

$$A^\alpha x = A(A^{\alpha-1}x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1} A(tI+A)^{-1} x \mathrm{d}t$$

成立, 只需右端积分收敛.

因为存在 $R_0 > 0$ 和 $C_1 > 0$, 使得

$$\|(tI+A)^{-1}\| \leqslant C_1/t, \quad \forall t \geqslant R_0,$$

所以

$$\|t^{\alpha-1}A(tI+A)^{-1}x\| \leqslant C_1 t^{\alpha-2}\|Ax\|, \quad \forall t \geqslant R_0.$$

又因为

$$A(tI+A)^{-1} = I - t(tI+A)^{-1},$$

所以 $\|A(tI+A)^{-1}\|$ 在 $t \in [0, R_0]$ 上一致有界. 根据以上估计, 容易看出积分

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1}A(tI+A)^{-1}x\mathrm{d}t$$

收敛. 证毕.

定理 8.6.11 设 A 是扇形算子且 $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$, 则对任意 α, 算子 A^α 是闭稠定的.

证明 若 $\alpha \leqslant 0$, 则 A^α 是 X 上的有界线性算子, 于是 A^α 是闭稠定的. 若 $\alpha > 0$, 则 $A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}$. 因为闭算子之逆仍然是闭的, 所以 A^α 是闭的. 下面证明: 当 $\alpha > 0$ 时, $D(A^\alpha)$ 在 X 中稠密.

对任意 $x \in D(A)$, 存在 y 使得 $x = A^{-1}y$. 对此 y, 存在 $y_m \in D(A), y_m \to y$, 于是 $A^{-1}y_m \to A^{-1}y = x$. 令 $x_m = A^{-1}y_m$, 则 $x_m \in D(A)$ 且 $Ax_m = y_m \in D(A)$, 即 $x_m \in D(A^2), x_m \to x$. 这就证明了 $D(A^2)$ 在 $D(A)$ 中稠密, 从而 $D(A^2)$ 在 X 中稠密.

现设 $D(A^n)$ 在 X 中稠密. 对任意 $x \in D(A^n)(\subset D(A))$, 存在 y 使得 $x = A^{-1}y$. 对此 y, 存在 $y_m \in D(A^n)$ 使得 $y_m \to y$. 令 $x_m = A^{-1}y_m$, 则 $x_m \to x$. 因为 $y_m = Ax_m$, 所以 $x_m \in D(A^{n+1})$. 因此 $D(A^{n+1})$ 在 $D(A^n)$ 中稠密, 从而在 X 中稠密. 这就证明了对任意自然数 n, $D(A^n)$ 在 X 中稠密, 同时证明了对任意 $\alpha > 0$, $D(A^\alpha)$ 在 X 中稠密. 证毕.

定理 8.6.12 设 A 是扇形算子, $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$, 则对任意 $t > 0$, 由 $-A$ 生成的解析半群 e^{-tA} 满足:

(1) $\mathrm{e}^{-tA} : X \to D(A^\alpha)$;

(2) $A^\alpha \mathrm{e}^{-tA}$ 是 X 上的有界线性算子;

(3) 对任意 $x \in D(A^\alpha)$, 有

$$A^\alpha e^{-tA}x = e^{-tA}A^\alpha x.$$

证明　(1) 只需对 $\alpha > 0$ 来证明. 因为对任意自然数 $n, e^{-At}: X \to D(A^n)$, 取 $n > \alpha$, 就得 $e^{-tA}: X \to D(A^\alpha)$.

(2) 显然, $A^\alpha e^{-tA}$ 是定义在 X 上的闭线性算子, 由闭图像定理知, $A^\alpha e^{-tA}$ 是 X 上的有界线性算子.

(3) 设 $\beta > 0$, 利用 $A^{-\beta}$ 的表达式及

$$e^{-tA}e^{-sA} = e^{-sA}e^{-tA},$$

可得

$$A^{-\beta}e^{-tA} = e^{-tA}A^{-\beta}.$$

由此又得, 当 $x \in D(A^\beta)$ 时,

$$e^{-tA}x = e^{-tA}A^{-\beta}A^\beta x = A^{-\beta}e^{-tA}A^\beta x,$$
$$A^\beta e^{-tA}x = e^{-tA}A^\beta x.$$

证毕.

8.6.4　几个估计式

引进 A^α, 希望它满足 (6.8). 前文已经证明过 6.8(1)、(2) 式. 下面要证明 6.8(3) 式成立. 同时还证明一些与 A^α 有关的估计式.

定理 8.6.13　设 A 是扇形算子, $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > \delta > 0$, 则

(1) 当 $\alpha \geqslant 0$ 时, 存在正常数 C_α 使得

$$\|A^\alpha e^{-tA}\| \leqslant C_\alpha t^{-\alpha}e^{-\delta t}, \quad \forall\, t > 0;$$

(2) 当 $0 < \alpha \leqslant 1$ 时, 对 $x \in D(A^\alpha)$ 有

$$\|(e^{-tA} - I)x\| \leqslant \frac{1}{\alpha}C_{1-\alpha}t^\alpha\|A^\alpha x\|, \quad \forall t \geqslant 0,$$

其中, 对任意 $b > 0$, C_α 在 $[0, b]$ 上是有界的.

注 6.1　若扇形算子 A 满足 $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$, 则必存在 $\delta > 0$ 使得 $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > \delta > 0$.

证明　(1) 由 $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > \delta > 0$, 利用定理 8.4.20 及定理 8.4.18 有下面的衰减估计:

$$\|e^{-tA}\| \leqslant Ce^{-\delta t}, \quad \|Ae^{-tA}\| \leqslant Ct^{-1}e^{-\delta t}, \quad \forall t > 0.$$

进一步可得, 当 $n=1,2,3,\cdots$ 时,

$$\|A^n \mathrm{e}^{-tA}\| = \|(A\mathrm{e}^{-At/n})^n\| \leqslant (nC)^n t^{-n} \mathrm{e}^{-\delta t}.$$

现设 $n-1<\alpha<n$ $(n=1,2,3,\cdots)$, 则有

$$\begin{aligned}
\|A^\alpha \mathrm{e}^{-tA}\| &= \|A^{\alpha-n} A^n \mathrm{e}^{-tA}\| \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1} \|A^n \mathrm{e}^{-(t+s)A}\| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{(nC)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1} (t+s)^{-n} \mathrm{e}^{-\delta(t+s)} \mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{(nC)^n}{t^\alpha \Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty u^{n-\alpha-1} (1+u)^{-n} \mathrm{e}^{-\delta t} \mathrm{d}u \\
&= \frac{(nC)^n}{\Gamma(n-\alpha)} B(n-\alpha,\alpha) \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{e}^{-\delta t} \\
&= \frac{(nC)^n}{(n-1)!} \Gamma(\alpha) t^{-\alpha} \mathrm{e}^{-\delta t} := C_\alpha t^{-\alpha} \mathrm{e}^{-\delta t}.
\end{aligned}$$

(2) 因为

$$(\mathrm{e}^{-tA}-I)x = \int_0^t \big(-A\mathrm{e}^{-sA}x\big)\mathrm{d}s,$$

故对任意 $x\in D(A^\alpha)$, 有 $\mathrm{e}^{-tA}x\in D(A)$, $A^\alpha \mathrm{e}^{-tA}x = \mathrm{e}^{-tA}A^\alpha x$. 所以

$$\begin{aligned}
\|(\mathrm{e}^{-tA}-I)x\| &\leqslant \int_0^t \|A^{1-\alpha}\mathrm{e}^{-sA}A^\alpha x\| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^t C_{1-\alpha} s^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\delta s} \|A^\alpha x\| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{C_{1-\alpha}}{\alpha} t^\alpha \|A^\alpha x\|.
\end{aligned}$$

利用 C_α 的表达式可推得 C_α 的有界性. 证毕.

定理 8.6.14 设 $0<\alpha<1$, A 是扇形算子, $\mathrm{Re}\,\sigma(A)>0$, 则存在常数 $C_0>0$, 使得对任意 $x\in D(A)$ 和 $\rho>0$, 有

$$\begin{aligned}
&\|A^\alpha x\| \leqslant C_0(\rho^\alpha\|x\| + \rho^{\alpha-1}\|Ax\|), \\
&\|A^\alpha x\| \leqslant 2C_0 \|x\|^{1-\alpha} \|Ax\|^\alpha.
\end{aligned}$$

证明　由定理 8.6.10 知, 对任意 $x \in D(A)$ 有

$$\begin{aligned}\|A^\alpha x\| &\leqslant \left|\frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\right| \int_0^\rho t^{\alpha-1}\|A(tI+A)^{-1}\| \cdot \|x\|\mathrm{d}t \\ &\quad + \left|\frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\right| \int_\rho^\infty t^{\alpha-1}\|(tI+A)^{-1}\| \cdot \|Ax\|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \left|\frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}\right| M\rho^\alpha\|x\| + \left|\frac{\sin \pi(1-\alpha)}{\pi(1-\alpha)}\right| M\rho^{\alpha-1}\|Ax\| \\ &\leqslant C_0(\rho^\alpha\|x\| + \rho^{\alpha-1}\|Ax\|).\end{aligned}$$

若 $x \neq 0$, 取 $\rho = \|Ax\|/\|x\|$, 得

$$\|A^\alpha x\| \leqslant 2C_0\|x\|^{1-\alpha}\|Ax\|^\alpha.$$

当 $x = 0$ 时, 上式显然成立. 证毕.

推论 8.6.15　设 A 是扇形算子, 满足 $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$. 又设 B 是一个线性算子, 存在 $0 \leqslant \alpha < 1$, 使得 $BA^{-\alpha}$ 在 X 上有界, 则 $A + B$ 是扇形算子.

证明　由条件知

$$D(B) \supset R(A^{-\alpha}) = D(A^\alpha) \supset D(A).$$

又由定理 8.6.14 的结论知, 当 $x \in D(A)$ 时,

$$\|Bx\| = \|BA^{-\alpha}A^\alpha x\| \leqslant M\|A^\alpha x\| \leqslant \varepsilon\|Ax\| + C(\varepsilon)\|x\|,$$

其中 $\varepsilon > 0$ 可以任意给定. 因此, 由定理 8.4.14 知, $A + B$ 是扇形算子.

推论 8.6.16　设 A 是扇形算子, $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$, 则存在常数 $\varphi_0 \in (0, \pi/2), R_0 > 0$, 使得对任意 $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, 当 $|\lambda| \geqslant R_0$, $|\pi - \arg\lambda| \geqslant \varphi_0$ 时, 有

$$\|A^\beta(\lambda I + A)^{-1}\| \leqslant C|\lambda|^{\beta-1}; \tag{6.9}$$

当 $\lambda \in \rho(-A)$, $|\lambda| \leqslant R_0$ 时, 有

$$\|A^\beta(\lambda I + A)^{-1}\| \leqslant C, \tag{6.10}$$

其中 C 为某个正的常数.

证明　把 $A^\beta(\lambda I + A)^{-1}$ 写成 $[A(\lambda I + A)^{-1}]^\beta[(\lambda I + A)^{-1}]^{1-\beta}$ 便知, 对任意 x, 有

$$\|A^\beta(\lambda I + A)^{-1}x\| \leqslant C_0\|A(\lambda I + A)^{-1}\|^\beta\|(\lambda I + A)^{-1}\|^{1-\beta}\|x\|.$$

由推论 8.4.15 知, 存在常数 $\varphi_0 \in (0,\pi/2), R_0 > 0$, 使得当 $|\lambda| \geqslant R_0$, $|\pi - \arg\lambda| \geqslant \varphi_0$ 时, (6.9) 式成立.

当 $\lambda \in \rho(-A), |\lambda| \leqslant R_0$ 时, 由

$$A(\lambda I + A)^{-1} = I - \lambda(\lambda I + A)^{-1}, \quad A^\beta(\lambda I + A)^{-1} = A^{\beta-1}A(\lambda I + A)^{-1}$$

便得 (6.10) 式. 证毕.

推论 8.6.17 设 A 是扇形算子, $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$, B 是闭线性算子, $D(B) \supset D(A^\alpha)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, 则

(1) 存在常数 $C > 0$, 使得

$$\|Bx\| \leqslant C\|A^\alpha x\|, \quad \forall\, x \in D(A^\alpha);$$

(2) 存在常数 $C_1 > 0$, 使得对任意 $\rho > 0$ 和 $x \in D(A)$, 有

$$\|Bx\| \leqslant C_1(\rho^\alpha\|x\| + \rho^{\alpha-1}\|Ax\|).$$

证明留作练习.

8.6.5 分数幂空间与图范数

设 A 是 Banach 空间 X 中的扇形算子. 若 $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$, 可引进 A^α. 若 $\mathrm{Re}\,\sigma(A)$ 非正, 可选取 a, 使得 $A_1 = A + aI$, $\mathrm{Re}\,\sigma(A_1) > 0$, 而 A_1 也是扇形算子. 对 A_1 可引进 A_1^α. 以后将考虑新的空间

$$X^\alpha = D(A_1^\alpha), \quad \alpha \geqslant 0,$$

并引进图范数

$$\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|, \quad x \in X^\alpha. \tag{6.11}$$

下面将证明: 对于不同的 a, 只要 $\mathrm{Re}\,\sigma(A_1) > 0$, 则 A_1^α 有相同的定义域; 且对于 a 的不同选择, (6.11) 式给出了 X^α 上的等价范数. 因此就不必考虑 X_α 对于 a 的选择的依赖性.

定理 8.6.18 设 A, B 是 X 中的扇形算子, 满足 $D(A) = D(B), \mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$, $\mathrm{Re}\,\sigma(B) > 0$, 并且对于 [0, 1) 中某个 α, 算子 $(A - B)A^{-\alpha}$ 在 X 中有界. 则对任意 $\beta \in [0,1]$, 算子 $A^\beta B^{-\beta}$ 和 $B^\beta A^{-\beta}$ 在 X 上都有界.

证明 当 $\beta = 0$ 时是恒同算子, 显然成立. $\beta = 1$ 时, 因 $(B - A)A^{-\alpha}$ 有界 (已知条件), $A^{-(1-\alpha)}$ 有界 $(1 - \alpha > 0)$, 所以

$$BA^{-1} = I + (B - A)A^{-\alpha}A^{-(1-\alpha)}$$

有界. BA^{-1} 是 X 到 X 的有界线性算子, 它有逆算子 AB^{-1}, 由 Banach 逆算子定理知, AB^{-1} 也是有界的.

以下假设 $0<\beta<1$. 由

$$\begin{aligned}B^{-\beta}-A^{-\beta}&=\frac{\sin\pi\beta}{\pi}\int_0^\infty\lambda^{-\beta}[(\lambda I+B)^{-1}-(\lambda I+A)^{-1}]\mathrm{d}\lambda\\&=\frac{\sin\pi\beta}{\pi}\int_0^\infty\lambda^{-\beta}(\lambda I+B)^{-1}(A-B)(\lambda I+A)^{-1}\mathrm{d}\lambda,\end{aligned}$$

得

$$B^\beta A^{-\beta}=I-\frac{\sin\pi\beta}{\pi}\int_0^\infty\lambda^{-\beta}B^\beta(\lambda I+B)^{-1}(A-B)A^{-\alpha}A^\alpha(\lambda I+A)^{-1}\mathrm{d}\lambda.$$

再由假设条件及推论 8.6.16 得

$$\|B^\beta A^{-\beta}\|\leqslant 1+C\left(\int_0^{R_0}\lambda^{-\beta}\mathrm{d}\lambda+\int_{R_0}^\infty\lambda^{-\beta}\lambda^{-1+\beta}\lambda^{-1+\alpha}\mathrm{d}\lambda\right),$$

即 $B^\beta A^{-\beta}$ 在 X 上有界. 类似可证 $A^\beta B^{-\beta}$ 在 X 上有界. 证毕.

推论 8.6.19　设 A 是扇形算子. 对不同的 a, 只要 $\mathrm{Re}\,\sigma(A_1)=\mathrm{Re}\,\sigma(A+aI)>0$, 则 $D(A_1^\alpha)$ 相同且范数

$$\|x\|_\alpha=\|A_1^\alpha x\|,\quad\alpha\geqslant 0$$

是等价的.

证明　易见只需对 $\alpha\in[0,1]$ 情形证明结论成立. 令

$$\tilde{A}=A+a_1I,\quad\tilde{B}=A+a_2I,\quad\mathrm{Re}\,\sigma(\tilde{A})>0,\quad\mathrm{Re}\,\sigma(\tilde{B})>0,$$

则 $\tilde{A}-\tilde{B}=(a_1-a_2)I$ 在 X 上有界. 由定理 8.6.19 知: 对 $\forall\alpha\in[0,1]$, $\tilde{B}^\alpha\tilde{A}^{-\alpha}$ 和 $\tilde{A}^\alpha\tilde{B}^{-\alpha}$ 为 X 上的有界算子, 于是 $R(\tilde{A}^{-\alpha})=R(\tilde{B}^{-\alpha})$, 即 $D(\tilde{A}^\alpha)=D(\tilde{B}^\alpha)$, 当 $\alpha\in[0,1]$.

当 $\alpha\in[0,1]$, 利用

$$\begin{aligned}\|\tilde{B}^\alpha x\|&=\|\tilde{B}^\alpha\tilde{A}^{-\alpha}\tilde{A}^\alpha x\|\leqslant\|\tilde{B}^\alpha\tilde{A}^{-\alpha}\|\cdot\|\tilde{A}^\alpha x\|,\\\|\tilde{A}^\alpha x\|&=\|\tilde{A}^\alpha\tilde{B}^{-\alpha}\tilde{B}^\alpha x\|\leqslant\|\tilde{A}^\alpha\tilde{B}^{-\alpha}\|\cdot\|\tilde{B}^\alpha x\|,\end{aligned}$$

范数 $\|x\|_\alpha$ 等价性得证. 证毕.

今后, X^α 是讨论非线性方程初值问题时的“工作空间”. 所以我们还要研究它的某些性质.

定理 8.6.20　设 A 是扇形算子. 有

(1) $(X^\alpha,\|\cdot\|_\alpha)$ 为一族 Banach 空间, $X^0=X$, 且当 $\alpha\geqslant\beta\geqslant 0$ 时有 $X^\alpha\hookrightarrow X^\beta$. 嵌入为连续且稠密的, 即 X^α 在 X^β 中稠密, 并且若在 X^α 中 $x_n\to x$, 则在 X^β 中 $x_n\to x$;

(2) 若 A 有紧预解式, 则当 $\alpha>\beta\geqslant 0$ 时嵌入为紧的, 即 X^α 中的有界集为 X^β 中的准紧集;

(3) 若 B_1,B_2 是扇形算子, $D(B_1)=D(B_2)$, $\operatorname{Re}\sigma(B_j)>0$ $(j=1,2)$. 同时存在 $0<\alpha<1$ 使得 $(B_1-B_2)B_1^{-\alpha}$ 是有界算子. 对任意 $0\leqslant\beta\leqslant 1$, 记 $X_j^\beta=D(B_j^\beta)$ $(j=1,2)$, 则 $X_1^\beta=X_2^\beta$ 且有等价的范数.

证明 (1) 显然 $(X^\alpha,\|\cdot\|_\alpha)$ 为 Banach 空间, $X^0=X$, 当 $\alpha\geqslant\beta\geqslant 0$ 时 $X^\alpha\subset X^\beta$. 若 $x_n,x\in X^\alpha$, $x_n\xrightarrow{X^\alpha}x$, 则 $x_n,x\in X^\beta$, 且

$$\|x_n-x\|_\beta=\|A_1^\beta(x_n-x)\|=\|A_1^{\beta-\alpha}A_1^\alpha(x_n-x)\|\leqslant M\|A_1^\alpha(x_n-x)\|.$$

于是 $x_n\xrightarrow{X^\beta}x$. 因为 $X^\alpha=D(A_1^\alpha)$ 在 X 中稠密, 所以在 X^β 中稠密.

(2) 因为

$$A_1^\beta=A_1^{\beta-\alpha}A_1^\alpha,$$

并且 $A_1^{-1}=(A+aI)^{-1}$ 是紧的, 所以 $A_1^{-(\alpha-\beta)}=A_1^{\beta-\alpha}$ 是紧的 (习题 8.20), 同时 X^β 紧包含 X^α.

(3) 的证明类似于推论 8.6.19. 证毕.

定理 8.6.21 设 A 是扇形算子, $\operatorname{Re}\sigma(A)>0$, B 是闭线性算子, $D(B)\supset D(A)$. 若对某个 $0<r<1$ 和每个 $\rho\geqslant\rho_0>0$, $x\in D(A)$ 有

$$\|Bx\|\leqslant C(\rho^r\|x\|+\rho^{r-1}\|Ax\|), \tag{6.12}$$

则对任意 $r<\alpha\leqslant 1$ 有

$$D(B)\supset D(A^\alpha)=X^\alpha.$$

证明 设 $x\in D(A^{1-\alpha})$, 则 $A^{-\alpha}x\in D(A)\subset D(B)$. 因为 B 是闭的, 所以只要下式右端的积分收敛, 就有

$$BA^{-\alpha}x=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}Be^{-tA}x\mathrm{d}t \tag{6.13}$$

和

$$\|BA^{-\alpha}x\|\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^\delta t^{\alpha-1}\|Be^{-tA}x\|\mathrm{d}t+\int_\delta^\infty t^{\alpha-1}\|Be^{-tA}x\|\mathrm{d}t\right). \tag{6.14}$$

为证 (6.13) 式右端的积分收敛, 只需证明 (6.14) 式右端是有限数.

显然当 $t>0$ 时 $\mathrm{e}^{-tA}x\in D(A)$. 对于 (6.14) 式右端第一个积分中的被积函数, 取 $\delta=\rho_0^{-1},\rho=t^{-1}$. 因为 $0\leqslant t\leqslant\delta$, 所以 $\rho=t^{-1}\geqslant\rho_0$. 由 (6.12) 式得

$$\begin{aligned}t^{\alpha-1}\|B\mathrm{e}^{-tA}x\|&\leqslant Ct^{\alpha-1}(t^{-r}\|\mathrm{e}^{-tA}x\|+t^{-r+1}\|A\mathrm{e}^{-tA}x\|)\\&\leqslant M_1t^{\alpha-r-1}\|x\|.\end{aligned}$$

对于 (6.14) 式右端的第二个积分中的被积函数, 取 $\rho=\rho_0$, 由 (6.12) 式得

$$\begin{aligned}t^{\alpha-1}\|B\mathrm{e}^{-tA}x\|&\leqslant Ct^{\alpha-1}(\rho_0^r\|\mathrm{e}^{-tA}x\|+\rho_0^{r-1}\|A\mathrm{e}^{-tA}x\|)\\&\leqslant Ct^{\alpha-1}(\rho_0^r+t^{-1}\rho_0^{r-1})M_2\mathrm{e}^{-\delta_1t}\|x\|,\end{aligned}$$

其中 $\delta_1>0$. 这说明 (6.14) 式右端是有限数. 从而 (6.13) 式和 (6.14) 式都成立.

上面的讨论也说明, 对任意 $x\in D(A^{1-\alpha})$, 有

$$\|BA^{-\alpha}x\|\leqslant M\|x\|.$$

因为 $BA^{-\alpha}$ 是闭的且 $D(A^{1-\alpha})$ 在 X 中稠密, 所以对任意 $x\in X$, 有

$$\|BA^{-\alpha}x\|\leqslant M\|x\|,$$

于是有 $D(B)\supset D(A^\alpha)$.

8.7　非线性方程的初值问题

现在可以比 8.6.1 节更一般地来讨论抽象的非线性微分方程

$$u'(t)+Au=f(t,u),\quad t>t_0 \tag{E}$$

及相应的初值问题 (Cauchy 问题)

$$\begin{cases}u'(t)+Au=f(t,u),\quad t>t_0,\\u(t_0)=x.\end{cases} \tag{E$_0$}$$

假定 (H_{X^α}):

(1) A 是 Banach 空间 X 中的扇形算子, 使得 $A_1=A+aI$ 的分数幂是有定义的, 且对于 $\alpha\geqslant0$, 带有图范数 $\|x\|_\alpha=\|A_1^\alpha x\|$ 的空间 $X^\alpha=D(A_1^\alpha)$ 是有意义的.

(2) 对某个 $0\leqslant\alpha<1$, f 把 $\mathbb{R}\times X^\alpha$ 中的某开集 U 映到 X, 并且在 U 上 f 关于 t 局部 Hölder 连续, 关于 u 局部 Lipschitz 连续, 即若 $(t^*,u^*)\in U$, 则存在 (t^*,u^*) 的一个邻域 $V\subset U$, 使得对于 $(t,u),(s,v)\in V$, 有

$$\|f(t,u)-f(s,v)\|\leqslant L(|t-s|^\mu+\|u-v\|_\alpha),$$

其中 L,μ 为某正常数, $0<\mu<1$.

本节的任务, 是把常微分方程的主要结果推广到抽象发展方程 (E). 初值问题 (E_0) 的解的定义由定义 8.6.1 给出, 其中 $X_s=X^\alpha$.

8.7.1 带奇性的 Gronwall 不等式

讨论常微分方程时常常用到 Gronwall 不等式:

设 $v(t)\geqslant 0$ 在 $[t_0,T]$ 上连续. 若存在正常数 C,L, 使得

$$v(t)\leqslant C+L\int_{t_0}^t v(s)\mathrm{d}s,\quad \forall t\in[t_0,T],$$

则

$$v(t)\leqslant C\mathrm{e}^{L(t-t_0)}.$$

而讨论抽象方程 (E) 时, 常常要用到如下带奇性的 Gronwall 不等式.

引理 8.7.1 设 $v(t)\geqslant 0$ 在 $[t_0,T]$ 上连续. 若存在正常数 a,b,α ($\alpha<1$), 使得当 $t\in[t_0,T]$ 时,

$$v(t)\leqslant a+b\int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1}v(s)\mathrm{d}s, \tag{7.1}$$

则存在与 a 无关的正常数 M, 使得

$$v(t)\leqslant Ma,\quad \forall\, t\in[t_0,T].$$

证明 将不等式 (7.1) 迭代 $n-1$ 次, 并利用等式

$$\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1}\mathrm{d}s=(t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

得

$$\begin{aligned}
v(t)&\leqslant a+b\int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1}\left(a+b\int_{t_0}^s (s-\tau)^{\alpha-1}v(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\
&\leqslant a\left(1+b\frac{(T-t_0)^\alpha}{\alpha}\right)+b^2\int_{t_0}^t\left(\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}s\right)v(\tau)\mathrm{d}\tau\\
&=a\left(1+b\frac{(T-t_0)^\alpha}{\alpha}\right)+b^2\frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\int_{t_0}^t (t-\tau)^{2\alpha-1}v(\tau)\mathrm{d}\tau,\\
v(t)&\leqslant a\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{b(T-t_0)^\alpha}{\alpha}\right)^j+\frac{(b\Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(n\alpha)}\int_{t_0}^t (t-\tau)^{n\alpha-1}v(\tau)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

取 n 充分大, 使得 $n\alpha-1>0$, 则有

$$v(t)\leqslant C_1a+C_2\int_{t_0}^t v(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

其中常数 C_1, C_2 只依赖于 $T-t_0$, b 和 α, 与 a 无关. 最后利用 Gronwall 不等式可得结论.

8.7.2 与初值问题等价的积分方程

如同定理 8.6.3, 先建立初值问题 (E_0) 与积分方程

$$u(t)=\mathrm{e}^{-(t-t_0)A}x+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-(t-s)A}f(s,u(s))\mathrm{d}s \tag{7.2}$$

的等价性.

定理 8.7.2 假设 $0\leqslant\alpha<1$, 条件 (H_{X^α}) 成立, $x\in X^\alpha$. 有

(1) 若 u 是 $[t_0,t_1)$ 上问题 (E_0) 的解, 则在 $[t_0,t_1)$ 上 $u(t)$ 满足 (7.2) 式;

(2) 若 u 是从 $[t_0,t_1)$ 到 X^α 的一个连续函数, 且对某个 $\rho>0$, 积分 $\int_{t_0}^{t_0+\rho}\|f(s,u(s))\|\mathrm{d}s<\infty$, 又对 $t_0\leqslant t<t_1$, u 满足 (7.2) 式, 则 u 是 $[t_0,t_1)$ 上问题 (E_0) 的解.

证明 (1) 的证明与定理 8.6.3 的 (1) 相同.

(2) 设 $u\in C([t_0,t_1),X^\alpha)$ 满足 (7.2) 式. 又设对某个 $\rho>0$, $\int_{t_0}^{t_0+\rho}\|f(s,u(s))\|\mathrm{d}s<\infty$, 只需证 $u:(t_0,t_1)\to X^\alpha$ 是局部 Hölder 连续的. 其余的证明与定理 8.6.3 的 (2) 相同. 以下不妨设 $\mathrm{Re}\,\sigma(A)>0$.

若 $[t_0^*,t_1^*]\subset(t_0,t_1)$, $t_0^*<t<t+h<t_1^*$, 则

$$\begin{aligned}u(t+h)-u(t)=&(\mathrm{e}^{-hA}-I)\mathrm{e}^{-(t-t_0)A}x+\int_{t_0}^{t}(\mathrm{e}^{-hA}-I)\mathrm{e}^{-(t-s)A}f(s,u(s))\mathrm{d}s\\&+\int_{t}^{t+h}\mathrm{e}^{-(t+h-s)A}f(s,u(s))\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

取 $0<\delta<1-\alpha$, 则对任意 $z\in X$, 由定理 8.6.13 得

$$\begin{aligned}\|(\mathrm{e}^{-hA}-I)\mathrm{e}^{-(t-s)A}z\|_\alpha&=\|(\mathrm{e}^{-hA}-I)A^\alpha\mathrm{e}^{-(t-s)A}z\|\leqslant C_0h^\delta\|A^{\delta+\alpha}\mathrm{e}^{-(t-s)A}z\|\\&\leqslant C_1h^\delta(t-s)^{-(\delta+\alpha)}\|z\|,\quad 0<s<t.\end{aligned}$$

同时又有

$$\|(\mathrm{e}^{-hA}-I)\mathrm{e}^{-(t-t_0)A}x\|_\alpha\leqslant C_0h^\delta\|A^{\delta+\alpha}\mathrm{e}^{-(t-t_0)A}x\|\leqslant C_2h^\delta\|x\|,\quad t\in[t_0^*,t_1^*].$$

于是

$$\begin{aligned}\|u(t+h)-u(t)\|_\alpha\leqslant&C_2h^\delta\|x\|+C_1h^\delta\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-(\alpha+\delta)}\|f(s,u(s))\|\mathrm{d}s\\&+C_3\int_{t}^{t+h}(t+h-s)^{-\alpha}\|f(s,u(s))\|\mathrm{d}s\leqslant Mh^\delta.\end{aligned}$$

因此 $u:(t_0,t_1)\to X^\alpha$ 是局部 Hölder 连续的. 证毕.

8.7.3 解的局部存在性和唯一性

先对积分方程 (7.2) 利用压缩映射原理, 而后利用定理 8.7.2, 可得

定理 8.7.3 (解的局部存在性和唯一性) 假设 $0\leqslant\alpha<1$, 条件 (H_{X^α}) 成立. 任给 $(t_0,x)\in U$, 存在 $T=T(t_0,x)$ 使得在 $[t_0,t_0+T)$ 上 (E_0) 有唯一解.

证明 对 $\alpha=0$ 情形该定理即为定理 8.6.4, 其积分方程连续解的存在性证明同定理 8.3.5. 下面只考虑 $0<\alpha<1$ 情形.

此时本定理的证明思想类似定理 8.3.5, 与 $\alpha=0$ 情形不同的是这里取 $\delta>0$, $\tau>0$, 使得

$$V=\{(t,u):t_0\leqslant t\leqslant t_0+\tau,\ \|u-x\|_\alpha\leqslant\delta\}\subset U,$$

由 (H_{X^α}), 对 $\forall(t,u_1),(t,u_2)\in V$ 有

$$\|f(t,u_1)-f(t,u_2)\|\leqslant L\|u_1-u_2\|_\alpha. \tag{7.3}$$

取 $0<T\leqslant\tau$, 定义完备的度量空间

$$Y=\{v:v\in C([t_0,t_0+T],X^\alpha)\},\quad \|v\|_Y=\max\{\|v(t)\|_{X^\alpha}:t\in[t_0,t_0+T]\},$$

取

$$S=\{v:v\in Y,\|v(t)-x\|_Y\leqslant\delta\}.$$

对于 $v\in S$, 定义映射

$$G(v)(t)=\mathrm{e}^{-(t-t_0)A}x+\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}f(s,v(s))\mathrm{d}s,$$

下面证明可适当选取 T, 使得 G 是映 S 到自身的压缩映射.

显然, 若 $v\in X^\alpha$, 则 $G(v)\in X^\alpha$. 利用 $x\in X^\alpha$, (7.3) 及估计

$$\|A_1^\alpha\mathrm{e}^{-tA}\|\leqslant Mt^{-\alpha}\mathrm{e}^{at},\quad \forall t>0;$$

易证可取 $T>0$ 充分小, 使得对任意 $v\in S$, 有

$$\begin{aligned}\|G(v)(t)-x\|_\alpha\leqslant&\|(\mathrm{e}^{-(t-t_0)A}-I)x\|_\alpha+\int_{t_0}^t\|A_1^\alpha\mathrm{e}^{-(t-s)A}f(s,v(s))\|\mathrm{d}s\\ \leqslant&\frac{\delta}{2}+\int_{t_0}^t\|A_1^\alpha\mathrm{e}^{-(t-s)A}f(s,x)\|\mathrm{d}s\\ &+\int_{t_0}^t\|A_1^\alpha\mathrm{e}^{-(t-s)A}[f(s,v(s))-f(s,x)]\|\mathrm{d}s\\ \leqslant&\frac{\delta}{2}+M(K+L\delta)\int_0^T\tau^{-\alpha}\mathrm{e}^{a\tau}\mathrm{d}\tau\leqslant\delta,\end{aligned}$$

即 $G(v) \in S$.

进而对任意 $u, v \in S$, 有

$$\begin{aligned}\|G(u)(t) - G(v)(t)\|_\alpha &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|A_1^\alpha e^{-(t-s)A}\| \cdot \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \\ &\leqslant ML \int_0^T \tau^{-\alpha} e^{a\tau} d\tau \|u - v\|_s \leqslant \frac{1}{2}\|u - v\|_s,\end{aligned}$$

即 G 是压缩的.

由压缩映射原理, G 在 S 中有唯一不动点 u, 故 u 是积分方程 (7.2) 的一个连续解.

又因为

$$\|f(t, u(t))\| \leqslant \|f(t, u(t)) - f(t, x)\| + \|f(t, x)\| \leqslant L\delta + K,$$

所以

$$\int_{t_0}^{t_0+\rho} \|f(t, u(t))\| dt < \infty.$$

于是由定理 8.7.2, $u(t)$ 也是初值问题 (E_0) 在 $[t_0, t_0 + T)$ 上的唯一解. 证毕.

8.7.4　解的延拓

定理 8.7.4　假设 $0 \leqslant \alpha < 1$, 条件 (H_{X^α}) 成立, $x \in X^\alpha$. 又设对每个有界闭集 $B \subset U$, 像集 $f(B)$ 在 X 中有界. 若 u 是 $[t_0, T_{\max})$ 上初值问题 (E_0) 的解且 $T_{\max}$ 是最大的, 那么或者 $T_{\max} = \infty$, 或者存在序列 $t_n \to T_{\max}^-$ $(n \to \infty)$ 使得 $(t_n, u(t_n)) \to \partial U$ (若 U 无界, 认为无穷远点包含在 ∂U 中).

证明　用反证法. 若不然, 则 $T_{\max} < +\infty$, 存在有界闭集 $B \subset U$ 及 $\tau_0 < T_{\max}$, 使得当 $\tau_0 \leqslant t < T_{\max}$ 时, $(t, u(t)) \in B$. 若证得在 X 中存在 $\lim\limits_{t \to T_{\max}^-} u(t) = x_* \in B$, 由局部存在性定理知, 解还可延拓到 $t > T_{\max}$ (满足 $u(T_{\max}) = x_*$), 这与 $T_{\max}$ 的最大性矛盾. 因此, 余下的是证明: 存在 $x_* \in B$, 在 X 中有 $\lim\limits_{t \to T_{\max}^-} u(t) = x_*$.

分两步证明. 先证明对任意 $\beta (\alpha < \beta < 1)$, 当 $\tau_0 \leqslant t < T_{\max}$ 时,

$$\|u(t)\|_\beta \leqslant M \quad (M \text{ 为常数}).$$

因为 $f(B)$ 有界, 可设 $C = \sup\{\|f(t, u)\|, (t, u) \in B\}$. 于是

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_\beta &\leqslant \|A_1^{\beta-\alpha} e^{-(t-t_0)A}\| \|u(t_0)\|_\alpha + \int_{t_0}^{t} \|A_1^\beta e^{-(t-s)A}\| \|f(s, u(s))\| ds \\ &\leqslant M_1 \left[(t - t_0)^{-(\beta-\alpha)} \|u(t_0)\|_\alpha + \int_{t_0}^{t} (t - s)^{-\beta} ds \right] \\ &\leqslant M, \quad t_0 < \tau_0 \leqslant t < T_{\max}.\end{aligned}$$

再估计 $\|u(t)-u(\tau)\|$, 其中 $\tau_0 \leqslant \tau < t < T_{\max}$. 因为

$$u(t)-u(\tau)=(e^{-(t-\tau)A}-I)u(\tau)+\int_\tau^t e^{-(t-s)A}f(s,u(s))\mathrm{d}s,$$

所以

$$\begin{aligned}\|u(t)-u(\tau)\|_\alpha &\leqslant C_1(t-\tau)^{\beta-\alpha}\|u(\tau)\|_\beta+C_2\int_\tau^t(t-s)^{-\alpha}\mathrm{d}s\\ &\leqslant C_3(t-\tau)^{\beta-\alpha}.\end{aligned}$$

由这个估计式立即可得存在 $\lim\limits_{t\to T_{\max}^-}u(t)=x_*, B$ 是闭的, 所以 $(T_{\max},x_*)\in B$. 证毕.

推论 8.7.5 假设 $0\leqslant\alpha<1$, 条件 (H_{X^α}) 成立, $U=(\tau,\infty)\times X^\alpha$. 又对任意 $(t,u)\in U$, f 满足

$$\|f(t,u)\|\leqslant k(t)(1+\|u\|_\alpha),$$

其中函数 $k(\cdot)$ 在 (τ,∞) 上连续非负. 若 $t_0>\tau, x\in X^\alpha$, 则对一切 $t\geqslant t_0$, (E_0) 的解存在且唯一.

证明 由反证法, 假设此推论不成立, 则由延拓性定理 8.7.4 知存在 $T_{\max}<\infty$ 和 $t_n\to T_{\max}^-$, 使得 $\|u(t_n)\|_\alpha\to\infty$. 但是,

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_\alpha &\leqslant \|\mathrm{e}^{-(t-t_0)A}x\|_\alpha+\int_{t_0}^t\|A_1^\alpha\mathrm{e}^{-(t-s)A}\|k(s)(1+\|u(s)\|_\alpha)\mathrm{d}s\\ &\leqslant C_1\|x\|_\alpha+\int_{t_0}^t C_2(t-s)^{-\alpha}(1+\|u(s)\|_\alpha)\mathrm{d}s\\ &\leqslant a+b\int_{t_0}^t(t-s)^{-\alpha}\|u(s)\|_\alpha\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由带奇性的 Gronwall 不等式得 $\|u(t)\|_\alpha\leqslant M$, 这是一个矛盾. 证毕.

8.7.5 解的紧性

定理 8.7.6 假设 $0\leqslant\alpha<1$, 条件 (H_{X^α}) 成立, A 有紧的预解式, 并且对任意有界闭集 $B\subset X^\alpha$, $\mathbb{R}^+\times B\subset U\subset\mathbb{R}^+\times X^\alpha$, 像集 $f(\mathbb{R}^+\times B)$ 在 X 中都有界. 若 $u(t;t_0,x)$ 是 $[t_0,\infty)$ 上 (E_0) 的一个解, 当 $t\to\infty$ 时 $\|u(t;t_0,x)\|_\alpha$ 有界, 则 $\{u(t;t_0,x)\}_{t>t_0}$ 是 X^α 中的一个紧集.

证明 已知当 A 有紧预解式时, 若 $0\leqslant\alpha<\beta<1$, 则 $X^\beta\subset X^\alpha$ 是紧包含关系. 因而, 只要证明当 $t\geqslant t_0+1$ 时 $\|u(t;t_0,x)\|_\beta$ 有界即可.

先设 $\mathrm{Re}\,\sigma(A)\geqslant\delta>0$. 由已知条件, $\|u(t;t_0,x)\|_\alpha$ 有界, 所以存在正常数 C, 使

得 $\|f(t,u(t;t_0,x))\| \leqslant C,\ \forall\, t \geqslant t_0$. 因此,

$$\begin{aligned}\|u(t;t_0,x)\|_\beta &\leqslant \|A^{\beta-\alpha}\mathrm{e}^{-(t-t_0)A}\| \cdot \|x\|_\alpha + \int_{t_0}^t \|A^\beta \mathrm{e}^{-(t-s)A}\| \cdot \|f(s,u(s))\|\mathrm{d}s \\ &\leqslant M_0(t-t_0)^{-(\beta-\alpha)}\mathrm{e}^{-\delta(t-t_0)}\|x\|_\alpha + M_0\int_{t_0}^t (t-s)^{-\beta}\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}\mathrm{d}s \\ &\leqslant M, \quad \forall\, t \geqslant t_0+1.\end{aligned}$$

若 $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > -a$, 则 $\mathrm{Re}\,\sigma(A+aI) > 0$. 令 $g(t,u) = f(t,u) + au$, 并考察

$$u'(t) + (A+aI)u = g(t,u).$$

由于

$$\|au\| = \|A^{-\alpha}A^\alpha au\| \leqslant M\|au\|_\alpha,$$

所以 g 与 f 满足相同条件. 同上可证当 $t \geqslant t_0+1$ 时, $\|u(t;t_0,x)\|_\beta$ 有界. 证毕.

注 7.1 如果不假定 A 有紧预解式, 那么上述论证证明了: 若解在 X^α 中有界, 则解在 X^β 中也有界, 其中 $0 \leqslant \alpha < \beta < 1$. 当然, f 仍满足定理的条件.

8.7.6 解的连续性和可微性

现在讨论解对右端函数及初值、参数的连续性和可微性. 设有初值问题

$$\begin{cases} u'(t) + \mu_n Au = f_n(t,u), \quad n = 1,2,\cdots, \\ u(t_0) = x_n \end{cases} \tag{7.4}$$

和

$$\begin{cases} u'(t) + \mu_0 Au = f_0(t,u), \\ u(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{7.5}$$

它们的解分别记为 $\varphi_n(t), \varphi_0(t)$. 如果当 $n \to \infty$ 时,

$$f_n(t,u) \to f_0(t,u), \quad \mu_n \to \mu_0, \quad x_n \to x_0,$$

那么 $\varphi_n(t) \to \varphi_0(t)$ 是否成立? 下面的定理回答了这个问题.

定理 8.7.7 假设

(1) A 是扇形算子;

(2) 对某个 $\alpha \in [0,1), U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$ 是开集, $\{f_n(t,u), n = 0,1,2,\cdots\}$ 是 U 到 X 的函数序列, 每个 f_n 关于 u 局部 Lipschitz 连续, 关于 t 局部 Hölder 连续, 并且

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t,u) = f_0(t,u)$$

对于 U 的任意一点邻域中的 (t,u) 一致成立;

(3) $(t_0,x_n)\in U$, 并且当 $n\to\infty$ 时 $\|x_n-x_0\|_\alpha\to 0$, 实数 $\mu_n\to\mu_0>0$;

(4) $\varphi_0(t)$ 是问题 (7.5) 的极大定义解, 它在 $[t_0,t_0+T_0)$ 上存在.

则对任意 $t_1\in(t_0,t_0+T_0)$, 当 n 充分大时问题 (7.4) 的解 $\varphi_n(t)$ 在 $[t_0,t_1]$ 上存在, 并在 $[t_0,t_0+T_0)$ 的紧子区间上一致地有

$$\|\varphi_n(t)-\varphi_0(t)\|_\alpha\to 0.$$

证明 不妨认为 $t_0=0$, $x_0=0$, $\mu_0=1, 1/2<\mu_n<2$. 进一步可设在 $[0,T_0)$ 上 $f_0(t,0)=0,\varphi_0(t)=0$. 不然的话, 考察 $v(t)=u(t)-\varphi_0(\mu_n t)$, 相应的方程是

$$v'(t)+\mu_n Av=f_n(t,v+\varphi_0(\mu_n t))-\mu_n f_0(\mu_n t,\varphi_0(\mu_n t)).$$

任取 $t_1\in(0,T_0)$, 于是 $[0,t_1]\times\{0\}$ 是 U 上的一个紧集, 因此存在 $\delta>0$ 和 $L>0$, 使得当 $\|u_1\|_\alpha$, $\|u_2\|_\alpha\leqslant\delta$, $0\leqslant t\leqslant t_1$ 时,

$$\|f_0(t,u_1)-f_0(t,u_2)\|\leqslant L\|u_1-u_2\|_\alpha,$$

而且当 $0\leqslant t\leqslant t_1$, $\|u\|_\alpha\leqslant\delta$ 时一致地有 $\|f_n(t,u)-f_0(t,u)\|\to 0$. 由此也可得到, 当 $0\leqslant t\leqslant t_1$, $\|u\|_\alpha\leqslant\delta$ 时, 对充分大的 n, $\|f_n(t,u)\|$ 有界.

对于充分大的 n, $\varphi_n(t)$ 在 $[0,t_1]$ 上有定义. 事实上, 只要在 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant t_1$ 上 $\|\varphi_n(s)\|_\alpha\leqslant\delta$, 就有

$$\begin{aligned}\|\varphi_n(t)\|_\alpha&\leqslant\|e^{-\mu_n At}x_n\|_\alpha+\left\|\int_0^t e^{-\mu_n(t-s)A}[f_n(s,\varphi_n(s))-f_0(s,\varphi_n(s))]ds\right\|_\alpha\\&\quad+\left\|\int_0^t e^{-\mu_n(t-s)A}f_0(s,\varphi_n(s))ds\right\|_\alpha\\&\leqslant Me^{-\mu_n at}\|x_n\|_\alpha+M\mu_n^{-\alpha}\int_0^t(t-s)^{-\alpha}e^{\mu_n a(t-s)}\Delta_n ds\\&\quad+LM\mu_n^{-\alpha}\int_0^t(t-s)^{-\alpha}e^{\mu_n a(t-s)}\|\varphi_n(s)\|_\alpha ds\\&\leqslant C_1(\|x_n\|_\alpha+\Delta_n)+C_2\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\|\varphi_n(s)\|_\alpha ds,\end{aligned}$$

其中

$$\Delta_n=\sup\{\|f_n(t,u)-f_0(t,u)\|:\ 0\leqslant t\leqslant t_1,\|u\|_\alpha\leqslant\delta\}.$$

再由带奇性的 Gronwall 不等式得

$$\|\varphi_n(t)\|_\alpha\leqslant C(\|x_n\|_\alpha+\Delta_n)\quad(n\ 充分大),\tag{7.6}$$

其中 C 与 n 无关. 只要 n 充分大, 就有

$$C(\|x_n\|_\alpha + \Delta_n) < \delta.$$

因此, 由解的延拓定理知, 当 n 充分大时在 $[0,t_1]$ 上 $\varphi_n(t)$ 存在, 并且 (7.6) 式在 $0 \leqslant t \leqslant t_1$ 上成立. 从而当 $n \to \infty$ 时, 在 $0 \leqslant t \leqslant t_1$ 上一致地有 $\|\varphi_n(t)\|_\alpha \to 0$. 证毕.

下面叙述解对初值、参数的可微性定理, 其证明可见 [Hen, p.64, Th3.4.4].

定理 8.7.8　假设

(1) A 是 X 上的扇形算子;

(2) 对某个 $\alpha \in [0,1), U$ 在 $\mathbb{R} \times X^\alpha$ 中是开的, Λ 在 Banach 空间 L 中是开的, $f: U \times \Lambda \to X, f, D_u f$, $D_\lambda f$ 在 $U \times \Lambda$ 上连续, 而 $t \mapsto f(t,u,\lambda)$ 对 t 是局部 Hölder 连续的;

(3) 对于 $\mu > 0, \lambda \in \Lambda, (\tau,\xi) \in U$, 记 $u(t) = u(t;\tau,\xi,\lambda,\mu)$ 是问题

$$\begin{cases} u'(t) + \mu A u = f(t,u,\lambda), \quad t > \tau, \\ u(\tau) = \xi \end{cases}$$

的极大定义的解.

那么, $(\xi,\lambda,\mu) \mapsto u(t;\tau,\xi,\lambda,\mu)$ 在解的存在区域上是从 $X^\alpha \times \Lambda \times \mathbb{R}^+$ 到 X^α 中连续可微的, 导数

$$h(t) = D_\xi u(t), \quad v(t) = D_\lambda u(t), \quad w(t) = D_\mu u(t)$$

分别是

$$\begin{cases} h'(t) + \mu A h = D_u f(t,u(t),\lambda) h, \\ h(\tau) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'(t) + \mu A v = D_u f(t,u(t),\lambda) v + D_\lambda f(t,u(t),\lambda), \\ v(\tau) = 0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} w'(t) + \mu A w = D_u f(t,u(t),\lambda) w - A u(t), \\ w(\tau) = 0 \end{cases}$$

的适度解.

若 $(t,u) \mapsto D_u f, D_\lambda f$ 在 U 上还是 Hölder 连续的, 则它们都是古典解.

8.7.7 微分方程的光滑作用

在前面的讨论中已经看到, 扇形算子对应的微分方程有某种光滑效应, 即在 H_{X^α} 条件下若初值 $x \in X^\alpha$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$, 则对任意 $t > t_0$, $u(t,x) \in D(A) = X^1$. 下面将证明扇形算子对应的微分方程有进一步的光滑效应, 即在一定条件下, 可证明: 若 $x \in X^\alpha$, 则对任意 $r < 1$, 在解的存在区间上 $u'(t;x) \in X^r$, 且是 Hölder 连续的.

先证明一个引理.

引理 8.7.9 设 A 是扇形算子, 常数 $r_0 > 0$, $g : (0,T) \to X$ 满足:

$$\|g(t) - g(s)\| \leqslant k(s)(t-s)^{r_0}, \quad 0 < s < t < T < \infty, \tag{7.7}$$

其中 $k(\cdot)$ 在 $(0,T)$ 连续且 $\int_0^T k(s)\mathrm{d}s < \infty$. 令

$$G(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A} g(s)\mathrm{d}s, \quad t \in (0,T),$$

那么只要 $0 \leqslant r < r_0$, 就有

(1) $G : (0,T) \to X^r$ 是连续可微的, 且

$$\|G'(t)\|_r \leqslant Mt^{-r}\|g(t)\| + M\int_0^t (t-s)^{r_0-r-1}k(s)\mathrm{d}s, \quad 0 < t < T, \tag{7.8}$$

其中 M 是不依赖于 r_0, r 和 $g(\cdot)$ 的常数;

(2) 若对某个 $\delta > 0$,

$$\int_0^h k(s)\mathrm{d}s = O(h^\delta) \quad (h \to 0^+),$$

则 $G'(t)$ 从 $(0,T)$ 到 X^r 是局部 Hölder 连续的.

证明 (1) 由定理 8.5.2 证明知, $G(t) \in C^1((0,T),X) \cap C((0,T),D(A))$, 并且

$$G'(t) = -AG(t) + g(t).$$

以下不妨设 $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$. 由于

$$-AG(t) + g(t) = -\int_0^t A\mathrm{e}^{-(t-s)A}g(s)\mathrm{d}s + \int_0^t A\mathrm{e}^{-(t-s)A}g(t)\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-tA}g(t),$$

令

$$H(t) = \int_0^t A\mathrm{e}^{-(t-s)A}[g(t) - g(s)]\mathrm{d}s,$$

知

$$G'(t) = \mathrm{e}^{-tA}g(t) + H(t).$$

因为

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{-tA}g(t)\|_r &\leqslant M_1 t^{-r}\|g(t)\|,\\ \|H(t)\|_r &\leqslant \int_0^t \|A^{1+r}\mathrm{e}^{-(t-s)A}\| \cdot \|g(t)-g(s)\|\mathrm{d}s\\ &\leqslant M_2\int_0^t (t-s)^{-r-1+r_0}k(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

所以 (7.8) 式成立.

(2) 任取 $[t_1, t_2] \subset (0, T)$. 对任意 $t_1 \leqslant t < t+h \leqslant t_2$, 有

$$H(t+h) - H(t) = \Delta_1 + \Delta_2,$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \int_0^h A\mathrm{e}^{-(t+h-s)A}(g(t+h)-g(s))\mathrm{d}s,\\ \Delta_2 &= \int_0^t A\mathrm{e}^{-(t-s)A}[g(t+h)-g(s+h)-g(t)+g(s)]\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&\|\Delta_1\|_r \leqslant M_1\int_0^h (t+h-s)^{r_0-1-r}k(s)\mathrm{d}s \leqslant M_1 t^{r_0-1-r}\int_0^h k(s)\mathrm{d}s \leqslant M_2 h^\delta,\\ &\|\Delta_2\|_r \leqslant \int_0^\sigma + \int_\sigma^{t-h} + \int_{t-h}^t,\\ &\quad\int_0^\sigma \leqslant M_3\int_0^\sigma (t-s)^{-1-r}[k(t)+k(s)]h^{r_0}\mathrm{d}s\\ &\qquad \leqslant h^{r_0}\left(M_4\int_0^\sigma k(s)\mathrm{d}s + M_4'\right) \quad (\sigma \text{ 充分小}),\\ &\int_\sigma^{t-h} \leqslant M_5\int_\sigma^{t-h} h^{r_0}(t-s)^{-1-r}\mathrm{d}s \leqslant M_6 h^{r_0-r},\\ &\quad\int_{t-h}^t \leqslant M_6\int_{t-h}^t (t-s)^{r_0-1-r}\mathrm{d}s \leqslant M_7 h^{r_0-r},\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{-(t+h)A}g(t+h)-\mathrm{e}^{-tA}g(t)\|_r &\leqslant \|\mathrm{e}^{-(t+h)A}[g(t+h)-g(t)]\|_r + \|(\mathrm{e}^{-(t+h)A}-\mathrm{e}^{-tA})g(t)\|_r\\ &\leqslant M_8 h^{r_0} + M_9 h,\end{aligned}$$

所以 $G'(t)$ 从 $(0,T)$ 到 X^r 是局部 Hölder 连续的. 证毕.

定理 8.7.10 设 A 是扇形算子, 对某个 $0 \leqslant \alpha < 1$, 开集 $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$, $f: U \to X$ 是局部 Lipschitz 的. 又设 $u(\cdot)$ 是初值问题 (E_0) 在 $[t_0, t_1]$ 上的解, 而且 $(t_0, x) \in U$. 则对于 $0 < r < 1$, $u'(t) \in X^r$, 并且在 (t_0, t_1) 上是局部 Hölder 连续的. 同时, 存在常数 C 使得

$$\|u'(t)\|_r \leqslant C(t - t_0)^{\alpha - r - 1}. \tag{7.9}$$

证明 初值问题 (E_0) 的解 $u(\cdot)$ 满足

$$u(t) = \mathrm{e}^{-(t-t_0)A}x + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-(t-s)A} f(s, u(s))\mathrm{d}s. \tag{7.10}$$

令 $g(t) = f(t, u(t))$, 下面验证 $g(t)$ 满足条件 (7.7).

对任意的 $t, s \in (t_0, t_1]$, 有

$$\|g(t) - g(s)\| \leqslant L(|t - s| + \|u(t) - u(s)\|_\alpha).$$

若 $t_0 < \tau < t < t + h \leqslant t_1$, 由 (7.10) 式知

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) =& (\mathrm{e}^{-hA} - I)\mathrm{e}^{-(t-\tau)A}u(\tau) + \int_\tau^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}[g(s+h) - g(s)]\mathrm{d}s \\ &+ \int_\tau^{\tau+h} \mathrm{e}^{-(t+h-s)A} g(s)\mathrm{d}s \\ :=& \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3. \end{aligned}$$

因为对任意 $\alpha < \beta < 1$, 有

$$\begin{aligned} &\|\Delta_1\|_\alpha \leqslant C_1 h \|A^{\alpha+1-\beta}\mathrm{e}^{-(t-\tau)A}A^\beta u(\tau)\| \leqslant C_2 h(t-\tau)^{\beta-1-\alpha}\|u(\tau)\|_\beta, \\ &\|\Delta_2\|_\alpha \leqslant C_3 \int_\tau^t (t-s)^{-\alpha}\|g(s+h) - g(s)\|\mathrm{d}s, \\ &\|\Delta_3\|_\alpha \leqslant C_4 \int_\tau^{\tau+h} (t+h-s)^{-\alpha}\|g(s)\|\mathrm{d}s \leqslant C_5 h(t-\tau)^{-\alpha}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \|g(t+h) - g(t)\| \leqslant& Lh + M_1 h[(t-\tau)^{\beta-1-\alpha}\|u(\tau)\|_\beta + (t-\tau)^{-\alpha}] \\ &+ M_1 \int_\tau^t (t-s)^{-\alpha}\|g(s+h) - g(s)\|\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

利用带奇性的 Gronwall 不等式得

$$\|g(t+h) - g(t)\| \leqslant M_2 h[(t-\tau)^{\beta-1-\alpha}\|u(\tau)\|_\beta + 1 + (t-\tau)^{-\alpha}] := hk(t),$$

其中

$$k(t) = M_2[(t-\tau)^{\beta-1-\alpha}\|u(\tau)\|_\beta + 1 + (t-\tau)^{-\alpha}].$$

取 $r_0 = 1$, 那么 $g(t), k(t)$ 满足引理 8.7.9 的全部条件. 易证 $Ae^{-(t-t_0)A}x$ 在 $(t_0, t_1]$ 上局部 Lipschitz 连续. 因此, 由引理 8.7.9 的结论 (2) 知, $u'(t) : (\tau, t_1] \to X^r$ $(r < 1)$ 是局部 Hölder 连续的. 再利用引理 8.7.9 的结论 (1) 知

$$\|G'(t)\|_r \leqslant M_2(t-\tau)^{-r} + M_2\int_\tau^t (t-s)^{-r}[(s-\tau)^{\beta-1-\alpha}\|u(\tau)\|_\beta + (s-\tau)^{-\alpha}]\mathrm{d}s.$$

因为

$$\int_\tau^t (t-s)^{-r}(s-\tau)^{-\alpha}\mathrm{d}s = (t-\tau)^{1-r-\alpha}\int_0^1 s^{-\alpha}(1-s)^{-r}\mathrm{d}s,$$

所以

$$\|G'(t)\|_r \leqslant M_4[(t-\tau)^{\beta-r-\alpha}\|u(\tau)\|_\beta + (t-\tau)^{-r}]. \tag{7.11}$$

注意到 $\alpha < \beta$, 利用

$$A_1^\beta u(t) = A_1^{\beta-\alpha}A_1^\alpha u(t) = A_1^{\beta-\alpha}A_1^\alpha e^{-(t-t_0)A}u(t_0) = A_1^{\beta-\alpha}e^{-(t-t_0)A}A_1^\alpha u(t_0)$$

和定理 8.6.13 的结论 (1) 得

$$\|u(\tau)\|_\beta \leqslant \|A_1^{\beta-\alpha}e^{-(t-t_0)A}\| \cdot \|A_1^\alpha u(t_0)\| \leqslant C(\tau-t_0)^{\alpha-\beta}\|u(t_0)\|_\alpha \leqslant M_5(\tau-t_0)^{\alpha-\beta}.$$

将其代入 (7.11) 式, 并取

$$t-\tau = \tau - t_0 = \frac{1}{2}(t-t_0),$$

得

$$\|G'(t)\|_r \leqslant M_6[(t-\tau)^{\beta-r-\alpha}(\tau-t_0)^{\alpha-\beta} + (t-\tau)^{-r}] \leqslant N_7(t-t_0)^{-r}.$$

又

$$\|Ae^{-(t-t_0)A}x\|_r = \|A^{r+1-\alpha}e^{-(t-t_0)A}A^\alpha x\| \leqslant M_8(t-t_0)^{\alpha-r-1},$$

所以 (7.9) 式成立. 证毕.

8.8　应用与例子

8.8.1　由微分算子所确定的扇形算子

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界光滑区域, 考虑 $2m$ 阶偏微分算子

$$A(x, D) = -\sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x)D^\alpha,$$

其中 $a_\alpha(x)$ 是 $\overline{\Omega}$ 上足够光滑的复值函数. 例如 $a_\alpha(x)\in C^{2m}(\overline{\Omega})$ 或 $C^\infty(\overline{\Omega})$.

定义 8.8.1 若存在常数 $C>0$, 使得对任意 $x\in\Omega$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\operatorname{Re}\left[(-1)^{m-1}\sum_{|a|=2m}a_\alpha(x)\xi^\alpha\right]\geqslant C|\xi|^{2m},$$

其中 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n),\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m),\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k=|\alpha|,\alpha_k$ 为非负整数, $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$. 则称 $A(x,D)$ 在 Ω 上是强椭圆型的.

我们总假设 $A(x,D)$ 是 Ω 上强椭圆型的 $2m$ 阶偏微分算子. 引进 $A(x,D)$ 的形式共轭算子

$$A^*(x,D)u=-\sum_{|\alpha|\leqslant 2m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(\overline{a_\alpha(x)}u),$$

用 $\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega)$ 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W_p^k(\Omega)$ 中的闭包. 对任意 $1<p<\infty$, 在 $L_p(\Omega)$ 中引进算子 A_p:

$$A_pu=A(x,D)u,$$

A_p 的定义域是

$$D(A_p)=W_p^{2m}(\Omega)\bigcap\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega).$$

同样, 对 $q=p/(p-1)$, 在 $L_q(\Omega)$ 中引进

$$A_q^*u=A^*(x,D)u,\quad D(A_q^*)=W_q^{2m}(\Omega)\bigcap\overset{\circ}{W}{}_q^m(\Omega).$$

下面将证明 A_p 是扇形算子. 为此, 先证明判断扇形算子的一个定理.

定理 8.8.2 设 B 是 X 上的闭稠定线性算子, B' 是 B 的共轭算子, 存在常数 $R_0>0,C>0,\varphi\in(0,\pi/2)$, 使得当 $\lambda\in\mathbb{C},|\lambda|>R_0,|\arg\lambda|\geqslant\varphi$ 时, 对任意 $u\in D(B)$ 有

$$\|u\|\leqslant\frac{C}{|\lambda|}\|(\lambda I-B)u\|,\tag{8.1}$$

且方程 $(\bar{\lambda}I-B')v=0$ 只有零解, 则 B 是扇形算子.

证明 由 (8.1) 式知, 当 $\lambda\in\mathbb{C}$, $|\lambda|>R_0$, $|\arg\lambda|\geqslant\varphi$ 时, $(\lambda I-B)^{-1}$ 存在, 且对任意 $u\in D((\lambda I-B)^{-1})=R(\lambda I-B)$, 有

$$\|(\lambda I-B)^{-1}u\|\leqslant\frac{C}{|\lambda|}\|u\|,$$

即

$$\|(\lambda I-B)^{-1}\|\leqslant C/|\lambda|.$$

现在证 $R(\lambda I - B) = X$. 因为 $(\lambda I - B)'v = (\bar{\lambda} I - B')v = 0$ 只有零解, 并且 $\lambda I - B$ 是闭稠定线性算子, 若能证明 $R(\lambda I - B)$ 是闭的, 则 $R(\lambda I - B) = X$. 下面证明 $R(\lambda I - B)$ 是闭的.

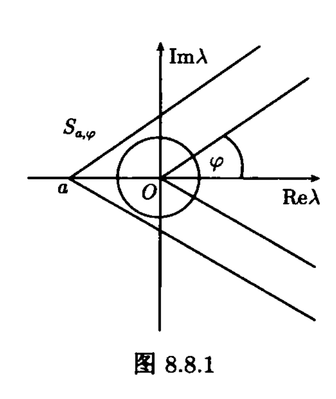


图 8.8.1

设 $v_n \in R(\lambda I - B)$, $v_n \to v$, 则存在 $u_n \in D(B)$ 使得 $(\lambda I - B)u_n = v_n$. 由 (8.1) 式知

$$\|u_n - u_l\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}\|v_n - v_l\|,$$

即 $\{u_n\}$ 是 X 中的基本列. 于是存在 $u \in X$ 使得 $u_n \to u$. 再由 $\lambda I - B$ 的闭性得 $u \in D(B)$ 且 $v = (\lambda I - B)u$, 即 $v \in R(\lambda I - B)$. 所以 $R(\lambda I - B)$ 是闭的.

最后求出相应的扇形 $S_{a,\varphi}$ (图 8.8.1), 对 $\lambda \in S_{a,\varphi}$, 有

$$\|(\lambda I - B)^{-1}\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|} = \frac{C}{|\lambda - a|} \cdot \frac{|\lambda - a|}{|\lambda|} \leqslant \frac{C}{|\lambda - a|}.$$

证毕.

为了利用定理 8.8.2, 先引述关于先验估计的定理 (不证明).

定理 8.8.3　设 $1 < p < \infty$, 则存在常数 $C > 0$, 使得对任意 $u \in W_p^{2m}(\Omega) \bigcap \mathring{W}_p^m(\Omega)$, 有

$$\|u\|_{2m,p} \leqslant C(\|Au\|_p + \|u\|_p).$$

定理 8.8.4　设 $1 < p < \infty$, 则存在常数 $C, R > 0$ 和 $0 < \theta < \pi/2$, 使得对任意 $u \in W_p^{2m}(\Omega) \bigcap \mathring{W}_p^m(\Omega)$ 和复数 $\lambda, |\lambda| \geqslant R$, $\theta - \pi < \arg\lambda < \pi - \theta$, 有

$$\|u\|_p \leqslant \frac{C}{|\lambda|}\|(\lambda I + A)u\|_p.$$

其次证明 A_p 是闭算子, A_p 的共轭算子是 A_q^*.

引理 8.8.5　对于 $1 < p < \infty$, A_p 在 $L_p(\Omega)$ 上是闭稠定的.

证明　因为 $C_0^\infty(\Omega) \subset D(A_p)$, 而 $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = L_p(\Omega)$, 所以 $\overline{D(A_p)} = L_p(\Omega)$. 设 $u_k \in D(A_p)$, $\|u_k - u\|_p \to 0$, $\|A_p u_k - v\|_p \to 0$ $(k \to \infty)$. 由定理 8.8.3 得

$$\|u_k - u_l\|_{2m,p} \leqslant C\big(\|A_p(u_k - u_l)\|_p + \|u_k - u_l\|_p\big).$$

再由 L_p 中极限的唯一性知, u_k 在 $W_p^{2m}(\Omega)$ 与 $\mathring{W}_p^m(\Omega)$ 中收敛到 u. 于是 $u \in D(A_p)$ 且 $\|u_k - u\|_{2m,p} \to 0$ $(k \to \infty)$. 因为 $\|A_p(u_k - u)\|_p \leqslant M(\|u_k - u\|_{2m,p})$, 所以又有 $\|A_p(u_k - u)\|_p \to 0$ $(k \to \infty)$, 从而 $A_p u = v$. 因此, A_p 在 $L_p(\Omega)$ 是闭稠定的. 证毕.

引理 8.8.6 对于 $1 < p < \infty$, A_p 的共轭算子是 A_q^*.

证明 用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示共轭空间 $L_p(\Omega)$ 与 $L_q(\Omega)$ 之间的配对, A_p' 表示 A_p 的共轭算子. 利用分部积分可得

$$\langle A_p u, v \rangle = \langle u, A_q^* v \rangle, \quad \forall u \in D(A_p),\ v \in D(A_q^*). \tag{8.2}$$

因此, $D(A_q^*) \subset D(A_p')$, 且对 $v \in D(A_q^*)$ 有 $A_q^* v = A_p' v$.

又设 $v \in D(A_p')$ 且 $w = A_p' v$. 由共轭算子的定义知

$$\langle A_p u, v \rangle = \langle u, w \rangle, \quad \forall\ u \in D(A_p). \tag{8.3}$$

因为 $\overline{D(A_q^*)} = L_q(\Omega)$, 所以存在 $v_k \in D(A_q^*)$, 使得 $\|v_k - v\|_q \to 0$. 从而

$$\langle A_p u, v_k \rangle \to \langle A_p u, v \rangle.$$

利用 (8.2) 式和 (8.3) 式得

$$\langle u, A_q^* v_k \rangle = \langle A_p u, v_k \rangle \to \langle A_p u, v \rangle = \langle u, w \rangle, \quad \forall u \in D(A_p).$$

因为 $\overline{D(A_p)} = L_p(\Omega)$, 所以 $A_q^* v_k$ 弱收敛到 w. 再由 A_q^* 的闭性, 最后得 $v \in D(A_q^*)$, 即 $D(A_p') \subset D(A_q^*)$. 这就证明了 $A_p' = A_q^*$. 证毕.

利用上述定理和引理可证明

定理 8.8.7 设 $1 < p < \infty$, 则 A_p 是 $X = L_p(\Omega)$ 上的扇形算子, 因而 $-A_p$ 是某解析半群的无穷小生成元.

证明 由引理 8.8.5 和引理 8.8.6 知, A_p 是 $L_p(\Omega)$ 上的闭调定线性算子, 并且 $A_p' = A_q^*$. 对 A_p 和 A_q^* 利用定理 8.8.4 推知, 存在 $\varphi \in (0, \pi/2), R, C > 0$, 使得对任意满足 $|\lambda| \geqslant R, |\arg\lambda| \geqslant \varphi$ 的 λ, 有

$$\|u\|_p \leqslant \frac{C}{|\lambda|} \|(\lambda I - A_p) u\|_p, \quad \forall\ u \in D(A_p),$$
$$\|v\|_q \leqslant \frac{C}{|\lambda|} \|(\bar{\lambda} I - A_q) v\|_q, \quad \forall\ v \in D(A_q^*).$$

因此, 方程 $(\bar{\lambda} I - A_p') v = \theta$ 只有零解. 再由定理 8.8.2 知, A_p 是扇形算子. 证毕.

注 8.1 设 Ω 为 R^n 中有界光滑域, $A(x, D)$ 为前面给定的 $2m$ 阶强椭圆算子,

(1) 若取 $X = L_\infty(\Omega)$, 定义算子 A_∞:

$$\begin{aligned} D(A_\infty) =& \{u : u \in W_p^{2m}(\Omega), \forall p > n, A(x, D) u \in L_\infty(\Omega), \\ & D^\beta u\big|_{\partial\Omega} = 0, 0 \leqslant |\beta| \leqslant m - 1\}, \\ A_\infty u =& A(x, D) u, \quad u \in D(A_\infty). \end{aligned}$$

显然对任意 $p > n$, $D(A_\infty) \subset D(A_p)$, 于是 $D(A_\infty) \subset C^{2m-1}(\bar{\Omega})$; 又因 $C(\bar{\Omega})$ 在 $L_\infty(\Omega)$ 上不稠密, 于是 A_∞ 不是 $L_\infty(\Omega)$ 上的闭稠定线性算子, 故 $-A_\infty$ 在 $L_\infty(\Omega)$ 上不生成解析半群也不生成 C_0 半群.

事实上, 可证明 A_∞ 满足扇形算子 (定义 8.4.11) 的条件 (2) 和 (3)($m = 1$ 情形的详细证明参见 [Lu,Theorem 3.1.6, Theorem 3.1.19]), 于是当 $t > 0$ 时在 X 上仍可由 (4.10) 定义半群 e^{-tA_∞}, 且定理 8.4.18 的结论 (1), (2) 及 (4) 仍成立. 易证 $D(A_\infty)$ 在 $L_\infty(\Omega)$ 中的闭包为 $C(\bar{\Omega}) \cap \{u|_{\partial\Omega} = 0\}$, 由定理 8.4.18 结论 (3) 的证明可见仅当 $x \in C(\bar{\Omega}) \cap \{u|_{\partial\Omega} = 0\}$ 时, 有 $\lim\limits_{t\to0^+} \|\mathrm{e}^{-tA_\infty}x - x\|_{L_\infty(\Omega)} \to 0$.

(2) 由 (1) 的讨论可见: 若取 $X = \{u : u \in C(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0\}$, 定义

$$D(A_c) = \{u : u \in D(A_\infty), A(x, D)u \in C(\bar{\Omega})\},$$
$$A_c u = A(x, D)u, u \in D(A_c),$$

则 A_c 是 X 上的扇形算子.

(3) 定义算子 A_1:

$$D(A_1) = \{u | u \in W_1^{2m-1}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_1^m(\Omega), A(x, D)u \in L_1(\Omega)\},$$
$$A_1 u = A(x, D)u, \quad u \in D(A_1).$$

可以证明 A_1 是 $L_1(\Omega)$ 上的扇形算子. 详细证明及讨论见 [Paz, p.217-219].

8.8.2　由微分算子所确定的分数幂空间

取 $X = L_p(\Omega)$, 现由 A_p 来构造分数幂空间.

总可取正数 a 使得 $\mathrm{Re}\,\sigma(A_p + aI) > 0$. 于是有分数幂空间

$$X^\alpha = D((A_p + aI)^\alpha), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

以下不妨设 $\mathrm{Re}\,\sigma(A_p) > 0$,

$$X^\alpha = D(A_p^\alpha).$$

由定理 8.8.3,

$$\|u\|_{2m,p} \leqslant C(\|A_p u\|_p + \|u\|_p), \quad \forall\, u \in D(A_p).$$

因为 A_p 在 $L_p(\Omega)$ 中存在有界逆算子, 所以存在正常数 C, 使得

$$\|u\|_{2m,p} \leqslant C\|A_p u\|_p, \quad \forall u \in D(A_p). \tag{8.4}$$

下面将讨论 X^α 的几个嵌入关系, 为此先引述空间 $W_p^k(\Omega)$ 中的内插不等式和嵌入定理.

引理 8.8.8 假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开集, $\partial\Omega\in C^1$, $1\leqslant p,r\leqslant\infty$, m 是正整数.

(1) 如果非负整数 k 和正常数 p,q,r 满足: $0\leqslant k<m$, $1\leqslant q<\infty$, 以及

$$\begin{cases}\dfrac{nr}{n+rk}\leqslant q\leqslant\dfrac{np}{n-p(m-k)}, & \text{当 } n>p(m-k) \text{ 时},\\ \dfrac{nr}{n+rk}\leqslant q<\infty, & \text{当 } n\leqslant p(m-k) \text{ 时},\end{cases}$$

则存在正常数 $C=C(p,q,r,m,k,n,\Omega)$ 及正常数 $\theta\in[k/m,1]$, 满足

$$k-\frac{n}{q}=\theta\left(m-\frac{n}{p}\right)-\frac{n(1-\theta)}{r},$$

使得

$$\|u\|_{k,q}\leqslant C\|u\|_{m,p}^{\theta}\|u\|_r^{1-\theta},\quad \forall\, u\in W_p^m(\Omega).$$

(2) 如果 $mp>n$, 则对任意正常数 $0<\mu\leqslant m-\dfrac{n}{p}$, 存在正常数 $C=C(p,r,m,\mu,\Omega)$ 及正常数 $\theta\in(0,1]$, 满足

$$\mu=\theta\left(m-\frac{n}{p}\right)-\frac{n(1-\theta)}{r},$$

使得

$$\|u\|_{C^\nu(\bar{\Omega})}\leqslant C\|u\|_{m,p}^{\theta}\|u\|_r^{1-\theta},\quad \forall\, u\in W_p^m(\Omega).$$

这里, 当 μ 不是整数时, $0\leqslant\nu\leqslant\mu$; 当 μ 是整数时, $0\leqslant\nu<\mu$.

引理 8.8.9 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开区域, $\partial\Omega$ 光滑, 则有

$$\begin{aligned}&W_p^{j+m}(\Omega)\hookrightarrow W_q^j(\Omega),\quad 1\leqslant p\leqslant q\leqslant\frac{np}{n-mp},\quad n-mp>0,\\&W_p^m(\Omega)\hookrightarrow L_\mu(\Omega),\quad \mu=np/(n-mp),\quad n-mp>0,\\&W_p^k(\Omega)\hookrightarrow C^\nu(\Omega),\quad 0\leqslant\nu<k-n/p.\end{aligned}$$

现在证明下列嵌入关系:

定理 8.8.10 设 $\partial\Omega\in C^m$, $0\leqslant\alpha\leqslant1$, 则

$$\begin{aligned}&X^\alpha\hookrightarrow W_q^k(\Omega),\quad k-n/q<2m\alpha-n/p,\quad q\geqslant p,\\&X^\alpha\hookrightarrow C^\nu(\overline{\Omega}),\quad 0\leqslant\nu<2m\alpha-n/p,\end{aligned}$$

并且嵌入是连续的.

证明 利用引理 8.8.8 的结论 (1) 推得, 若

$$k-\frac{n}{q}<\theta\left(2m-\frac{n}{p}\right)-\frac{n(1-\theta)}{p}=2m\theta-\frac{n}{p},\tag{8.5}$$

则

$$\|u\|_{k,q} \leqslant C\|u\|_{2m,p}^{\theta}\|u\|_{p}^{1-\theta}. \tag{8.6}$$

利用 (8.4) 式和 (8.6) 式以及 Young 不等式得

$$\|u\|_{k,q} \leqslant C(\rho^{\theta-1}\|A_p u\|_p + \rho^{\theta}\|u\|_p)$$

对任意 $\rho \geqslant \rho_0 > C$ 和 $u \in D(A_p)$ 成立. 若令 $B = \sum_{|\beta| \leqslant k} D^{\beta}$, 根据定理 8.6.21 及其证明知, $W_q^k(\Omega) = D(B) \supset D(A_p^{\alpha})$ $(\theta < \alpha \leqslant 1)$, 且 $BA_p^{-\alpha}$ 有界. 由已知条件, 总可取 θ 满足 (8.5) 式且 $\theta < \alpha$. 又因为

$$X^{\alpha} = D(A_p^{\alpha}) = R(A_p^{-\alpha}),$$

利用 $BA_p^{-\alpha}$ 的有界性即得

$$X^{\alpha} \hookrightarrow W_q^k(\Omega).$$

同理可证另一结论. 证毕.

例 取 $\Omega \subset \mathbb{R}^3, p = 2$, 即 $X = L_2(\Omega)$, $A = -\Delta$, $D(A) = W_2^2(\Omega) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_1^2(\Omega)$. 由定理 8.8.10 知

$$\begin{aligned}
&X^{\alpha} \hookrightarrow C^{\nu}(\overline{\Omega}), \quad \alpha > 3/4, \ \nu < (4\alpha - 3)/2, \\
&X^{\alpha} \hookrightarrow W_q^1(\Omega), \quad 1/q > (5 - 4\alpha)/6, \quad \alpha > 1/2, \\
&X^{\alpha} \hookrightarrow L_q(\Omega), \quad 1/q > (3 - 4\alpha)/6.
\end{aligned}$$

8.8.3 一个例子

考虑初边值问题

$$\begin{cases}
u_t + A(x, D)u = f(t, x, u, \nabla u), & (x, t) \in Q_{\infty}, \\
u(x, t) = 0, & (x, t) \in S_{\infty}, \\
u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega,
\end{cases} \tag{8.7}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是有界光滑区域, $A(x, D)$ 是强椭圆算子:

$$A(x, D) = -\sum_{k,i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{ki}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right),$$

$a_{ki}(x) = a_{ik}(x)$ 在 Ω 内是实值连续可微的.

假设 $f(t,x,u,p)$ $(p\in\mathbb{R}^3)$ 对所有变元是局部 Lipschitz 的, 且存在连续函数 $\rho(t,r):\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 是 r 的增函数, 以及常数 $1\leqslant\gamma<3$, 使得

$$\begin{cases}|f(t,x,u,p)|\leqslant\rho(t,|u|)(1+|p|^{\gamma}),\\ |f(t,x,u,p)-f(t,x,u,q)|\leqslant\rho(t,|u|)(1+|p|^{\gamma-1}+|q|^{\gamma-1})|p-q|,\\ |f(t,x,u,p)-f(t,x,v,p)|\leqslant\rho(t,|u|+|v|)(1+|p|^{\gamma})|u-v|,\\ |f(t_1,x,u,p)-f(t_2,x,u,p)|\leqslant\rho(t_1+t_2,|u|)(1+|p|^{\gamma})|t_1-t_2|.\end{cases}\tag{8.8}$$

取 $X=L_2(\Omega)$,

$$Au=A(x,D)u,\quad D(A)=H^2(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega),$$

则 $-A$ 是 $L_2(\Omega)$ 上一个解析半群的无穷小生成元, 且 $\mathrm{Re}\,\sigma(A)>0$. 因此可定义 $X^{\alpha}=D(A^{\alpha})$ $(0\leqslant\alpha\leqslant1)$. 当

$$1>\alpha>\max\{3/4,(5\gamma-3)/(4\gamma)\},\quad 0\leqslant\nu<(4\alpha-3)/2$$

时,

$$X^{\alpha}\hookrightarrow W_{2\gamma}^1(\Omega)\bigcap C^{\nu}(\overline{\Omega})$$

且嵌入是连续的.

这样, 原问题 (8.7) 可写成 X 上算子方程的初值问题

$$\begin{cases}u'(t)+Au=F(t,u),\\ u(x,0)=u_0(x),\end{cases}\tag{8.9}$$

其中 $F(t,u)(x)=f(t,x,u(x),\nabla u(x))$.

现证明 F 满足以下条件.

(1) $F:\mathbb{R}_+\times X^{\alpha}\to X$, 且将有界集映为有界集.

证明 由条件 (8.8) 得

$$\|F(t,u)\|_2\leqslant\rho(t,|u|_0)(M^{\frac12}+\|u\|_{1,2\gamma}^{\gamma}),$$

其中 M 是 Ω 的测度, $|u|_0=\sup\limits_{\Omega}|u(x)|$.

(2) $F:\mathbb{R}_+\times X^{\alpha}\to X$ 是局部 Lipschitz 连续的.

证明 若 $(t,u),(s,v)\in\mathbb{R}_+\times X^{\alpha}$, 则有

$$\begin{aligned}&|F(t,u)(x)-F(s,v)(x)|\\ \leqslant&|f(t,x,u,\nabla u)-f(s,x,u,\nabla u)|+|f(s,x,u,\nabla u)-f(s,x,v,\nabla u)|\\ &+|f(s,x,v,\nabla u)-f(s,x,v,\nabla v)|\\ \leqslant&\rho(t+s,|u|)(1+|\nabla u|^{\gamma})|t-s|+\rho(s,|u|+|v|)(1+|\nabla u|^{\gamma})|u-v|\\ &+\rho(s,|v|)(1+|\nabla u|^{\gamma-1}+|\nabla v|^{\gamma-1})|\nabla(u-v)|.\end{aligned}$$

因为

$$\int_\Omega [1+|\nabla u|^{2\gamma}]|u-v|^2\mathrm{d}x \leqslant C(1+\|u\|_{1,2\gamma}^{2\gamma})|u-v|_0^2,$$

$$\int_\Omega (1+|\nabla v|^{2\gamma-2}+|\nabla v|^{2\gamma-2})|\nabla(u-v)|^2\mathrm{d}x$$
$$\leqslant C\left(\int_\Omega |\nabla(u-v)|^{2\gamma}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left[\left(\int_\Omega |\nabla u|^{2\gamma}\mathrm{d}x\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}+\left(\int_\Omega |\nabla v|^{2\gamma}\mathrm{d}x\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right],$$

所以

$$\begin{aligned}\|F(t,u)-F(s,v)\|_{0,2} \leqslant\ & M\rho(t+s,|u|_0)|t-s|(1+\|u\|_{1,2\gamma}^2)\\ &+M\rho(s,|u|_0+|v|_0)(1+\|u\|_{1,2\gamma}^{\gamma})|u-v|_0\\ &+M\rho(s,|v|_0)(1+\|u\|_{1,2\gamma}^{\gamma-1}+\|v\|_{1,2\gamma}^{\gamma-1})\|u-v\|_{1,2\gamma}\\ \leqslant\ & C(t,s,\|u\|_\alpha,\|v\|_\alpha)(|t-s|+\|u-v\|_\alpha),\end{aligned}$$

其中 $C(\cdot)$ 是常数, 依赖于 $t,s,\|u\|_\alpha,\|v\|_\alpha$.

因此, 当 $u_0\in X^\alpha$ 时, 在某极大区间 $0\leqslant t<t_1$ 上问题 (8.9) 有唯一解, 从而问题 (8.7) 有唯一解 $u(t;u_0)$, 或 $t_1=\infty$, 或 $t\to t_1^-$ 时 $\|u(t;u_0)\|\to\infty$.

现在证明这个解 $u(t;u_0)=u(x,t)$ 实际上是问题 (8.7) 的古典解. 因为当 $0<t<t_1$ 时 $u\in D(A)\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, 由定理 8.7.10 知, $t\mapsto u_t(t)\in X^\alpha$ 是局部 Hölder 连续的, 所以 $u(x,t)$ 和 $u_t(x,t)$ 在 $\overline{\Omega}\times(0,t_1)$ 上连续. 由于当 $0<t<t_1$ 时 $u(\cdot,t)\in D(A)$, 故 $\nabla u\in W_{q_1}^1(\Omega)\hookrightarrow L_{p_2}$, $q_1=2, p_2=6/(3-2)=6$. 因此, $Au=F(t,u)-u_t(t)\in L_{p_1/\gamma}(\Omega)$, 这蕴涵着 $u\in W_{6/\gamma}^2(\Omega)$ 且 $\nabla u\in W_{q_2}^1(\Omega)$, $q_2=6/\gamma>2$.

重复这种论证, 可得 $\nabla u\in W_{q_n}^1(\Omega)$, 其中

$$\frac{1}{q_n}=\gamma\left(\frac{1}{q_{n-1}}-\frac{1}{3}\right).$$

因为 $1\leqslant\gamma<3$, 最终可得 $q_n>3$ 并且 $\nabla u(\cdot,t)$ 是 Hölder 连续的. 于是 $F(t,u)$ 在 Ω 内是局部 Hölder 连续的. 因为 $\alpha>3/4$, 且 $u_t(\cdot,t)\in X^\alpha$, 所以 $u_t(x,t)$ 关于 x 是 Hölder 连续的. 故 $Au=F(t,u)-u_t(x,t)$ 关于 x 也就是局部 Hölder 连续的. 根据椭圆型方程的正则性理论, 对某个 $\delta>0$, $u(\cdot,t)\in C^{2+\delta}(\Omega)$. 因此, 当 $t>0$ 时, $u(x,t)$ 关于 t 连续可微, 关于 x 两次连续可微. 所以 $u(x,t)$ 是古典解.

8.9 评 注

除 8.3.3 节可利用连续半群理论研究二阶波方程的初值问题及 8.8 节中可利用解析半群理论研究单个 $2m$ 阶抛物方程初边值问题外, 连续半群及解析半群理论还

广泛应用于多种类型的偏微分方程（组），下面主要介绍解析半群理论在更一般的二阶抛物方程组中的推广和应用.

考虑二阶半线性抛物方程组的初边值问题

$$\begin{cases} u_t + A(x,D)u = F(t,u), & x \in \Omega, \quad t \in (0,T), \\ Bu(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{9.1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界光滑区域, $u(x)$ 为 N 维向量函数, $N > 1$, $A(x,D)$ 为 $N \times N$ 矩阵型二阶线性微分算子,

$$A(x,D)u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad x \in \Omega,$$

$$Bu = \delta\left[\sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + B_0(x)u\right] + (1-\delta)u, \quad x \in \partial\Omega.$$

$a_{ij}(x), a_i(x), B_i(x), B_0(x)$ 为光滑的 $N\times N$ 矩阵函数, 记 $a_{ij}(x) = (a_{ij}^{rs})_{N\times N}$, $\delta = 0,1$.

(1) 当 $A(x,D)$ 为对角型二阶强椭圆微分算子矩阵时, 即 $A(x,D)=(A_k(x,D)\delta_{kl})$, 其中 $A_k(x,D)$ 为二阶强椭圆型微分算子 (见定义 8.8.1), $k = 1,\cdots,N$, 且 B 为对角型边界算子矩阵时, 即 $B = (B_k\delta_{kl})$. 特别当 B_k 为三类经典边值条件时, 类似 8.8.1 节的证明, 可证对 $X = [L_p(\Omega)]^N$, $1 < p < \infty$, 矩阵微分算子 $A(x,D)$ 为 X 上的扇形算子. 此时初边值问题 (9.1) 为经典反应扩散方程组的初边值问题, 对经典反应扩散方程组除可应用解析半群理论外还可应用比较原理及上下解方法, 经典反应扩散方程组的上下解方法及应用详见第 4 章.

(2) 当 $A(x,D)$ 为非对角型二阶微分算子矩阵时, 方程组 (9.1) 不再是经典的反应扩散方程组, 其为强耦合的反应扩散方程组. 特别当 a_{ij} 为非对角型矩阵时, 此时 (9.1) 为带交错扩散的反应扩散方程组, 此时经典的比较原理及上下解方法不再适用于交错扩散方程组.

① 算子 $A(a,D)$ 称为一致强椭圆的, 或称 (9.1) 为一致强抛物型方程组, 若

$$\sum_{r,s=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{rs}(x)\xi_i\xi_j\eta_r\eta_s > 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \quad \eta \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}.$$

在一致强椭圆 (强抛物) 条件下, 当边界算子为三类经典的边值条件时, 由经典的二阶线性椭圆方程组的 L_p 理论, 算子 $A(a,D)$ 为 $X = [L_p(\Omega)]^N$ 中的扇形算子, 于是对方程组 (9.1) 初边值问题 8.4—8.8 节中的相应估计及局部存在唯一性结果仍成立.

② 算子 $A(x,D)$ 称为正则椭圆的 (normal elliptic), 或称 (9.1) 为 Petroskii 抛物型方程组, 若

$$\text{矩阵}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\right)\text{的特征值具正实部},\quad \forall x\in\bar{\Omega},\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}.$$

显然 $N=1$ 时一致强椭圆算子等价于正则椭圆算子. 对 $N>1$ 情形, 一致强椭圆算子必为正则椭圆算子; 反之不一定成立, 特别当 a_{ij} 为非对角型矩阵时. 当 $A(a,D)$ 不是一致强椭圆算子时, 一些经典的二阶线性椭圆及抛物方程组的先验估计理论及解的存在性唯一性理论不能直接应用.

③ 对一类可分离的二阶正则椭圆矩阵算子即 $a_{ij}(x)=A(x)\alpha_{ij}$, 其中 $\alpha_{ij}\in\mathbb{R}$, A 为 $N\times N$ 矩阵. Amann[Am5] 证明了在某些类型的互补型边值条件下, 正则椭圆算子 $A(x,D)$ 为 $[L_p(\Omega)]^N$ $(1<p<\infty)$ 空间中的扇形算子.

(3) 在更一般的椭圆性假设及系数满足更弱正则条件下, 算子 $A(x,D)$ 为 $[L_p(\Omega)]^N$ 上的扇形算子及指标为 0 的 Fredholm 算子的详细讨论和严格证明可参见 [ShW].

(4) 对具非线性边界条件的拟线性散度性交错扩散方程组 (9.1), 其中 $A(x,D)$ $u=\nabla\cdot(A(x,u)\nabla u)$, $Bu=B(x,u,D)u$. 当 $A(x,D)$ 满足正则椭圆条件,$B(x,u,D)$ 满足某些相容性边界条件时, 应用更弱系数条件下的 L_p 先验估计理论、正则椭圆算子的解析半群理论及内插空间理论, Amann 建立了在更弱初值条件下 $(u_0,v_0\in W_p^1(\Omega),\ p>n)$ 拟线性交错扩散方程组初边值问题古典解的局部存在唯一性理论, 详见 [Am5].

(5) 为说明交错扩散项的存在对算子椭圆性的影响, 下面仅考虑算子 $A(x,D)$ 的最简单的情形: $A(x,D)=-(A(x)\Delta)_{N\times N}$ 且 $N=2$, 记 $A(x)=(a^{rs})_{2\times2}$, 这里 $a^{12}(x)\Delta v$, $a^{21}(x)\Delta u$ 称为 (9.2) 的交错扩散项, 该类交错扩散方程组产生于一些具强烈生物背景的数学模型, 如趋化性交错扩散模型、带交错扩散的两种群竞争模型. 此时 (9.1) 简化为

$$\begin{cases} u_t-a^{11}(x)\Delta u-a^{12}(x)\Delta v=f(u,v), \\ v_t-a^{21}(x)\Delta u-a^{22}(x)\Delta v=g(u,v), \end{cases} \tag{9.2}$$

① 易验证算子 $A(x,D)=-A(x)\Delta$ 为一致强椭圆当且仅当

$$a^{11}(x),\ a^{22}(x)>0,\quad 4a^{11}(x)a^{22}(x)-(a^{12}(x)+a^{21}(x))^2>0,\quad \forall x\in\bar{\Omega}; \tag{9.3}$$

$A(a,D)=-A(x)\Delta$ 为正则椭圆当且仅当

$$a^{11}(x)+a^{22}(x)>0,\quad a^{11}(x)a^{22}(x)-a^{12}(x)a^{21}(x)>0,\quad \forall x\in\bar{\Omega}. \tag{9.4}$$

对给定的 $a^{11}(x)>0, a^{22}(x)>0$, 当 $|a^{21}(x)|$ 及 $|a^{12}(x)|$ 充分小时, 算子 $A(x,D)$ 为一致强椭圆的; 当 $a^{12}(x)=0$ 但 $|a^{21}(x)|$ 充分大时, $A(x,D)$ 为正则椭圆算子但不是强椭圆算子. 若条件 (9.4) 满足且 u,v 同时满足 Dirichlet 边界条件或同时满足 Neumann 边界条件时, 应用 Amann 的正则椭圆理论 [Am5], 算子 $A(x,D)=-A(x)\Delta$ 仍为 $[L_p(\Omega)]^2$ 空间 $(1<p<\infty)$ 中的扇形算子, 于是对 (9.2) 的相应初边值问题仍可应用解析半群理论.

② 若 (9.2) 中取 $a^{11}>0, a^{12}\neq 0, a^{21}=a^{22}=0$, 此时 (9.2) 为一带交错扩散的抛物方程与一常微分方程的耦合, 此时 $A(x,D)$ 不再是正则椭圆算子, 但当 u 满足经典的三类边条件, 不难验证算子 $A(x,D)$ 为 $X=L_p(\Omega)\times W^{2,p}(\Omega)$ 上的扇形算子.

③ 若 (9.2) 中取 $a^{11}=0, a^{12}=1, a^{21}=a^{22}=0$, 此时 (9.2) 形式上仍为交错扩散方程组, 但 $A(x,D)$ 不再是正则椭圆算子. 当 $\Omega=\mathbb{R}$, 在 8.3.3 节中已证 $-A(x,D)$ 在 $H^1(\mathbb{R})\times L_2(\mathbb{R})$ 中生成 C_0 半群, 且由 8.3.3 节中得到的 $A(x,D)$ 的谱特征易见,$A(x,D)$ 不是扇形算子, 此时 (9.2) 为二阶波动方程的扰动方程.

习 题 八

8.1 以 $\overline{D}^+w$ 记 w 的右上导数:

$$\overline{D}^+w(t)=\limsup_{h\to 0^+}\frac{w(t+h)-w(t)}{h}.$$

设实函数 $w(t)$ 在 $[a,b)$ 连续且右上可导. 证明:

(1) 若 $w(a)\leqslant 0$ 且在 $[a,b)$ 上 $\overline{D}^+w\leqslant 0$, 则在 $[a,b)$ 上 $w(t)\leqslant 0$;

(2) 若在 $[a,b)$ 上 $\overline{D}^+w(t)\leqslant 0$, 则 $w(t)$ 在 $[a,b)$ 上单调下降;

(3) 若在 $[a,b)$ 上 $\overline{D}^+w(t)=0$, 则 $w(t)$ 在 $[a,b)$ 上为常数.

8.2 设 $\varphi(t)\in C[a,b)$, $\varphi(t)$ 的右上导数 $\overline{D}^+\varphi(t)\in C[a,b)$. 证明: $\varphi(t)\in C^1[a,b)$ 且 $\varphi'(t)=\overline{D}^+\varphi(t),\ t\in[a,b)$.

8.3 设抽象函数 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 即积分 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ 存在. 又设 B 是闭线性算子, $Bf(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 即积分 $\int_a^b Bf(t)\mathrm{d}t$ 存在. 证明: $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\in D(B)$ 且

$$B\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)=\int_a^b Bf(t)\mathrm{d}t.$$

8.4 设 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上可积, B 是闭线性算子, 对任意 $\varepsilon>0$, 在 $[a+\varepsilon,b]$ 上 $f(t)$ 和 $Bf(t)$ 都 Riemann 可积. 证明

$$B\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)=\int_a^b Bf(t)\mathrm{d}t.$$

8.5 设 X 是 Banach 空间, $B:X\to X$ 是有界线性算子, 令 $T(t)\equiv \mathrm{e}^{tB}\equiv \sum_{n=0}^{n}\frac{(tB)^n}{n!}$. 证明:

(1) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tB)^n}{n!}$ 对 t 的任意有限区间是一致收敛的, 它定义了 X 上的一个有界线性算子族;

(2) $T(t)$ $(t\geqslant 0)$ 是一致连续半群, 即满足:

① $T(0)=I$;

② $T(t+s)=T(t)T(s),\quad \forall\, t,s\geqslant 0$;

③ $\lim_{t\to 0^+}\|T(t)-I\|=0$;

(3) B 是 $T(t)$ 的无穷小生成元, 且

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I}{h}=B.$$

8.6 设 A 是 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元. $T(t)$ 满足 $\|T(t)\|\leqslant M$, $\forall t\geqslant 0$. 又设 $x\in D(A^2)$. 证明:

(1) $T(t)x-x=tAx+\int_0^t (t-s)T(s)A^2x\mathrm{d}s$;

(2) $\|Ax\|\leqslant \frac{2M}{t}\|x\|+\frac{Mt}{2}\|A^2x\|$;

(3) $\|Ax\|^2\leqslant 4M^2\|A^2x\|\cdot\|x\|$.

8.7 令 $X=\{f:f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 内有界且一致连续$\}$. 对于任意 $f\in X$, 定义

$$\|f\|=\sup_{\mathbb{R}}|f(x)|,\quad (T(t)f)(x)=f(x+t),$$
$$(Bf)(x)=f'(x),\quad f\in D(B)=\{f:f\in X, f'\in X\}.$$

证明:

(1) $T(t)$ 是 C_0 半群, $\|T(t)\|\leqslant 1$;

(2) B 是 $T(t)$ 的无穷小生成元;

(3) 若 $f,f',f''\in X$, 则

$$\left(\sup_{\mathbb{R}}|f'(x)|\right)^2\leqslant 4\sup_{\mathbb{R}}|f''(x)|\sup_{\mathbb{R}}|f(x)|.$$

8.8 设 $T(t)$ 是 X 上的 C_0 半群. 证明:

(1) 若对任意 $t>0, V(t): t\mapsto X$ 连续, 则

$$\lim_{h\to 0} T(t+h)V(t+h) = T(t)V(t), \quad \forall\, t>0;$$

(2) 若 $T(t)$ 以 $-A$ 为无穷小生成元, $V(t): t\mapsto X$ 对任意 $t>0$ 可微且 $V(t)\in D(A)$, 则对任意 $0<s<t$, $T(t-s)V(s)$ 对 s 可微且

$$\frac{\partial[T(t-s)V(s)]}{\partial s} = T(t-s)V'(s) + AT(t-s)V(s).$$

8.9 设 $T(t)$ 是 C_0 半群, $\|T(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{\omega t}$, ω 为实数. 定义

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t, \quad \forall\, x\in X, \quad \mathrm{Re}\,\lambda>\omega.$$

证明:

(1) 对任意 $x\in X$,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda)x = x;$$

(2) 如果 B 是 $T(t)$ 的无穷小生成元, 则

$$R(\lambda)Bx = BR(\lambda)x, \quad \forall\, x\in D(B), \quad \mathrm{Re}\,\lambda>\omega.$$

8.10 设 $X=\mathbb{C}^n$, A 是 $n\times n$ 矩阵, $A=NDN^{-1}$, 其中 $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 是对角矩阵, λ_k 是 A 的特征值 $(k=1,2,\cdots,n)$, N 是酉矩阵. 证明:

(1) $\mathrm{Re}\,(Au,u)\leqslant \omega\|u\|^2$, $\forall u\in X$, 其中 $\omega=\max\{\mathrm{Re}\,\lambda_k\}$;

(2) 对任意 $\mathrm{Re}\,\lambda>\omega$, 有

$$\|R(\lambda,A)\|\leqslant \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda-\omega}.$$

8.11 记 $X=C_0(\mathbb{R})=\{u: u\in C(\mathbb{R}),\ u(\pm\infty)=0\}$. 对任意 $u\in X$, 令 $\|u\|=\sup\limits_{\mathbf{R}}|u(x)|$, 则 X 是 Banach 空间. 考察初值问题

$$\begin{cases} U_t+U_x=0, & t\geqslant 0,\\ U(\pm\infty,t)=0, & t\geqslant 0,\\ U(x,0)=U_0(x). \end{cases}$$

将它改写成

$$u'(t)+Au=0, \quad u(0)=U_0,$$

其中

$$(Au)(x) = u'(x), \quad \forall\, u \in D(A) = \{u : u \in X,\ u' \in X\},$$

$U_0 \in X$. 证明:

(1) A 是 X 上的闭稠定线性算子;

(2) 对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\lambda < 0, v \in X$, 问题

$$\begin{cases} u' - \lambda u = v, \\ u(\pm\infty) = 0 \end{cases}$$

有唯一解;

(3) $\rho(A) \supset \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$ 且

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Re}\,\lambda|}, \quad \forall\, \mathrm{Re}\,\lambda < 0;$$

(4) 存在 C_0 半群 $T(t)$ 以 $-A$ 为无穷小生成元, 并求出 $T(t)$.

8.12　令 $X = L_2(\mathbb{R})$. 给定函数 $f \in C^2(\mathbb{R})$, 考察初值问题

$$\begin{cases} u_t - Au = f(u), \quad 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

其中

$$Au(x) = u'(x), \quad \forall\, u \in D(A) = H^1(\mathbb{R}).$$

(1) 证明 $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda \neq 0\} \subset \rho(A)$, 且

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Re}\,\lambda|}, \quad \forall\, \mathrm{Re}\,\lambda \neq 0;$$

(2) 证明 A 在 X 上生成 C_0 半群 e^{tA} 且 $\|\mathrm{e}^{tA}\| = 1$;

(3) 对任意 $u_0 \in H^1(\mathrm{R})$, 证明该初值问题存在唯一局部古典解 $u(t, x) \in C([0, \tau_0), H^1(\mathbb{R})) \cap C^1((0, \tau_0), L_2(\mathbb{R}))$.

8.13　设 $X = L_2(\Omega)$, 定义算子 A:

$$Au = \Delta u, \quad u \in D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

证明:

(1) A 是闭稠定算子;

(2) 对任意 $u \in D(A)$, $(Au, u) \leqslant 0$, 这里 $(\cdot, \cdot)$ 是 $L_2(\Omega)$ 中的内积;

(3) 存在 C_0 半群 $T(t)$ 以 A 为无穷小生成元, 且 $\|T(t)\| \leqslant 1$.

8.14 设 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中有界光滑区域, 考虑初边值问题

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u|\nabla u|^2, & t > 0, x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

取 $X = L_2(\Omega)$, 定义算子 A:

$$Au = -\Delta u, \quad u \in D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

取 $X^\alpha = D(A^\alpha)$, 利用定理 8.8.7 及 8.8.2 节相关估计, 证明: 对任意 $u_0 \in X^\alpha$, $\alpha > 3/4$, 初边值问题存在唯一局部古典解 $u(x,t) \in C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, \tau_0)) \bigcap C(\overline{\Omega} \times [0, \tau_0))$.

8.15 证明引理 8.4.14.

8.16 证明引理 8.4.19.

8.17 证明定理 8.4.20.

8.18 设 A 是 Banach 空间 X 中的扇形算子, $0 \in \rho(A)$. 令 $X^1 = D(A)$, 对任意 $x \in X^1$, 令 $\|x\|_1 = \|Ax\|$. 证明 X^1 是 Banach 空间.

8.19 设 A 是扇形算子, $\mathrm{Re}\, \sigma(A) > 0, T(t) = \mathrm{e}^{-tA}$. 证明: 对任意 $0 < \alpha \leqslant 1$, 存在常数 C_α, 使得对任意 $t, h > 0$, 有

$$\|T(t+h) - T(t)\| \leqslant C_\alpha h^\alpha t^{-\alpha}.$$

8.20 设 A 是扇形算子, $\mathrm{Re}\, \sigma(A) > 0$. 证明下列条件等价:

(1) 对任意 $\alpha > 0, A^{-\alpha}$ 是紧的;

(2) A^{-1} 是紧的;

(3) 对任意 $t > 0$, e^{-tA} 是紧的.

8.21 设 A 是扇形算子. 证明:

(1) 对任意 $x \in X$, $\lim\limits_{t \to 0^+} \|tA\mathrm{e}^{-tA}x\| = 0$;

(2) 对任意 $x \in X$, 抽象函数 $tA\mathrm{e}^{-tA}x : [0, \infty) \to X$ 连续.

8.22 设 A 是扇形算子, $\mathrm{Re}\, \sigma(A) > 0$. 证明: 对任意 $0 < \alpha \leqslant 1, x \in X$, 有

$$\lim_{t \to 0^+} t^\alpha \|A^\alpha \mathrm{e}^{-tA} x\| = 0.$$

第 9 章　平衡解的稳定性——动力系统的理论及应用

9.1　动 力 系 统

考察自治方程

$$u'(t) + Au = f(u), \tag{1.1}$$

其中 A 是 Banach 空间 X 中的扇形算子. 假设对某个 $0 \leqslant \alpha < 1$, U 为 X^α 中的一个开集, $f: U \to X$ 是局部 Lipschitz 的. 还假定 E 是 U 的闭子集, 如果 $u(0) \in E$, 则 (1.1) 的解 $u(t)$ 对于一切 $t \geqslant 0$ 存在且 $u(t) \in E$ (称 E 关于 (1.1) 是正不变的). 若 $u(t;x)$ 是 (1.1) 满足初值 $u(0;x) = x$ 的解, 则由

$$S(t)x = u(t;x), \quad x \in E, \quad t \geqslant 0 \tag{1.2}$$

确定了度量空间 E 上的一族映射 $\{S(t): E \to E, t \geqslant 0\}$, 满足:

(1) 对每个 $t \geqslant 0$, $S(t)$ 从 E 到 E 是连续的 (方程 (1.1) 的解 $u(t;x)$ 关于初值 x 的连续依赖性);

(2) 对每个 $x \in E$, $S(t)x$ 关于 t 连续;

(3) 在 E 上 $S(0)$ 是恒同映射 ($u(0;x) = x$);

(4) 对一切 $x \in E$ 和 $t, \tau \geqslant 0$, 有

$$S(t)(S(\tau)x) = S(t+\tau)x.$$

这是因为 (1.1) 为自治系统, $u(t+\tau;x)$ 也是方程 (1.1) 的解, 并且 $u(\tau,x) = u(0;u(\tau;x))$. 由唯一性知, $u(t+\tau;x) = u(t;u(\tau;x))$.

下面更一般地讨论满足上述性质的映射族.

定义 9.1.1　度量空间 E 上的一个动力系统 (非线性半群) 是一族映射 $\{S(t): E \to E;\ t \geqslant 0\}$, 满足上述性质 (1)—(4).

通常情况下, E 是全空间 X 或一个子空间, 或是具有某种特殊性质的点构成的闭集.

按照上面的定义, 由 (1.2) 确定了 E 上的动力系统. 对于方程 (1.1), 若 A 是 X 中的扇形算子, 要证它确定一个动力系统, 只需证明:

(1) 存在开集 $U \subset X^\alpha(0 \leqslant \alpha < 1)$, 使得 $f: U \to X$ 是局部 Lipschitz 的;

(2) U 包含方程 (1.1) 的一个闭的正不变集.

定义 9.1.2 设 $S(t)$ 是 E 上的一个动力系统. 对任意给定的 $x \in E$, 点集

$$\gamma(x) = \{S(t)x : t \geqslant 0\}$$

称为过 x 的轨道 (正半轨). 点集

$$\gamma(x; t_1, t_2) = \{S(t)x : 0 \leqslant t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$$

称为轨道的有限弧, 正数 $t_2 - t_1$ 称为这一弧段的时间长度.

有两种特殊类型的轨道:

(1) 平衡点. 若 $\gamma(x) = \{x\}$, 则称 x 为动力系统的平衡点. 其等价条件是: 对任意 $t \geqslant 0$, 有 $S(t)x = x$.

(2) 周期轨道. 若存在 $\tau > 0$, 使得

$$\gamma(x) = \{S(t)x : 0 \leqslant t \leqslant \tau\} \neq \{x\},$$

则称 $\gamma(x)$ 为周期轨道.

容易证明:

(1) 若 $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)y = x$, 则 x 是平衡点.

(2) 若存在 $l > 0$, 使得对一切 $t \geqslant 0$, 有

$$S(t)x = S(t+l)x,$$

并且 x 不是平衡点, 则存在最小正数 τ, 使得对一切 $t \geqslant 0$, 有 $S(t)x = S(t+\tau)x$. 因而

$$\gamma(x) = \{S(t) : 0 \leqslant t \leqslant \tau\}.$$

考虑动力系统的如下连续性: 对任意 $x \in E$ 及任意 $T > 0$, 若任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $y \in E$, $\rho(y, x) < \delta$ 时, 有

$$\rho(S(t)y, S(t)x) < \varepsilon, \quad \forall\, t \in [0, T],$$

则称动力系统一致地对有限时间 t 关于变量 x 连续, 其中 $\rho(\cdot,\cdot)$ 表示 E 中两点的距离.

由方程 (1.1) 确定的动力系统在上述假定下就具有这种连续性.

本章主要讨论动力系统的极限性质与平衡点的稳定性. 先讨论抽象的动力系统, 然后讨论由自治方程 (1.1) 所确定的动力系统.

9.2 Lyapunov 函数与稳定性判别准则

设 $\{S(t): t \geqslant 0\}$ 是 E 上的一个动力系统, 与常微分方程平衡点的稳定性概念类似 (附录中的 8.1), 引进动力系统平衡点的各种稳定性定义.

设 $x_0 \in E$ 是 $S(t)$ 的平衡点.

定义 9.2.1　若任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得当 $x \in E$, $\rho(x, x_0) < \delta$ 时, 对一切 $t \geqslant 0$ 有

$$\rho(S(t)x, x_0) < \varepsilon,$$

则称 $x = x_0$ 是 (局部) 稳定的. 若存在 $\eta > 0$, 使得当 $x \in E$, $\rho(x, x_0) < \eta$ 时,

$$\lim_{t \to \infty} S(t)x = x_0, \tag{2.1}$$

则称 $x = x_0$ 是吸引的. 集合 $\{x : x \in E, \lim\limits_{t \to \infty} S(t)x = x_0\}$ 称为 x_0 的吸引区域. 若 x_0 既是稳定的又是吸引的, 则称 x_0 是 (局部) 渐近稳定的. 若 x_0 是稳定的且 E 是 x_0 的吸引区域, 则称 x_0 是全局渐近稳定的.

下面利用 Lyapunov 函数讨论平衡点的稳定性.

定义 9.2.2　设 $\{S(t): t \geqslant 0\}$ 是度量空间 E 上的动力系统. 定义在 E 上的一个实值连续函数 V, 若对一切 $x \in E$ 有

$$\dot{V}(x) = \lim_{t \to 0^+} \sup \frac{1}{t}[V(S(t)x) - V(x)] \leqslant 0,$$

则称之为 Lyapunov 函数. 这里 $\dot{V}$ 是 $V(S(t)x)$ 在 $t = 0$ 处的右导数. 由定义可知, Lyapunov 函数 $V(x)$ 有以下性质:

(1) 对任意 $x \in E$ 和 $t \geqslant 0$,

$$\dot{V}(S(t)x) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \sup \frac{1}{\Delta t}[V(S(t + \Delta t)x) - V(S(t)x)] \leqslant 0.$$

证明　由于

$$V(S(t + \Delta t)x) - V(S(t)x) = V(S(\Delta t)S(t)x) - V(S(t)x),$$

若令 $y = S(t)x$, 则有 $\dot{V}(S(t)x) = \dot{V}(y) \leqslant 0$.

(2) 当 $x \in E$ 时, 对一切 $t \geqslant 0, V(S(t)x)$ 是非增的.

证明　因为 $V(S(t)x)$ 关于 t 连续, 关于 t 的右导数 $\dot{V}(S(t)x) \leqslant 0$, 所以 $V(S(t)x)$ 关于 $t \geqslant 0$ 非增.

(3) 若 $V(0) = 0$, 则存在 $r > 0$, 使得当 $\|x\| < r$ 时 $V(x) \leqslant b(\|x\|)$, 其中 $b(\cdot)$ 是 $[0, r]$ 上的连续严格增函数, $b(0) = 0$, $\|x\| = \rho(x, 0)$.

证明 因为 $V(0)=0$, 并且 $V(x)$ 连续, 所以存在 $r>0$, 使得当 $\|x\|\leqslant r$ 时 $|V(x)|\leqslant K, K$ 为常数.

对于 $0\leqslant s\leqslant r$, 取 $b(s)=s+\sup\limits_{\|y\|\leqslant s}|V(y)|$ 即可.

下面的定理给出了利用 Lyapunov 函数判断平衡点 $x=0$ 的稳定性的准则. 下面出现的函数类 $K[0,r]$, $K[0,\infty)$ 和 KR, 由附录中的定义 8.7 给出.

定理 9.2.3 设 $\{S(t):t\geqslant 0\}$ 是 E 上的动力系统, 0 是它的平衡点. 又设 V 是 E 上的 Lyapunov 函数, 满足 $V(0)=0$, $a(\|x\|)\leqslant V(x)$ $(x\in E, \|x\|<r)$, 其中 $a(\cdot)\in K[0,r]$, $\|x\|=\rho(x,0)$. 则 $x=0$ 是稳定的.

如果又有 $\dot{V}(x)\leqslant -c(\|x\|)$ $(x\in E, \|x\|<r)$, $c(\cdot)\in K[0,r]$, 则 $x=0$ 是渐近稳定的, 且对 $\|x\|<r_0\leqslant r$ 是一致的, 即任给 $\varepsilon>0$, 存在 $T>0$, 当 $t>T$ 时对一切 $x\in E$, $\|x\|<r_0$, 有 $\|S(t)x\|<\varepsilon$.

证明 先证稳定性. 由 $V(0)=0$ 及 $V(x)$ 的连续性知, 任给 $0<\varepsilon<r$, 存在 $0<\delta<r$, 当 $\|x\|<\delta$ 时 $V(x)<a(\varepsilon)$. 又存在 $\sigma>0$, 当 $0\leqslant t<\sigma$ 且 $\|x\|<\delta$ 时, $\|S(t)x\|<r$. 于是

$$a(\|S(t)x\|)\leqslant V(S(t)x)\leqslant V(x)<a(\varepsilon).$$

故当 $0\leqslant t<\sigma$ 且 $\|x\|<\delta$ 时,

$$\|S(t)x\|<a^{-1}(a(\varepsilon))=\varepsilon.$$

由此可以推出, 当 $\|x\|<\delta$ 时, 对所有 $0\leqslant t<\infty$, 上式也成立. 从而 $x=0$ 是稳定的.

再证第二个结论. 由前面的性质 (3) 知, 存在 $r_1>0$ 和函数 $b(s)\in K[0,r_1]$, 使得当 $\|x\|\leqslant r_1$ 时, $V(x)\leqslant b(\|x\|)$. 不妨认为 $r_1=r$. 由连续性知, 存在 $\varepsilon_0\in(0,r)$, 使得当 $0\leqslant s\leqslant w_0$ 时 $b^{-1}(s)\in[0,r]$, 其中

$$w_0=\sup\{V(x):\|x\|\leqslant\varepsilon_0\}>0.$$

考察初值问题

$$\begin{cases} w'(t)+c(b^{-1}(w))=0, & t>0,\\ w(0)=w_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

记它的最大解为 $w_M(t)$, 则在解的存在区间上 $w_M(t)>0$. 事实上, 若存在第一个使 $w_M(t)$ 为零的 $t=t_0$, 则在 t_0 处

$$w_M'(t_0)=-c(b^{-1}(w_M(t_0)))=-c(b^{-1}(0))=-c(0)=0.$$

根据解的唯一性便知, $w_M(t)\equiv 0$. 矛盾.

显然在解的存在区间上 $w_M(t)$ 单调下降, 因而解的存在区间是 $[0,\infty)$, $\lim\limits_{t\to\infty} w_M(t)=l$, $\lim\limits_{t\to\infty} w_M'(t)=0$. 再由 (2.2) 的方程得 $l=0$, 即 $\lim\limits_{t\to\infty} w_M(t)=0$.

因为 0 是稳定的, 所以存在 $0<r_0\leqslant r$, 使得当 $\|x\|<r_0$ 时, 对所有 $t\geqslant 0$ 有 $\|S(t)x\|\leqslant \min\{r,w_0\}$. 利用已知条件和函数 $b(s)$ 的性质, 有

$$\dot V(S(t)x)\leqslant -c(\|S(t)x\|),\quad V(S(t)x)\leqslant b(\|S(t)x\|),\quad \forall\, t\geqslant 0.$$

由上面的第二个不等式和函数 $c(s)$ 的性质得

$$-c(\|S(t)x\|)\leqslant -c(b^{-1}(V(S(t)x)),\quad \forall\, t\geqslant 0.$$

因此

$$\begin{aligned}&\dot V(S(t)x)\leqslant -c(b^{-1}(V(S(t)x))),\quad \forall\, t\geqslant 0,\\&V(S(0)x)=V(x)\leqslant w.\end{aligned}$$

与问题 (2.2) 比较, 根据附录中的定理 2.3 得

$$V(S(t)x)\leqslant w_M(t),\quad t\geqslant 0.$$

从而

$$\|S(t)x\|\leqslant a^{-1}(w_M(t)),\quad t\geqslant 0,\quad \|x\|<r_0.$$

因为 $\lim\limits_{t\to\infty} w_M(t)=0$, 所以 $x=0$ 是渐近稳定的, 且对 $\|x\|<r_0$ 一致成立. 证毕.

9.3　动力系统的极限性质与不变性原理

如果求得了动力系统的 Lyapunov 函数 $V(x)$, 但它不满足定理 9.2.3 中给出的附加条件, 可以利用 Lyapunov 函数来讨论动力系统的极限性质. 为此, 先引进动力系统的极限集的概念, 然后讨论极限集与 Lyapunov 函数之间的关系.

9.3.1　极限集

在完备度量空间 E 上给定动力系统 $\{S(t):t\geqslant 0\}$, 过点 $x\in E$ 的轨线记为 $\gamma(x)$.

定义 9.3.1　若存在 $t_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=\infty$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} S(t_n)x_0=x,$$

则称 x 为 $\gamma(x_0)$ 或 x_0 的 ω 极限点. $\gamma(x_0)$ (或 x_0) 的 ω 极限点集记为 $L_\omega(x_0)$.

一个等价定义是

$$L_\omega(x_0)=\bigcap_{\tau\geqslant 0}\overline{\gamma(S(\tau)x_0)}=\bigcap_{\tau\geqslant 0}\{\overline{S(x)x_0:t\geqslant\tau}\}.$$

证明 若 $x \in L_\omega(x_0)$, 则存在 $t_n \to \infty$, 使得 $S(t_n)x_0 \to x$. 对任意 $\tau \geqslant 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时 $t_n \geqslant \tau$. 于是 $S(t_n)x_0 \in \{S(t)x_0 : t \geqslant \tau\}$, 即 x 属于等式右端. 反之, 若 x 属于等式右端, 则对任意自然数 n, 有 $x \in \{\overline{S(t)x_0 : t \geqslant n}\}$. 于是存在 $x_n \in \{S(t)x_0 : t \geqslant n\}$, 即存在 $t_n \geqslant n$, $x_n = S(t_n)x_0$, 使得 $\rho(x_n, x) < 1/n$. 因此, 当 $n \to \infty$ 时, $t_n \to \infty$, $x_n \to x$, 即 $x \in L_\omega(x_0)$. 证毕.

定理 9.3.2 (极限集的一般性质) (1) $L_\omega(x_0)$ 是闭的;

(2) 若 $x_1 \in \gamma(x_0)$, 则 $L_\omega(x_0) = L_\omega(x_1)$;

(3) $L_\omega(x_0)$ 是正不变集.

证明留给读者.

定理 9.3.3 (紧轨线的极限集) 设 $x_0 \in E$, $\gamma(x_0)$ 包含在 E 的紧集内, 则

(1) $L_\omega(x_0)$ 是非空的紧集;

(2) 当 $t \to \infty$ 时,

$$\rho(S(t)x_0,\ L_\omega(x_0)) \to 0;$$

(3) $L_\omega(x_0)$ 是连通的 (区域连通);

(4) $L_\omega(x_0)$ 是不变集: 对任意 $y_0 \in L_\omega(x_0)$, 存在一条连续曲线 $x : \mathbb{R} \to L_\omega(x_0)$, 满足 $x(0) = y_0$ 和

$$S(t)x(\tau) = x(t+\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0.$$

证明 (1) 因为 $L_\omega(x_0)$ 是非空递减的紧集族的交集, 所以 $L_\omega(x_0)$ 非空且是紧的.

(2) 若不然, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, $t_n \to \infty$, 使得

$$\rho(S(t_n)x_0,\ L_\omega(x_0)) \geqslant \varepsilon_0. \tag{3.1}$$

令 $x_n = S(t_n)x_0$, 则 $x_n \in \gamma(x_0)$. 由紧性, 不妨设 $x_n \to x^*$, 则 $x^* \in L_\omega(x_0)$. 于是

$$\rho(S(t_n)x_0, L_\omega(x_0)) \leqslant \rho(S(t_n)x_0, x^*) \to 0.$$

此与 (3.1) 式矛盾.

(3) 证明同常微分方程的情形, 见附录中的定理 6.6.

(4) 设 $y_0 \in L_\omega(x_0)$, 则存在 $t_n \to \infty, S(t_n)x_0 \to y_0$. 根据紧性, 存在子列 $t_n^{(1)} \to \infty$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} S(t_n^{(1)} - 1)x_0 = y_1$$

存在. 继续取子序列, 然后按通常方法取对角线序列 $t_{n'} \to \infty$, 使得对 $j = 0, 1, 2, \cdots$, 当 $n' \to \infty$ 时存在极限

$$S(t_{n'} - j)x_0 \to y_j, \quad j = 0, 1, 2, \cdots.$$

我们断言, 当 $k \geqslant j \geqslant -t$ 时 $S(t+k)y_k = S(t+j)y_j$. 事实上,

$$S(t+k)y_k = S(t+k)\lim_{n'\to\infty} S(t_{n'}-k)x_0 = \lim_{n'\to\infty} S(t+t_{n'})x_0.$$

同理

$$S(t+j)y_j = \lim_{n'\to\infty} S(t+t_{n'})x_0,$$

所以

$$S(t+j)y_j = S(t+k)y_k.$$

鉴于此, 对于 $-\infty < t < \infty$, 可以定义

$$y(t) = S(t+j)y_j,$$

其中 $j \geqslant 0, j \geqslant -t$.

容易看出, $y(t)$ 具有下面的性质:

(1) $y(0) = S(0+0)y_0 = y_0$;

(2) $S(t)y(\tau) = S(t)S(\tau+j)y_j = S(t+\tau+j)y_j = y(t+\tau)$;

(3) 因为 $L_\omega(x_0)$ 是正不变集, 又 $y_j \in L_\omega(x_0)$, 所以 $S(t+j)y_j \in L_\omega(x_0)$ $(j \geqslant -t)$, 即当 $t \in (-\infty, \infty)$ 时, $y(t) \in L_\omega(x_0)$, $y : \mathbb{R}^1 \to L_\omega(x_0)$;

(4) 显然 $y(t)$ 是连续的.

证毕.

推论 9.3.4　在定理 9.3.3 的条件下, $L_\omega(x_0)$ 只包含一个点 p_0 的充要条件是

$$\lim_{t\to\infty} S(t)x_0 = p_0.$$

9.3.2 极限集与 Lyapunov 函数的关系, 动力系统的极限性质

定理 9.3.5　设 V 是 E 上的 Lyapunov 函数, 定义 $E_V = \{x : x \in E,\ \dot{V}(x) = 0\}$, 并设 M 是 E_V 的最大不变子集. 若 $\gamma(x_0)$ 包含在 E 中的一个紧集内, 则

(1) $L_\omega(x_0) \subset M$;

(2) $t \to \infty$ 时, $S(t)x_0 \to M$.

证明　因为当 $t \geqslant 0$ 时, $S(t)x_0$ 包含在紧集内, 所以 $V(S(t)x_0)$ 有下界, 又它对 $t \geqslant 0$ 非增, 故存在极限

$$\lim_{t\to\infty} V(S(t)x_0) = l.$$

由于 $\gamma(x_0)$ 包含在 E 中的一个紧集内, 因此 $L_\omega(x_0)$ 是非空的. 若 $y \in L_\omega(x_0)$, 则存在 $t_n \to \infty$, 使得 $S(t_n)x_0 \to y$, 于是 $l = V(y)$. 由 $L_\omega(x_0)$ 的正不变性, 对任意 $t \geqslant 0$, $S(t)y \in L_\omega(x_0)$, 所以

$$V(S(t)y) = l, \quad \dot{V}(y) = 0,$$

即 $y \in E_V$. 因此 $L_\omega(x_0) \subset E_V$. 又 $L_\omega(x_0)$ 是不变集, 而 M 是 E_V 的最大不变子集, 所以 $L_\omega(x_0) \subset M$.

最后由

$$\rho(S(t)x_0, M) \leqslant \rho(S(t)x_0, L_\omega(x_0)) \to 0, \quad 当\ t \to \infty,$$

可推得当 $t \to \infty$ 时,

$$S(t)x_0 \to M.$$

证毕.

推论 9.3.6 设 V 是 E 上的一个 Lyapunov 函数. 若 $\gamma(x_0)$ 包含在 E 中的一个紧集内, 则对任意 $y \in L_\omega(x_0)$, 有

$$V(S(t)y) = 常数, \quad t \geqslant 0.$$

推论 9.3.7 在推论 9.3.6 的条件下, 若对任意不是平衡点的 $x \in E$, 函数 $V(S(t)x)$ 是严格下降的, 那么任意的 $y \in L_\omega(x_0)$ 都是 $S(t)$ 的平衡点.

定义 9.3.8 若 V 是 E 上的一个 Lyapunov 函数, 又 $E_V = \{x : x \in E, \dot{V}(x) = 0\}$ 属于平衡点集, 则称 V 是 E 上的严格 Lyapunov 函数.

推论 9.3.9 设 V 是 E 上的一个严格 Lyapunov 函数, 若 $\gamma(x_0)$ 包含在 E 中的一个紧集内, 则

(1) $L_\omega(x_0)$ 属于平衡点集;

(2) 若平衡点是孤立的, 则 $L_\omega(x_0)$ 由一个平衡点组成.

9.3.3 关于不稳定性的一个结论

定理 9.3.10 设 x_0 是 E 中的平衡点, N 是 x_0 在 E 中的一个邻域, U 是 E 中的开集, $x_0 \in \overline{U}$. 记 $G = N \cap U$. 又假设:

(1) V 是 $\overline{G}$ 上的 Lyapunov 函数;

(2) $\overline{G} \cap \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ 中唯一可能的不变集是 $\{x_0\}$;

(3) $V(x_0) = \eta$, $V(x) < \eta$, $\forall\, x \in G \backslash \{x_0\}$;

(4) 当 $x \in (N \cap \partial G)$ 时 $V(x) = \eta$.

若 N_0 是真包含在 N 中的 x_0 的有界邻域, 又 $x_1 \in (G \cap N_0) \backslash \{x_0\}$, 那么, 或者 $\overline{\gamma(x_1)}$ 是 $\overline{G \cap N_0}$ 中的非紧子集, 或者存在 $\tau > 0$ 使得 $S(\tau)x_1 \in \partial N_0$.

证明 先证明: 若 $\gamma(x_1) \subset N_0$, 则 $\gamma(x_1) \subset G \cap N_0$. 事实上, 因为 $x_1 \in (G \cap N_0) \backslash \{x_0\}$, 所以由条件 (3) 知 $V(x_1) < \eta$. 于是对一切 $t \geqslant 0$, 有 $V(s(t)x_1) \leqslant V(x_1) < \eta$. 再由条件 (4) 知, $S(t)x_1$ 不能到达 $N_0 \cap \partial G$.

再证明: 若 $\gamma(x_1) \subset N_0$, 则 $\overline{\gamma(x_1)}$ 是 $\overline{G \cap N_0}$ 中的非紧子集. 若不然, 则 $L_\omega(x_1)$ 是 $\overline{G \cap N_0}$ 中的非空不变集. 由定理 9.3.5, $L_\omega(x_1) \subset \{x : \dot{V}(x) = 0\}$. 于是由条件

(2) 知, $L_\omega(x_1) = \{x_0\}$, 从而 $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)x_1 = x_0$. 因为

$$V(S(t)x_1) \leqslant V(x_1),$$

令 $t \to \infty$, 得

$$\eta = V(x_0) \leqslant V(x_1).$$

此与 $V(x_1) < \eta$ 矛盾.

至此得到, 或者 $\gamma(x_1) \subset N_0$, 或者存在 $\tau > 0$ 使得 $S(\tau)x_1 \in \partial N_0$. 而前者意味着 $\overline{\gamma(x_1)}$ 是 $\overline{G \cap N_0}$ 中的非紧子集. 证毕.

推论 9.3.11 在定理 9.3.10 的条件下, 若 $x_1 \in (G \cap N_0)\backslash\{x_0\}$, 且 $\overline{\gamma(x_1)}$ 是 $\overline{G \cap N_0}$ 中的紧子集, 则 x_0 是不稳定的.

9.4 自治方程与 Lyapunov 函数

考察自治方程

$$u'(t) + Au = f(u), \tag{4.1}$$

其中 A 是 X 中的扇形算子. 假设 U 是 X^α 中的开集, $0 \leqslant \alpha < 1$, $f: U \to X$ 是局部 Lipschitz 的. 由定理 8.7.3 知对任意 $x \in U$, 方程 (4.1) 满足初值 $u(0) = x$ 的解唯一存在, 记为 $u(t;x)$, 它的最大存在区间记为 J.

无论方程 (4.1) 是否确定动力系统, 也无论方程 (4.1) 的解是否全局存在, 都可以引进 Lyapunov 函数 V, 它是 U 上的实值连续函数 V, 使得对一切 $x \in U$,

$$\dot{V}(x) = \lim_{t\to 0^+} \sup \frac{1}{t}[V(u(t;x)) - V(x)] \leqslant 0.$$

本节将讨论:

(1) 利用 Lyapunov 函数证明方程 (4.1) 解的全局存在性;

(2) 利用 Lyapunov 函数证明方程 (4.1) 解的稳定性;

(3) 零解的一致渐近稳定性保证了 Lyapunov 函数的存在性.

9.4.1 Lyapunov 函数与解的全局存在性

设 $U = X^\alpha$, 并且对任意的有界闭集 $B \subset X^\alpha$, $f(B)$ 在 X 中有界. 于是由解的延拓定理知, 只要对方程 (4.1) 的解 $u(t;x)$ 在其存在区间上能够做出先验估计:

$$\|u(t;x)\|_\alpha \leqslant M,$$

那么解的存在区间是 $[0, \infty)$.

若方程 (4.1) 的 Lyapunov 函数 $V(x)$ 满足: $V(x) \geqslant a(\|x_\alpha\|)$, 其中 $a(\cdot)$ 是 $[0,\infty)$ 上的连续严格增函数, $a(0)=0$, 则

$$a(\|u(t;x)\|_\alpha) \leqslant V(u(t;x)) \leqslant V(x).$$

于是

$$\|u(t;x)\|_\alpha \leqslant a^{-1}(V(x)), \quad t \in J.$$

因此, 解的存在区间是 $[0,\infty)$, 从而方程 (4.1) 在 X^α 上确定动力系统.

尽管有时不能证明 $V(x)$ 满足 $V(x) \geqslant a(\|x\|_\alpha)$, 但是作为 Lyapunov 函数, 总有

$$V(u(t,x)) \leqslant V(x), \quad t \in J.$$

再利用 V 的特殊结构, 就有可能对解做先验估计 (见 9.4.3 节中的例子).

9.4.2 Lyapunov 函数与解的稳定性

首先给出稳定性的定义. 对右端含时间 t 的非自治方程

$$u'(t) + Au = f(t,u), \quad t > t_0 \tag{4.2}$$

来叙述解的稳定性定义. 方程 (4.1) 自然是它的特殊情形.

定义 9.4.1 一个定义在 $[t_0,\infty)$ 上的问题 (4.2) 的解 $\bar{u}(t)$ 称为在 X^α 中是稳定的, 若对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得满足 $\|u(t_0)-\bar{u}(t_0)\|_\alpha<\delta$ 的任意解 $u(t)$ 在 $[t_0,\infty)$ 上存在, 且对一切 $t \geqslant t_0$, 有

$$\|u(t)-\bar{u}(t)\|_\alpha < \varepsilon.$$

一个定义在 $[t_0,\infty)$ 上的问题 (4.2) 的解 $\bar{u}(t)$ 称为是吸引的, 若存在 $\eta>0$, 使得满足 $\|u(t_0)-\bar{u}(t_0)\|_\alpha<\eta$ 的任意解 $u(t)$, 都有

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)-\bar{u}(t)\|_\alpha = 0.$$

若 $\bar{u}(t)$ 既是稳定又是吸引的, 则称为是渐近稳定的.

定义 9.4.2 一个定义在 $[t_0,\infty)$ 上的问题 (4.2) 的解 $\bar{u}(t)$ 称为在 X^α 中是一致稳定的, 若对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意 $t_1 \geqslant t_0$, 满足 $\|u(t_1)-\bar{u}(t_1)\|_\alpha<\delta$ ($\delta=\delta(\varepsilon)$ 与 t_1 无关) 的解 $u(t)$ 在 $[t_1,\infty)$ 上存在, 且对任意 $t \geqslant t_1$ 有

$$\|u(t)-\bar{u}(t)\|_\alpha < \varepsilon.$$

此外, 若对任意 $\varepsilon>0$ 和 $t_1 \geqslant t_0$, 存在与 t_1 和 ε 无关的 δ_1 及 $T(\varepsilon)>0$, 使得满足 $\|u(t_1)-\bar{u}(t_1)\|_\alpha<\delta_1$ 的任意解 $u(t)$, 当 $t \geqslant t_1+T(\varepsilon)$ 时有

$$\|u(t)-\bar{u}(t)\|_\alpha < \varepsilon,$$

则称 $\bar{u}(t)$ 是 (局部) 一致渐近稳定的.

类似于常微分方程, 还可引进全局渐近稳定、全局一致渐近稳定、渐近指数稳定等概念.

下面对 $f(t,u)=f(u)$ 的情形给出利用 Lyapunov 函数判断零解稳定性的两个定理.

定理 9.4.3　设 $U=\{u: u\in X^\alpha, \|u\|_\alpha<r\}$, f 还满足: $f(0)=0$, 对任意有界闭集 $B\subset U$, 像集 $f(B)$ 在 X 中有界. 如果方程 (4.1) 在 U 上有 Lyapunov 函数 $V(x)$, 满足

$$V(0)=0,\quad a(\|x\|_\alpha)\leqslant V(x),\quad x\in U,$$

其中 $a(\cdot)\in K[0,r]$, 则方程 (4.1) 的零解是一致稳定的. 如果 $V(x)$ 又满足

$$\dot{V}(x)\leqslant -c(\|x\|_\sigma),\quad x\in U,$$

其中 $c(\cdot)\in K[0,r]$, 则方程 (4.1) 的零解是一致渐近稳定的.

定理 9.4.4　设 $U=X^\alpha$, f 还满足: $f(0)=0$, 对任意有界闭集 $B\subset X^\alpha$, 像集 $f(B)$ 在 X 中有界. 如果方程 (4.1) 在 X^α 上有 Lyapunov 函数 $V(x)$, 满足

$$V(0)=0,\quad a(\|x\|_\alpha)\leqslant V(x)\leqslant b(\|x\|_\alpha),\quad \dot{V}(x)\leqslant -c(\|x\|_\alpha),$$

其中 $a(\cdot), b(\cdot)\in KR$, $c(\cdot)\in K[0,\infty)$, 则方程 (4.1) 的零解是全局一致渐近稳定的.

以上定理的证明与动力系统相应定理的证明完全一样, 不过这里还要用到解的延拓定理.

如果不知道 Lyapunov 函数是否有上述性质, 还能用它来讨论解的极限性质吗? 下面的定理回答了这个问题.

定理 9.4.5　设 A 有紧预解式, 对某 $0\leqslant\alpha<1$ 及任意 $x\in X^\alpha$, 方程 (4.1) 的解 $u(t;x)$ 在 $[0,\infty)$ 上存在且 $\|u(t;x)\|_\alpha\leqslant M(x)$, 其中 $M(x)$ 是依赖于 x 的常数. 如果方程 (4.1) 在 X^α 中存在 Lyapunov 函数, 并且 $\{x: \dot{V}(x)=0,\ x\in X^\alpha\}$ 由唯一元素 u_0 组成, 则当 $t\to\infty$ 时, 在 X^α 中有

$$u(t;x)\to u_0.$$

证明　在定理的条件下, $\{u(t;x)\}_{t\geqslant 0}$ 是紧集, $L_\omega(u(0,x))$ 非空, $L_\omega(u(0;x))=\{u_0\}$. 因此, 当 $t\to\infty$ 时,

$$u(t;x)\to u_0.$$

证毕.

9.4.3　例子

考察一类问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u), \quad x \in (0,\pi), \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

取 $X = L_2(0,\pi), A = -\partial_x^2$, 则

$$D(A) = H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi), \quad X^{\frac{1}{2}} = D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(0,\pi).$$

把问题 (4.3) 改写成

$$u'(t) + Au = f(u). \tag{4.3$'$}$$

问题 (4.3) 具有初值 $u(x,0) = \varphi(x)$ 的解记为 $u(x,t;\varphi)$.

假设 $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$, 则对问题 (4.3) 和方程 (4.3)′, 下面的结论成立:

(1) $f : X^{\frac{1}{2}} \to X$ 是局部 Lipschitz 的, 并且当 $\Sigma \subset X^{\frac{1}{2}}$ 是有界闭集时, $f(\Sigma)$ 在 X 中是有界的;

(2) 对于方程 (4.3)′, 初值问题解的存在唯一性定理及解的延拓定理成立;

(3) 任意给定 $\varphi \in H_0^1(0,\pi)$, 问题 (4.3) 存在唯一古典解 $u(x,t;\varphi)$, 其存在区间是 $0 \leqslant t < T_0 \leqslant \infty$, 且 u_t, u_x, u_{xx} 在 $[0,\pi] \times (0,T_0)$ 上连续. 若对 $t \in [0,T_0)$, 解 $u(x,t;\varphi)$ 在 $H_0^1(0,\pi)$ 上有界, 则 $T_0 = \infty$;

(4) 问题 (4.3) 存在 Lyapunov 函数.

证明 令

$$F(u) = \int_0^u f(\xi)\mathrm{d}\xi,$$
$$V(\varphi) = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}[\varphi'(x)]^2 - F(\varphi(x))\right)\mathrm{d}x, \quad \varphi \in H_0^1(0,\pi).$$

显然, $V(\varphi)$ 在 $H_0^1(0,\pi)$ 上连续, 并且

$$V(u(x,t,\varphi)) = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}u_x^2 - F(u)\right)\mathrm{d}x.$$

下面求 $V'(t)$.

为了在积分号下对 t 求导并用分部积分, 对适当小的 $\delta > 0$ 和任意 $0 < t_1 < t_2 < T_0$, 取 $[\delta, \pi-\delta] \times [t_1,t_2]$ 上的 C^∞ 函数序列 $w_n(x,t)$, 使得 $n \to \infty$ 时,

$$w_n \to u, \quad (w_n)_x \to u_x, \quad (w_n)_{xx} \to u_{xx}, \quad (w_n)_t \to u_t$$

在 $[\delta,\pi-\delta] \times [t_1,t_2]$ 上一致成立.

令

$$V_\delta(\varphi) = \int_\delta^{\pi-\delta} \left(\frac{1}{2}[\varphi'(x)]^2 - F(\varphi(x))\right)\mathrm{d}x,$$

则对 $t_1 < t < t_2$ 有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_\delta(w_n(x,t))}{\mathrm{d}t} &= \int_\delta^{\pi-\delta} [(w_n)x(w_n)_{xt} - f(w_n(x,t))(w_n)_t]\mathrm{d}x \\ &= (w_n)_x(w_n)_t\Big|_\delta^{\pi-\delta} - \int_\delta^{\pi-\delta} [(w_n)_{xx} + f(w_n)](w_n)_t\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}V_\delta(w_n(x,t))}{\mathrm{d}t} = u_xu_t\Big|_\delta^{\pi-\delta} - \int_\delta^{\pi-\delta} u_t^2\mathrm{d}x$$

在 $[t_1, t_2]$ 上一致成立. 又因为

$$\lim_{n\to\infty} V_\delta(w_n(x,t)) = V_\delta(u(x,t;\varphi)),$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}V_\delta(u(x,t;\varphi))}{\mathrm{d}t}$ 存在且

$$\frac{\mathrm{d}V_\delta(u(x,t;\varphi))}{\mathrm{d}t} = u_xu_t\Big|_\delta^{\pi-\delta} - \int_\delta^{\pi-\delta} u_t^2\mathrm{d}x.$$

令 $\delta \to 0$, 得

$$\frac{\mathrm{d}V(u(x,t;\varphi))}{\mathrm{d}t} = u_xu_t\Big|_0^\pi - \int_0^\pi u_t^2\mathrm{d}x, \quad t > 0.$$

因此, 对任意 $\varphi \in H_0^1(0,\pi)$, 有

$$\frac{1}{t}[V(u(x,t;\varphi)) - V(u(x,0;\varphi))] = \dot{V}(u(x,t^*;\varphi)) \leqslant 0, \quad \text{其中 } t^* > 0,$$

由此推知 $\dot{V}(\varphi) \leqslant 0$. 这说明 $V(\varphi)$ 是问题 (4.3) 在 $H_0^1(0,\pi)$ 上的 Lyapunov 函数.

(5) 若对任意 $\varphi \in H_0^1(0,\pi)$ 有 $T_0 = \infty$, 则问题 (4.3) 在 $H_0^1(0,\pi)$ 上确定一个动力系统.

(6) 问题 (4.3) 的有界解的 ω 极限集包含在平衡解集中.

证明 设 $u(x;t)$ 是问题 (4.3) 的解并且 $\|u(x,t)\|_{H_0^1}$ 有界. 因为 A 有紧预解式, 所以 $\{u(x,t)\}_{t\geqslant 0}$ 是紧的. 若 $\varphi \in L_\omega(u(x,0))$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}V(u(x,t;\varphi))}{\mathrm{d}t} = 0$, 即 $\displaystyle\int_0^\pi u_t^2\mathrm{d}x = 0$. 于是 $u(x,t;\varphi)$ 与 t 无关, $u(x,t;\varphi) = \varphi(x)$ 满足

$$\begin{cases} \varphi''(x) + f(\varphi) = 0, & 0 < x < \pi, \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

因此, $L_\omega(u(x,0))$ 属于问题 (4.4) 的解集合.

例 1

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \lambda u - au^k, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geqslant 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

其中 $\lambda \geqslant 0$ 及 a 为常数, k 为奇数.

(1) 当 $a > 0$, $k \geqslant 3$ 时, 问题 (4.5) 在 $H_0^1(0,\pi)$ 上确定一个动力系统.

证明 由上面的讨论知

$$V(\varphi) = \int_0^\pi \left([\varphi'(x)]^2 - \lambda\varphi^2(x) + \frac{2a}{k+1}\varphi^{k+1}(x) \right) \mathrm{d}x$$

是问题 (4.5) 在 $H_0^1(0,\pi)$ 中的 Lyapunov 函数.

因为 $a > 0$,

$$\int_0^\pi \varphi^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\pi [\varphi'(x)]^2\mathrm{d}x, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(0,\pi),$$

所以

$$\frac{2a}{k+1}\int_0^\pi u^{k+1}\mathrm{d}x + (1-\lambda)\int_0^\pi u^2\mathrm{d}x \leqslant V(u(x,t;\varphi)) \leqslant V(\varphi). \tag{4.6}$$

注意到

$$\int_0^\pi u^2\mathrm{d}x \leqslant M \left(\int_0^\pi u^{k+1}\mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{k+1}},$$

故有

$$M_1 \left(\int_0^\pi u^2\mathrm{d}x \right)^{\frac{k+1}{2}} + (1-\lambda)\int_0^\pi u^2\mathrm{d}x \leqslant V(\varphi). \tag{4.7}$$

这里的 M 和 M_1 是正常数. 利用不等式 (4.6) 和 (4.7) 推知, $\int_0^\pi u^2\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^\pi u^{k+1}\mathrm{d}x$ 都有界. 再由 $V(u(x,t;\varphi)) \leqslant V(\varphi)$ 知, $\int_0^\pi u_x^2\mathrm{d}x$ 也有界. 因此, $\|u\|_{H_0^1}$ 有界, 故问题 (4.5) 在 $H_0^1(0,\pi)$ 上确定动力系统.

注 4.1 当 $a = 0$, $0 \leqslant \lambda < 1$, k 为奇数时, 问题 (4.5) 在 $H_0^1(0,\pi)$ 中确定一个动力系统. 这从上面的证明过程可以看出来.

(2) 当 $a \geqslant 0$, $0 \leqslant \lambda < 1$ 时, 原点在 $H_0^1(0,\pi)$ 中是全局渐近稳定的.

证明 令

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\varphi'(x)]^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\|\varphi\|_{H_0^1}^2.$$

如果 $u(x,t)$ 是问题 (4.5) 的解, 则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V(u(x,t))}{\mathrm{d}t} &= -\int_0^\pi u_{xx}u_t\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^\pi u_{xx}(u_{xx}+\lambda u-au^k)\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^\pi u_{xx}^2\mathrm{d}x+\lambda\int_0^\pi u_x^2\mathrm{d}x-ak\int_0^\pi u_x^2u^{k-1}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用

$$\int_0^\pi u_x^2\mathrm{d}x=-\int_0^\pi uu_{xx}\mathrm{d}x\leqslant\|u\|_{L_2}\|u_{xx}\|_{L_2}$$

及 Poincaré 不等式 $\|u\|_{L_2}\leqslant\|u_x\|_{L_2}$, 可得

$$\int_0^\pi u_x^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^\pi u_{xx}^2\mathrm{d}x.$$

于是有

$$\dot V(\varphi)\leqslant-(1-\lambda)\int_0^\pi\varphi_x^2\mathrm{d}x=-(1-\lambda)\|\varphi\|_{H_0^1}^2.$$

因此, 原点在 $H_0^1(0,\pi)$ 中是全局渐近稳定的.

(3) 当 $a>0$, $\lambda=1$ 时, 原点在 $H_0^1(0,\pi)$ 中是全局渐近稳定的. 当 $a=0$, $\lambda=1$ 时, 原点在 $H_0^1(0,\pi)$ 中稳定但不是渐近稳定的.

证明 当 $a\geqslant0$, $\lambda=1$ 时, 问题 (4.5) 仍有 Lyapunov 函数 $V(\varphi)=\dfrac{1}{2}\|\varphi\|_{H_0^1}^2$. 因此, 原点在 $H_0^1(0,\pi)$ 中是稳定的.

当 $a=0,\lambda=1$ 时, 问题 (4.5) 有解 $u=c\sin x$, c 为任意常数. 因此, 原点不是渐近稳定的.

当 $a>0$, $\lambda=1$ 时, 再考察

$$\begin{cases}\varphi''+\varphi-a\varphi^k=0, & 0<x<\pi,\\ \varphi(0)=\varphi(\pi)=0.\end{cases}\tag{4.8}$$

用 φ 乘方程两边并积分得

$$a\int_0^\pi\varphi^{k+1}\mathrm{d}x=\int_0^\pi(\varphi''+\varphi)\varphi\mathrm{d}x=\int_0^\pi[-(\varphi')^2+\varphi^2]\mathrm{d}x\leqslant0,$$

即 $\varphi\equiv0$.

因为 $\|u(x,t)\|_{H_0^1}$ 有界, A 有紧预解式, 所以由定理 9.4.5 和前面关于问题 (4.3) 的结论 (6) 知, $\{u(x,t)\}_{t\geqslant0}$ 是紧的, $L_\omega(u(x,0))$ 非空, 且 $L_\omega(u(x,0))=\{0\}$. 因此, 当 $t\to\infty$ 时, 在 $H_0^1(0,\pi)$ 中 $u(x,t)\to0$.

(4) 当 $a<0$, $\lambda=1$, $k=3$ 时, 原点在 $H_0^1(0,\pi)$ 中是不稳定的.

证明 在函数集

$$U=\{\varphi:\varphi\in H_0^1(0,\pi),V(\varphi)<0\}$$

中考虑 Lyapunov 函数

$$V(\varphi)=\int_0^\pi\left([\varphi'(x)]^2-\varphi^2(x)+\frac{\alpha}{2}\varphi^4(x)\right)\mathrm{d}x.$$

令 $\varphi(x)=c\sin x$, 则

$$V(\varphi)=\int_0^\pi c^2[\cos^2x-\sin^2x]\mathrm{d}x+\frac{a}{2}\int_0^\pi c^4\sin^4x\mathrm{d}x<0,$$

即 $c\sin x\in U$, 从而 U 是 $H_0^1(0,\pi)$ 中的非空开集.

若能选取原点的小邻域 N, 使得当 $\varphi\in N$ 时, $\dot V(\varphi)=0$ 当且仅当 $\varphi=0$, 则由定理 9.3.10 (其中 $\eta=0$) 推知, 如果 $\varphi\in N$, $V(\varphi)<0$, 那么具有初值 φ 的解 $u(x,t;\varphi)$ 总可达到 ∂N. 因此原点是不稳定的.

余下只需证明: 存在原点的小邻域 N, 当 $\varphi\in N$, $\dot V(\varphi)=0$ 时, 一定有 $\varphi=0$.

设 $a<0$, $\varphi(x)\neq0$ 是问题

$$\begin{cases}\varphi''+\varphi-a\varphi^3=0, & 0<x<\pi,\\ \varphi(0)=\varphi(\pi)=0\end{cases}\tag{4.9}$$

的解, 并记 $c=\max\limits_{[0,\pi]}|\varphi(x)|$.

(1) $\varphi(x)$ 有以下特点: 在相邻的两个零点中函数 $\varphi(x)$ 关于这两个零点的中垂线对称, 在相邻的三个零点中关于中间零点是中心对称 (图 9.4.1 与图 9.4.2). 因此, 若 $\varphi(x)$ 在 $[0,\pi]$ 有 $n+1$ 个零点, 则 $\varphi'\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)=0$, $\left|\varphi\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)\right|$ 是 $|\varphi(x)|$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值.

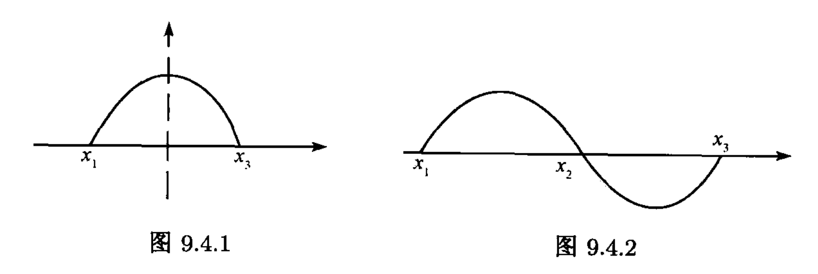


图 9.4.1　　图 9.4.2

(2) 若 $\varphi(x)$ 在 $[0,\pi]$ 有 $n+1$ 个零点, 则

$$\frac{\pi}{2n}=\int_0^c\left(c^2-\frac{a}{2}c^4-\varphi^2+\frac{a}{2}\varphi^4\right)^{-1/2}\mathrm{d}\varphi.\tag{4.10}$$

事实上, 由于

$$\varphi\Big(\frac{\pi}{2n}\Big)=c,\quad \varphi'\Big(\frac{\pi}{2n}\Big)=0,\quad (\varphi')^2+\varphi^2-\frac{a}{2}\varphi^4=\text{常数}$$

(这里不妨设 $\varphi'(0)>0$, 因为 $-\varphi(x)$ 也是 (4.9) 的解), 所以

$$(\varphi')^2+\varphi^2-\frac{a}{2}\varphi^4=c^2-\frac{a}{2}c^4,\quad \mathrm{d}x=\Big(c^2-\frac{a}{2}c^4-\varphi^2+\frac{a}{2}\varphi^4\Big)^{-1/2}\mathrm{d}\varphi.$$

从 0 到 $\dfrac{\pi}{2n}$ 对 x 积分, 即得 (4.10) 式.

(3) 对于 $c>0$, 由 (4.10) 式右端的积分所确定的函数记为 $J(c)$, 则

$$J(c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(1-\frac{a}{2}c^2(1+\sin^2\theta)\Big)^{-1/2}\mathrm{d}\theta.$$

事实上, 只要在积分中作代换 $\varphi=c\sin\theta$ 即可.

(4) 若 $0<c\leqslant 3/|a|$, 则 $\pi/4<J(c)<\pi/2$.

事实上, 直接计算知

$$J'(c)=\frac{ac}{2}\int_0^{\pi/2}\Big(1-\frac{a}{2}c^2(1+\sin^2\theta)\Big)^{-3/2}(1+\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta<0,$$

$$J(\sqrt{3/|a|})=\int_0^{\pi/2}\Big(1+\frac{3}{2}(1+\sin^2\theta)\Big)^{-1/2}\mathrm{d}\theta>\frac{\pi}{4}.$$

又因为 $J(0^+)=\pi/2$, 所以当 $0<c\leqslant\sqrt{3/|a|}$ 时,

$$\pi/4<J(\sqrt{3/|a|})\leqslant J(c)<J(0^+)=\pi/2.$$

其次, 由上述证明还可以看出, 如果 $\varphi(x)$ 是问题 (4.9) 的解, 并且 $\max\limits_{[0,\pi]}|\varphi(x)|\leqslant\sqrt{3/|a|}$, 则 $\varphi(x)\equiv 0$. 若不然, 有

$$0<c=\max_{[0,\pi]}|\varphi(x)|\leqslant\sqrt{3/|a|}.$$

于是 $\pi/4<J(c)<\pi/2$. 此与 $J(c)=\pi/(2n)$ 矛盾.

最后只需注意, 当 $\varphi\in H_0^1(0,\pi)$ 时,

$$\max_{[0,\pi]}|\varphi(x)|\leqslant\sqrt{\pi}\|\varphi\|_{H_0^1}.$$

因此, 上述要求的原点邻域 N 是存在的. 证毕.

例 2 考察

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+\lambda u-\rho u^k, & 0<x<\pi,\quad t>0,\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, & t>0, \end{cases}\tag{4.11}$$

其中 $\lambda \geqslant 0$, $\rho > 0$ 为常数, k 为偶数.

(1) 令 $C^+ = \{\varphi \in H_0^1(0,\pi) : \varphi(x) \geqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$, 则问题 (4.11) 在 C^+ 上确定动力系统.

事实上易证, 若 $\varphi \in C^+$, 则问题 (4.11) 的解 $u(x,t;\varphi) \in C^+$ (在解的存在区间上). 同例 1 的证明, 可证 $\|u(x,t;\varphi)\|_{H_0^1}$ 有界. 因此问题 (4.11) 在 C^+ 上确定一个动力系统.

(2) 当 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 时, 原点在 C^+ 是全局渐近稳定的.

该结论与例 1 中 (2) 和 (3) 的讨论相同.

(3) 当 $\lambda > 1$ 时, 边值问题

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi - \rho\varphi^k = 0, & 0 < x < \pi, \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0 \end{cases}$$

在 C^+ 上有唯一不恒为零的解 $\varphi^+(x)$ (定理 2.3.28). 若 $u(x,t;\varphi) = u(x,t)$ 是问题 (4.11) 的解, $\varphi \in C^+$ 且 $\varphi(x) \not\equiv 0$, 则当 $t \to \infty$ 时, $\|u(\cdot,t) - \varphi^+(\cdot)\|_{H_0^1} \to 0$.

事实上, $L_\omega(u(\cdot,0))$ 非空, 至多由两个元素 0 与 φ^+ 组成. 因为 $L_\omega(u(\cdot,0))$ 是连通的, 所以只能由一个元素组成.

若 $L_\omega(u(\cdot,0)) = \{0\}$, 则当 $t \to \infty$ 时, $\|u(\cdot,t)\|_{H_0^1} \to 0$. 于是

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^\pi u(x,t)\sin x\mathrm{d}x = 0. \tag{4.12}$$

另一方面, 由于 $\max\limits_{[0,\pi]} |u(x,t)| \leqslant \sqrt{\pi}\|u\|_{H_0^1} \to 0$, $\lambda > 1$, 所以当 t 充分大时, $\lambda - 1 - \rho u^{k-1} > 0$. 利用

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_0^\pi u(x,t)\sin x\mathrm{d}x &= \int_0^\pi u_{xx}\sin x\mathrm{d}x + \lambda\int_0^\pi u\sin x\mathrm{d}x - \rho\int_0^\pi u^k\sin x\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi (\lambda - 1 - \rho u^{k-1})u\sin x\mathrm{d}x \end{aligned}$$

以及 $u > 0$ 便可推得, 当 t 充分大时,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_0^\pi u(x,t)\sin x\mathrm{d}x > 0.$$

这与 (4.12) 式矛盾. 因此

$$L_\omega(u(\cdot,0)) = \{\varphi^+(x)\}, \quad \|u(\cdot,t) - \varphi^+(\cdot)\|_{H_0^1} \to 0 \quad (t \to \infty).$$

证毕.

本例证明了第 2 章中给出的平衡解分支问题的稳定性.

9.4.4 关于渐近稳定性的逆定理

对于自治方程 (4.1), 可用 Lyapunov 函数判断零解的一致渐近稳定性. 反过来, 还可证明它的逆定理, 即零解的一致渐近稳定性保证了 Lyapunov 函数的存在性.

定理 9.4.6　设 U 是 X^α $(0 \leqslant \alpha < 1)$ 中原点的邻域, $f: U \to X$ 是 Lipschitz 连续的, $f(0)=0$. 如果对于方程 (4.1), $x=0$ 在 X^α 中是一致渐近稳定的, 则存在正常数 β, K_0, r 和严格增函数 $a(\cdot) \in C([0,r])$, $a(0)=0$, 以及定义于 $\|x\|_\alpha \leqslant r$ 上的实函数 $V(x)$, 使得当 $\|x\|_\alpha \leqslant r$, $\|y\|_\alpha \leqslant r$ 时, 有

(1) $a(\|x\|_\alpha) \leqslant V(x) \leqslant K_0\|x\|_\alpha$;

(2) $|V(x)-V(y)| \leqslant K_0\|x-y\|_\alpha$;

(3) $\dot V(x) \leqslant -\beta V(x)$.

证明　分以下几步进行.

(1) 先估计方程的解 $u(t;x)$ 及差 $u(t;x)-u(t;y)$.

令

$$\theta(t) = \sup_{\substack{\|x\|_\alpha \leqslant r_0 \\ s\in[t,\infty)}} \|u(s,x)\|_\alpha + r_0\theta_0(t),$$

其中 $\theta_0(t)$ 是任一严格单调下降的连续函数且 $\lim\limits_{t\to\infty}\theta_0(t)=0$, 而常数 $r_0>0$ 充分小, 使得当 $\|x\|_\alpha \leqslant r_0$ 时, $u(t;x)$ 一致趋于零 $(t\to\infty)$. 显然 $\lim\limits_{r_0\to 0}\theta(0)=0$ 且

$$\|u(t;x)\|_\alpha \leqslant \theta(t).$$

若 r_0 充分小, 则 f 在半径为 $\theta(0)$ 的球上是 Lipschitz 连续的. 于是当 $\|x\|_\alpha$, $\|y\|_\alpha \leqslant r_0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\|u(t;x)-u(t;y)\|_\alpha &\leqslant \|\mathrm{e}^{-tA}(x-y)\|_\alpha + \int_0^t \|A^\alpha \mathrm{e}^{-(t-s)A}\| \cdot \|f(u(s;x))-f(u(s;y))\|\mathrm{d}s \\ &\leqslant M\|x-y\|_\alpha + M\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\|u(s;x)-u(s;y)\|_\alpha \mathrm{d}s,\end{aligned}$$

这里不妨认为 $\mathrm{Re}\,\sigma(A)>0$. 利用带奇性的 Gronwall 不等式得

$$\|u(t;x)-u(t;y)\|_\alpha \leqslant L\mathrm{e}^{Mt}\|x-y\|_\alpha,$$

其中 L, M 为正常数.

(2) 构造函数 $V_k(x)$ 满足部分条件.

容易验证: $\sup\limits_{t\geqslant 0}\mathrm{e}^{-Mt}\|u(t;x)\|$ 满足条件 (2), $\sup\limits_{t\geqslant 0}\mathrm{e}^{\beta t}\|u(t;x)\|$ 满足条件 (3). 现对它们作修改. 定义

$$g(\varepsilon) = \exp\{-(\beta+M)T(\varepsilon)\}, \quad g(0)=0,$$

其中 β 是任一正数, $T(\varepsilon)$ 是 $\theta(t)$ 的反函数, $T(\varepsilon)$ 在 $0<\varepsilon<\theta(0)$ 上连续, 当 $\varepsilon\to 0^+$ 时, $T(\varepsilon)\to\infty$. 再定义

$$G_k(z)=\max\left\{0,\ z-\frac{1}{k}\right\},\quad k\geqslant 1\ \text{为自然数},$$

$$V_k(x)=g\left(\frac{1}{k+1}\right)\sup_{t\geqslant 0}\left\{\mathrm{e}^{\beta t}G_k(\|u(t;x)\|_\alpha)\right\}.$$

注意到 $T^{-1}(t)$ 是严格单调下降的, 当 $t\geqslant T_k=T\left(\dfrac{1}{k+1}\right)$ 时, 有

$$\|u(t;x)\|_\alpha\leqslant\theta(t)=T^{-1}(t)<\frac{1}{k+1}.$$

因此

$$V_k(x)=g\left(\frac{1}{k+1}\right)\sup_{0\leqslant t\leqslant T_k}\left\{\mathrm{e}^{\beta t}G_k(\|u(t;x)\|_\alpha)\right\}.$$

可以验证它满足:

(i) $0\leqslant V_k(x)\leqslant\theta(0)$;

(ii) 当 $\|x\|_\alpha,\ \|y\|_\alpha\leqslant r_0$ 时, $|V_k(x)-V_k(y)|\leqslant L\|x-y\|_\alpha$.

事实上, 因为

$$\left|G_k(\|u(t;x)\|_\alpha)-G_k(\|u(t;y)\|_\alpha)\right|\leqslant\left|\|u(t;x)\|_\alpha-\|u(t;y)\|_\alpha\right|,$$

所以

$$|V_k(x)-V_k(y)|\leqslant g\left(\frac{1}{k+1}\right)L\mathrm{e}^{(\beta+M)T_k}\|x-y\|_\alpha=L\|x-y\|_\alpha.$$

(iii) 当 $\|x\|_\alpha\leqslant r_0$ 时, $\dot V_k(x)\leqslant-\beta V_k(x)$.

事实上, 由于

$$\begin{aligned}V_k(u(h;x))&=g\left(\frac{1}{k+1}\right)\sup_{t\geqslant 0}\{\mathrm{e}^{\beta t}G_k(\|u(t+h;x)\|_\alpha)\}\\&=g\left(\frac{1}{k+1}\right)\sup_{t\geqslant h}\{\mathrm{e}^{-\beta h}\mathrm{e}^{\beta t}G_k(\|u(t;x)\|_\alpha)\}\\&\leqslant\mathrm{e}^{-\beta h}V_k(x),\\\frac{V_k(u(h;x))-V_k(x)}{h}&\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-\beta h}-1}{h}V_k(x),\end{aligned}$$

所以

$$\dot V_k(x)\leqslant-\beta V_k(x).$$

(3) 最后构造 $V(x)$.

令

$$V(x)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}V_k(x),\quad \|x\|_\alpha\leqslant r_0.$$

因为当 $\|x\|_\alpha\leqslant r_0$ 时 $|V_k(x)|\leqslant\theta(0)$, 所以级数一致收敛, 且满足: 当 $\|x\|_\alpha,\|y\|_\alpha\leqslant r_0$ 时,

$$V(0)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}V_k(0)=0,$$

$$|V(x)-V(y)|\leqslant L\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\|x-y\|_\alpha\leqslant L\|x-y\|_\alpha,$$

$$V(x)\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}g\left(\frac{1}{k+1}\right)G_k(\|x\|_\alpha):=a(\|x\|_\alpha),$$

同时, 这里的函数 $a(\cdot)$ 满足:

(i) $a(0)=0,\ |a(\|x\|_\alpha)-a(\|y\|_\alpha)|\leqslant|\,\|x\|_\alpha-\|y\|_\alpha|$;

(ii) 当 $0<\|x\|_\alpha<\|y\|_\alpha\leqslant r_0$ 时,

$$a(\|y\|_\alpha)-a(\|x\|_\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}g\left(\frac{1}{k+1}\right)[G_k(\|y\|_\alpha)-G_k(\|x\|_\alpha)]>0.$$

这样就得到

$$\begin{aligned}\frac{V(u(h;x))-V(x)}{h}&=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\,\frac{V_k(u(h;x))-V_k(x)}{h}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}V_k(x)\frac{\mathrm{e}^{-\beta h}-1}{h},\end{aligned}$$

从而

$$\dot V(x)\leqslant-\beta V(x)\quad(\|x\|\leqslant r_0).$$

证毕.

作为定理 9.4.6 的应用, 讨论含参数 ε 的自治方程

$$u'(t)+Au=f(u,\varepsilon),\tag{E$_\varepsilon$}$$

其中 $f(0,0)=0$. 有下面的结果.

定理 9.4.7　假设当 $\varepsilon=0$ 时, 对 (E_0), $x=0$ 是一致渐近稳定的. 又设对于 $\|x\|_\alpha,\|y\|_\alpha\leqslant r,\ |\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$, 有

$$\|f(x,\varepsilon)-f(y,\varepsilon)\|_\alpha\leqslant L\|x-y\|_\alpha,$$

且当 $\varepsilon \to 0$ 时, 对 $\|x\|_\alpha \leqslant r$ 一致地有

$$\|f(x,\varepsilon) - f(x,0)\|_\alpha \to 0.$$

则在 X^α 中存在原点的邻域 $U \subset \{\|x\|_\alpha < r\}$, 当 $|\varepsilon|$ 充分小时, 对 (E_ε) 它是正不变的.

证明 设 $V(x)$ 是由定理 9.4.6 给出的 (E_0) 的 Lyapunov 函数, 沿 (E_ε) 的解 $u(t;x,\varepsilon)$ 估计 V 的右上导数 $\dot{V}_\varepsilon(x)$.

$$\begin{aligned}
\dot{V}_\varepsilon(x) &= \lim_{h\to 0^+} \sup \frac{1}{h}[V(u(h;x,\varepsilon)) - V(x)] \\
&\leqslant \lim_{h\to 0^+} \sup \frac{1}{h}[V(u(h;x,\varepsilon)) - V(u(h;x,0))] + \lim_{h\to 0^+} \sup \frac{1}{h}[V(u(h;x,0)) - V(x)] \\
&\leqslant K(r) \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\|u(h;x,\varepsilon) - u(h;x,0)\|_\alpha + \dot{V}(x).
\end{aligned}$$

现设 $\|x\|_\alpha \leqslant r$, $r > 0$ 充分小, 则

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon(t) - u_0(t) :=& \ u(t;x,\varepsilon) - u(t;x,0) \\
=& \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}[f(u_\varepsilon(s),\varepsilon) - f(u_0(s),\varepsilon)]\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}[f(u_0(s),\varepsilon) - f(u_0(s),0)]\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

于是

$$\|u_\varepsilon(t) - u_0(t)\|_\alpha \leqslant ML\int_0^t \|u_\varepsilon(s) - u_0(s)\|_\alpha \mathrm{d}s + Mt\Delta(\varepsilon),$$

其中

$$\Delta(\varepsilon) = \sup_{\|x\|_\alpha \leqslant r} \|f(x,\varepsilon) - f(x,0)\|_\alpha.$$

由 Gronwall 不等式可得, 对充分小的 $h > 0$, 有

$$\|u(h;x,\varepsilon) - u(h;x,0)\|_\alpha \leqslant M_2 h\Delta(\varepsilon).$$

因此

$$\dot{V}_\varepsilon \leqslant \dot{V}(x) + K(r)M_2\Delta(\varepsilon).$$

先取 $l > 0$, 使得

$$U = \{x : V(x) < l\} \subset \{\|x\|_\alpha < r\}.$$

当 $V(x) = l$ 时, $\dot{V}(x) \leqslant -\beta V(x) = -\beta l$. 因而 $|\varepsilon|$ 充分小时,

$$\dot{V}_\varepsilon(x) \leqslant -\beta l + K(r)M_2\Delta(\varepsilon) < 0.$$

这就得到, 若 $V(x) < l$, 则对一切 $t > 0$ 有

$$V(u(t; x, \varepsilon)) < l,$$

即 U 是正不变的. 证毕.

9.5 渐近自治方程

现在利用自治方程来讨论一类非自治方程 —— 渐近自治方程.

设 A 是 X 中的扇形算子, U 是 X^α 中的一个开集, $0 \leqslant \alpha < 1$. 如果当 $t \to \infty$ 时, 在每一个点 $u \in U$ 的邻域内一致有 $\|f(t,u) - g(u)\| \to 0$, 则称

$$u'(t) + Au = f(t, u) \tag{5.1}$$

为渐近自治方程, 相应地得到一个自治方程

$$v'(t) + Av = g(v). \tag{5.2}$$

下面讨论方程 (5.1) 的解的极限状态与方程 (5.2) 的解之间的关系.

定理 9.5.1 设 A 有紧预解式, $f : \mathbb{R}^+ \times U \to X$ 是局部 Lipschitz 连续的, 对任意有界闭集 $B \subset U$, $f(\mathbb{R}^+ \times B)$ 在 X 中有界. 又当 $t \to \infty$ 时, 在每一个点 $u \in U$ 的邻域内一致地有 $\|f(t,u) - g(u)\| \to 0$, 而 g 在 U 内是局部 Lipschitz 连续的. 若当 $t \geqslant t_0$ 时, 方程 (5.1) 有解 $u(t)$, 且它包含在有界闭集 $B \subset U$ 内, 则

$$\lim_{t \to \infty} \rho(u(t), M) = 0,$$

其中 M 是 B 中关于 (5.2) 的最大不变子集.

证明 由解的紧性定理可知, $B \supset K := \{u(t)\}_{t \geqslant t_0}$ 是一个紧集. 设 v_0 是 K 的任一极限点, 即存在 $t_n \to \infty$, 使得 $v_0 = \lim\limits_{n \to \infty} u(t_n)$.

考察

$$\begin{cases} v'(t) + Av = g(v), \\ v(0) = v_0. \end{cases} \tag{5.3}$$

由解的局部存在性定理知, 问题 (5.3) 存在解 $v(t)$. 进一步可知, 解的存在区间是 $[0, \infty)$. 若不然, 由解的延拓定理, 存在 $0 < T < \infty$, 使得 $v(t)$ 在 $[0, T]$ 上有定义, 而 $v(T) \notin B$. 因为 $\{u(t)\}_{t \geqslant t_0} \subset B$, 所以

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v(t) - u(t + t_n)\|_\alpha \geqslant a > 0.$$

另一方面, $u(t+t_n)$ 满足

$$\begin{cases} u'(t) + Au = f(t+t_n, u), \\ u|_{t=0} = u(t_n). \end{cases}$$

根据假设条件容易推出,

$$\lim_{n\to\infty} f(t+t_n, u) = g(u)$$

在 $\mathbb{R}^+ \times U$ 的任何一点 (t,u) 的邻域内是一致的. 利用解对初值及右端函数的连续性定理知, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\sup_{t\in[0,T]} \|v(t) - u(t+t_n)\|_\alpha \to 0.$$

故得一个矛盾. 同时上面的讨论还说明了 $\{v(t)\}_{t\geqslant 0} \subset B$.

按照证明紧轨道的极限集具有不变性的方法可知, 存在 $\{t_n\}$ 的一个子列 $\{t'_n\}$, 使得对于 $k = 0, 1, 2, \cdots$, 存在极限

$$\lim_{n\to\infty} u(t'_n - k) = v_k.$$

同样道理

$$\begin{cases} v'(t) + Av = g(v), \\ v(0) = v_k, \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

在 $[0,\infty)$ 上存在解 $v(t; v_k)$, 并且 $\{v(t; v_k)\}_{t\geqslant 0} \subset B$.

按如下方法延拓 $v(t)$, 使之在 $(-\infty, 0)$ 上有定义

$$v(t) = v(t+k; v_k), \quad -k \leqslant t \leqslant 0, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

这样就把问题 (5.3) 的解延拓到 $(-\infty, \infty)$ 上, 并且还有

$$\{v(t)\}_{t\in(-\infty,\infty)} \subset B.$$

以上证明了, 对于 $u(t)$ 的任意极限点 v_0, 问题 (5.3) 的解 $\{v(t, v_0)\}_{t\in(-\infty,\infty)} \subset B$. 从而, $v_0 \in M \subset B$. 进而得到

$$\rho(u(t), M) \leqslant \rho(u(t), L_\omega(u(t))).$$

因此, 当 $t \to \infty$ 时, $u(t) \to M$. 证毕.

定理 9.5.2 假设 A, f, g 满足定理 9.5.1 的条件, 其中 U 是 X^α 中包含原点的开集. 还假定 $f(t,0) \equiv 0$, $g(0) = 0$, 并且 $u = 0$ 对于极限方程 (5.2) 是一致渐近稳定的. 那么 $u = 0$ 对于方程 (5.1) 也是一致渐近稳定的.

证明略, 有兴趣的读者可参见 [Hen].

注 5.1 对算子 $-A$ 仅为 X 上某 C_0 半群的无穷小生成元情形, 若取 U 是 X 中的一个开集, $f: U \to X$ 为局部 Lipschitz 的, 假设 E 是 U 的闭子集且关于 (1.1) 是正不变的, 由连续半群理论易见由 (1.1) 的在 X 上的唯一适度解定义的映射 $S(t)$ 仍满足定义 9.1.1 中性质 (1)—(4), 即仍可定义 E 上的一个动力系统. 9.1—9.5 节中关于动力系统的相关定义、抽象结果及相关证明均可推广到 $-A$ 为 C_0 半群的无穷小生成元情形, 此时相应的解可取为 X 上的适度解 (或古典解), 且总是假设: U 是 X 中的一个开集 (对古典解情形取 U 是 $Y = D(A)$ 中开集), $f: U \to X$ 为局部 Lipschitz 的 (对古典解情形假设 $f: U \to Y$ 为局部 Lipschitz 的).

9.6 判断稳定性的线性近似方法

同常微分方程一样, 也可以利用方程

$$u'(t) + Au = f(t, u)$$

的线性近似方程来判断解的稳定性.

9.6.1 线性方程的稳定性

先考察线性齐次方程

$$u'(t) + Au = 0,$$

其中 $-A$ 是 Banach 空间 X 中某 C_0 半群的无穷小生成元, 该方程满足初值 $u(t_0) = x$ 的解是 $u(t; t_0, x) = \mathrm{e}^{-(t-t_0)A}x$.

定理 9.6.1 在 $[t_0, \infty)$ 上,

(1) $u = 0$ 在 X 中是稳定 (一致稳定) 的充要条件是: 存在常数 $K > 0$, 使得

$$\|\mathrm{e}^{-(t-t_0)A}\| \leqslant K, \quad t \geqslant t_0; \tag{6.1}$$

(2) $u = 0$ 在 X 中是一致渐近稳定的与下列任一条件等价:

(i) 存在常数 $\beta > 0, K > 0$, 使得

$$\|\mathrm{e}^{-(t-t_0)A}\| \leqslant K\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)}; \tag{6.2}$$

(ii) $u = 0$ 在 X 中是渐近指数稳定的;

(iii) 当 A 为扇形算子时, $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$;

(iii′) 当 $-A$ 仅生成 C_0 半群时, $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$ 且

$$\sup_{\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0} \|(\lambda I + A)^{-1}\| < \infty.$$

证明 (1) 先设 (6.1) 式成立, 则对给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \varepsilon/K$, 使得当 $\|x\| < \varepsilon/K$ 时,

$$\|e^{-(t-t_0)A}x\| \leqslant \|e^{-(t-t_0)A}\| \cdot \|x\| < \varepsilon.$$

这说明 $u=0$ 在 X 中是稳定的. 类似可证 $u=0$ 还是一致稳定的.

反之, 设 $u=0$ 在 X 中是稳定的, 则对给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $\|x\| \leqslant \delta$ 时, 有

$$\|e^{-(t-t_0)A}x\| < \varepsilon.$$

于是

$$\|e^{-(t-t_0)A}\| = \sup_{\|\xi\|_X=1} \|e^{-(t-t_0)A}\xi\| \leqslant \sup_{\|x\|=\delta} \|e^{-(t-t_0)A}\delta^{-1}x\| < \delta^{-1}\varepsilon = K.$$

(2) 设 $u=0$ 在 X 中是一致渐近稳定的, 则存在 $b>0$, 使得对任意 $0<\eta<b$, 存在 $T=T(\eta)>0$, 使得当 $\|x\| \leqslant b$, $t \geqslant t_0+T$ 时, 有

$$\|e^{-(t-t_0)A}x\| < \eta.$$

因此

$$\|e^{-(t-t_0)A}\| \leqslant b^{-1}\eta, \quad t \geqslant t_0+T,$$

特别有

$$\|e^{-TA}\| \leqslant b^{-1}\eta < 1.$$

对任意 $t \geqslant t_0$, 存在非负整数 n, 使 $nT \leqslant t-t_0 \leqslant (n+1)T$, 于是

$$\|e^{-(t-t_0)A}\| = \|e^{-A(t-t_0-nT)}e^{-AnT}\|_{X\to X} \leqslant M\|e^{-AnT}\| \leqslant M(b^{-1}\eta)^n.$$

取 $(b^{-1}\eta)^n = e^{-\beta nT}$, 即 $\beta = -T^{-1}\ln(b^{-1}\eta)$, 得

$$\begin{aligned}\|e^{-(t-t_0)A}\| &\leqslant Me^{-\beta nT} = Me^{\beta T}e^{-\beta(n+1)T} \leqslant Ke^{-\beta(n+1)T}\\ &\leqslant Ke^{-\beta(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0,\end{aligned}$$

其中 $K = Me^{\beta T}$.

这就证明了: 由 $u=0$ 一致渐近稳定 $\Longrightarrow$(i) 成立.

现设 (i) 成立, 取 $\delta = \varepsilon/K$, 得 $u=0$ 在 X 中是渐近指数稳定的, 即由 (i)$\Longrightarrow$(ii).

若 (ii) 成立, 即 $u=0$ 在 X 中是渐近指数稳定的, 显然 (i) 成立.

最后由连续半群及解析半群的渐近理论 (定理 8.2.8 及定理 8.4.20) 知 (iii′) 及 (iii) 与 (i) 等价. 证毕.

注 6.1 当 A 为 X 中的扇形算子时, 定理 9.6.1 中的相应稳定性条件及等价性在任意给定的 X^α $(\alpha > 0)$ 中仍成立, 此时定理叙述及证明中的范数 $\|\cdot\|$ 可取为

相应的 $\|\cdot\|_\alpha$. 特别当 $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > \beta > 0$ 时, 由解析半群理论, 半群 e^{-tA} 有下面的更细致的衰减估计:

$$\|\mathrm{e}^{-tA}\|_{X^\alpha \to X^\alpha} \leqslant K\mathrm{e}^{-\beta t}, \quad \forall \alpha \geqslant 0, \quad \forall t \geqslant 0,$$
$$\|\mathrm{e}^{-tA}\|_{X \to X^\alpha} \leqslant K_\alpha t^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\beta t}, \quad \forall \alpha > 0, \quad \forall t > 0.$$

9.6.2 按线性近似方程确定稳定性

现考虑非线性方程

$$u'(t) + Au = f(t, u), \tag{6.3}$$

其中 A 在 Banach 空间 X 上生成连续半群或解析半群.

设 u_0 是一个平衡点, 把 $f(t,u)$ 在 u_0 展开

$$f(t, u_0 + v) = f(t, u_0) + Bv + g(t, v),$$

这里 u_0 满足: $Au_0 = f(t, u_0)$.

当 $-A$ 仅生成 C_0 半群时, 假设

$$(\mathrm{H}_1)\begin{cases} ① \ U \text{ 是 } \mathbb{R}\times X \text{ 中 } (\tau,\infty)\times\{u_0\} \text{ 的某柱形邻域;} \\ ② \ f: U \to X \text{ 对 } t \text{ 连续, 对 } u \text{ 局部 Lipschitz 连续;} \\ ③ \ B \text{ 是 } X \text{ 上的有界线性算子;} \\ ④ \text{ 当 } \|v\| \to 0 \text{ 时, 对 } t > \tau \text{ 一致地有 } \|g(t,v)\| = o(\|v\|). \end{cases}$$

作变换 $u = u_0 + v$, 则方程 (6.3) 化为

$$v'(t) + Lv = g(t, v), \tag{6.4}$$

其中 $L = A - B$ ($-L$ 仍是某 C_0 半群无穷小生成元).

方程 (6.4) 的线性近似方程是

$$v'(t) + Lv = 0. \tag{6.5}$$

若线性方程 (6.5) 的零解在 X 中为渐近指数稳定的, 称非线性方程的平衡点 u_0 在 X 中为线性指数稳定的.

若 A 是 X 中的扇形算子, 对某个 $0 \leqslant \alpha < 1$, 假设:

$$(\mathrm{H}_1^\alpha)\begin{cases} ① \ U \text{ 是 } \mathbb{R}\times X^\alpha(0\leqslant\alpha<1) \text{ 中 } (\tau,\infty)\times\{u_0\} \text{ 的某柱形邻域;} \\ ② \ f: U \to X \text{ 对 } t \text{ 局部 Hölder 连续, 对} u \text{ 局部 Lipschitz 连续;} \\ ③ \ B \text{ 是 } X^\alpha \text{ 到 } X \text{ 的有界线性算子;} \\ ④ \text{ 当 } \|v\|_\alpha \to 0 \text{ 时, 对 } t > \tau \text{ 一致地有 } \|g(t,v)\| = o(\|v\|_\alpha). \end{cases}$$

下面在假设条件 (H_1) 或 (H_1^α) 之下, 基于连续半群和解析半群的适定性理论及渐近稳定性理论的证明, 可证若方程 (6.3) 的平衡点 u_0 为线性指数稳定的, 则 u_0 为局部渐近指数稳定的.

定理 9.6.2 假设 u_0 是方程 (6.3) 的平衡点, A 为 X 中的扇形算子. 又设对某 $0 \leqslant \alpha < 1$, 条件 (H_1^α) 成立. 若对某 $\beta > 0$, $\mathrm{Re}\,\sigma(L) > \beta$, 或者等价地说, 若 u_0 在 X^α 中为线性指数稳定的, 则方程 (6.3) 的平衡点 u_0 在 X^α 中是局部渐近指数稳定的, 即存在 $\rho > 0, M \geqslant 1$, 使得若 $t_0 > \tau$, $x \in X^\alpha$, $\|x-u_0\|_\alpha \leqslant \rho/(2M)$, 则在 $t_0 \leqslant t < \infty$ 上, 方程 (6.3) 存在唯一古典解 $u(t;t_0,x)$, 并且当 $t \geqslant t_0$ 时, 还有

$$\|u(t;t_0,x)-u_0\|_\alpha \leqslant 2M\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)}\|x-u_0\|_\alpha.$$

证明 取 β' 使 $\mathrm{Re}\,\sigma(L) > \beta' > \beta > 0$. 因为 L 是扇形算子, 所以存在 $M \geqslant 1$, 使得

$$\|\mathrm{e}^{-tL}v\|_\alpha \leqslant M\mathrm{e}^{-\beta' t}\|v\|_\alpha, \quad \forall t \geqslant 0,$$
$$\|\mathrm{e}^{-tL}v\|_\alpha = \|L^\alpha \mathrm{e}^{-tL}v\| \leqslant Mt^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\beta' t}\|v\|, \quad \forall t > 0.$$

先取 $\sigma > 0$ 充分小, 使得

$$M\sigma\int_0^\infty s^{-\alpha}\mathrm{e}^{-(\beta'-\beta)s}\mathrm{d}s < \frac{1}{2},$$

再取 $\rho > 0$ 充分小, 使得当 $\|v\|_\alpha \leqslant \rho$, $t > \tau$ 时,

$$\|g(t,v)\| \leqslant \sigma\|v\|_\alpha.$$

令 $v = u(t;t_0,x)-u_0$, 则 v 满足方程 (6.4). 于是有

$$v(t) = \mathrm{e}^{-(t-t_0)L}v(t_0) + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-(t-s)L}g(s,v(s))\mathrm{d}s. \tag{6.6}$$

若 $\|v(t_0)\|_\alpha = \|x-u_0\|_\alpha \leqslant \rho/(2M)$, 则在某区间上方程 (6.6) 的解存在且有 $\|v(t)\|_\alpha \leqslant \rho$. 而当 $\|v(t)\|_\alpha \leqslant \rho$ 时,

$$\begin{aligned}\|v(t)\|_\alpha &\leqslant \frac{\rho}{2} + \sigma M\int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\beta'(t-s)}\|v(s)\|_\alpha\mathrm{d}s \\ &\leqslant \frac{\rho}{2} + \rho\sigma M\int_0^{t-t_0} s^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\beta' s}\mathrm{d}s < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho.\end{aligned}$$

由此推得, 若在 $t_0 \leqslant t < t_1$ 上 $\|v(t)\|_\alpha < \rho$, 其中 t_1 是最大的, 那么 $t_1 = \infty$. 因此, 对任意 $t \geqslant t_0$, 解 $v(t)$ 存在且 $\|v(t)\|_\alpha < \rho$.

再令

$$z(t) = \sup_{s\in[t_0,t]}\{\|v(s)\|_\alpha \mathrm{e}^{\beta(s-t_0)}\}.$$

积分方程 (6.6) 两边乘以 $e^{\beta(t-t_0)}$, 有

$$\|v(t)\|_\alpha e^{\beta(t-t_0)} \leqslant M\|v(t_0)\|_\alpha + M\sigma\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\alpha}e^{-(\beta'-\beta)(t-s)}ds\cdot z(t)$$
$$\leqslant M\|v(t_0)\|_\alpha + \frac{1}{2}z(t).$$

由此得

$$z(t) \leqslant 2M\|v(t_0)\|,$$

即当 $t \geqslant t_0$ 时,

$$\|u(t;t_0,x)-u_0\|_\alpha = \|v(t)\|_\alpha \leqslant 2Me^{-\beta(t-t_0)}\|x-u_0\|_\alpha.$$

证毕.

定理 9.6.3　假设 u_0 是方程 (6.3) 的平衡点, 算子 $-A$ 为 X 上的 C_0 半群无穷小生成元, 并且条件 (H_1) 成立. 又设算子 L 满足

$$\text{对某 } \beta>0,\quad \operatorname{Re}\sigma(L)>\beta;\quad \text{且} \sup_{\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0}\|(\lambda I+L)^{-1}\|<\infty,$$

或等价地假设 u_0 是线性指数稳定的, 则方程 (6.3) 的平衡点 u_0 在 X 中为局部渐近指数稳定的. 即存在 $\rho>0$, $M\geqslant 1$, 使得若 $t_0>\tau$, $x\in X$, $\|x-u_0\|\leqslant \rho/(2M)$, 则在 $t_0\leqslant t<\infty$ 上, 方程 (6.3) 存在唯一适度解 $u(t;t_0,x)$, 并且当 $t\geqslant t_0$ 时, 有

$$\|u(t;t_0,x)-u_0\| \leqslant 2Me^{-\beta(t-t_0)}\|x-u_0\|.$$

证明　由假设 (H_1) 及 u_0 的线性指数稳定性假设, 定理 9.6.3 可由定理 9.6.2 对 $\alpha=0$ 情形的证明直接得到.

下面对方程 (6.3) 中 A 为扇形算子的情形, 讨论 u_0 为不稳定的判别法. 假设

$$(H_2^\alpha)\begin{cases} \text{① } U \text{ 是 } \mathbb{R}\times X^\alpha\ (0\leqslant\alpha<1) \text{ 中 } \mathbb{R}\times\{u_0\} \text{ 的某柱形邻域;}\\ \text{② 和 ③ 同条件 } (H_1^\alpha);\\ \text{④ 对于 } t\geqslant t_0,\ g(t,0)=0, \text{ 并且}\\ \qquad \|g(t,v_2)-g(t,v_1)\|\leqslant k(\rho)\|v_2-v_1\|_\alpha,\quad \forall\ \|v_1\|_\alpha,\|v_2\|_\alpha\leqslant\rho,\\ \text{其中当 } \rho\to 0 \text{ 时, } k(\rho)\to 0. \end{cases}$$

为了叙述并证明关于不稳定性的判别定理, 首先叙述谱集的定义、空间分解以及相关估计式的两个引理.

定义 9.6.4　设 A 是定义域和值域都在 Banach 空间 X 中的线性算子, $\sigma(A)$ 是 A 的谱. 集合 $\sigma\subset\sigma(A)\cup\{\infty\}:=\hat{\sigma}(A)$ 称为一个谱集, 如果 σ 和 $\hat{\sigma}(A)\backslash\sigma$ 在扩张的复平面中都是闭的.

例 1 $\sigma(A)$ 的一个孤立点, 或者 $\sigma(A)$ 的有限个孤立点构成谱集, 谱集的余集是谱集.

引理 9.6.5 假设 A 是 X 中的闭线性算子, σ_1 是一个有界谱集, 而 $\sigma_2 = \sigma(A)\backslash\sigma_1$, 显然 $\sigma_2 \cup \{\infty\}$ 也是一个谱集. 设 E_1, E_2 是相应于这两个谱集的投影, 而 $X_j = E_j(X)$ $(j = 1, 2)$, 那么下面的结论成立:

(1) $X = X_1 \oplus X_2$;

(2) X_j 在 A 下是不变的;

(3) 又若 A_j 是 A 在 X_j 上的限制, 则

$$A_1 : X_1 \to X_1 \text{ 是有界的}, \quad \sigma(A_1) = \sigma_1,$$
$$D(A_2) = D(A) \cap X_2, \quad \text{且 } \sigma(A_2) = \sigma_2.$$

引理 9.6.6 在引理 9.6.5 的条件下, 若 A 是一个扇形算子, 则

(1) A_1 是有界算子, A_2 是扇形算子;

(2) 若 $\mathrm{Re}\,\sigma(A_1) < \alpha$, 则对于 $t \leqslant 0$, $\|\mathrm{e}^{-tA_1}\| \leqslant c\mathrm{e}^{-\alpha t}$;

(3) 若 $\mathrm{Re}\,\sigma(A_2) > \beta$, 则对于 $t > 0$,

$$\|\mathrm{e}^{-tA_2}\| \leqslant c\mathrm{e}^{-\beta t}, \quad \|A_2\mathrm{e}^{-tA_2}\| \leqslant ct^{-1}\mathrm{e}^{-\beta t}.$$

引理 9.6.5 与引理 9.6.6 的证明可参见 [DS, Part I, 第 6 章] 和 [Hen].

现在利用上述引理证明一个不稳定性的判别准则.

定理 9.6.7 设 u_0 是方程 (6.3) 的平衡点, A 是 X 中的扇形算子且对某 $0 \leqslant \alpha < 1$ 条件 (H_2^α) 成立. 若 $L = A - B$, $\sigma(L) \cap \{\mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$ 是一非空谱集, 则平衡点 u_0 是不稳定的. 特别地, 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$, 满足当 $n \to \infty$ 时, $\|x_n - u_0\|_\alpha \to 0$, 并且

$$\sup_{t\geqslant t_0} \|u(t; t_0, x_n) - u_0\|_\alpha \geqslant \varepsilon_0 > 0, \quad \forall\, n,$$

其中上确界取解 $u(t; t_0, x_n)$ 的最大存在区间.

证明 记

$$\sigma_1 = \sigma(L) \cap \{\mathrm{Re}\,\lambda < 0\}, \quad \sigma_2 = \sigma(L)\backslash\sigma_1.$$

根据引理 9.6.5, 把 X 分解成 $X = X_1 \oplus X_2$, 使得

$$\sigma(L_j) = \sigma_j, \quad j = 1, 2,$$

其中 $L_j = L|_{X_j}$. 记 E_j 是到 X_j 上的投影算子 $(j = 1, 2)$. 利用引理 9.6.6 可知, 存在 $\beta > 0$, $M \geqslant 1$, 使得当 $t > 0$ 时,

$$\|\mathrm{e}^{-tL_2}E_2x\|_\alpha \leqslant M\mathrm{e}^{\beta t}\|x\|_\alpha, \quad Mt^{-\alpha}\mathrm{e}^{\beta t}\|x\|,$$

而当 $t \leqslant 0$ 时, 因 $L_1 = L\big|_{x_1}$ 为有界算子, 故有

$$\|e^{-tL_1}E_1x\|_\alpha \leqslant Me^{3\beta t}\|x\|_\alpha, \quad Me^{3\beta t}\|x\|.$$

现在对范数 $\|a\|_\alpha$ 充分小的 $a \in X_1^\alpha$, 考察积分方程

$$\begin{aligned} y(t) = & e^{-(t-\tau)L_1}a + \int_\tau^t e^{-(t-s)L_1}E_1g(s,y(s))ds \\ & + \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)L_2}E_2g(s,y(s))ds, \quad t \leqslant \tau. \end{aligned} \tag{6.7}$$

令 $Y(t) = y(t)e^{-2\beta(t-\tau)}$, 则有

$$Y(t) = G(Y)(t),$$

其中

$$\begin{aligned} G(Y)(t) = & \ e^{-(t-\tau)L_1}e^{-2\beta(t-\tau)}a \\ & + \int_\tau^t e^{-2\beta(t-\tau)}e^{-(t-s)L_1}E_1g(s,y(s))ds \\ & + \int_{-\infty}^t e^{-2\beta(t-\tau)}e^{-(t-s)L_2}E_2g(s,y(s))ds, \quad t \leqslant \tau. \end{aligned}$$

再令

$$S = \{Y : (-\infty,\tau) \to X^\alpha \text{ 连续}, \ \|Y(t)\|_\alpha \leqslant 2M\|a\|_\alpha\},$$

并定义范数

$$\|Y\|_S = \sup_{(-\infty,\tau)} \|Y(t)\|_\alpha.$$

选取 $\rho > 0$ 充分小, 使得

$$M^2k(\rho)\left(\int_0^\infty u^{-\alpha}e^{-\beta u}du + \beta^{-1}\right) < \frac{1}{2}.$$

当 $\|a\|_\alpha \leqslant \rho/(2M)$ 时, 对于 $Y, Z \in S$, 有

$$\begin{aligned} \|G(Y)(t)\|_\alpha \leqslant & M\|a\|_\alpha + Mk(\rho)\left(\int_t^\tau e^{-2\beta(t-\tau)e^{3\beta(t-s)}}\|y(s)\|_\alpha ds\right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^t e^{-2\beta(t-\tau)}(t-s)^{-\alpha}e^{\beta(t-s)}\|y(s)\|_\alpha ds\right) \\ \leqslant & M\|a\|_\alpha + Mk(\rho)\int_t^\tau e^{\beta(t-s)}2M\|a\|_\alpha ds \\ & + Mk(\rho)\int_{-\infty}^t (t-s)^{-\alpha}e^{-\beta(t-s)}2M\|a\|_\alpha ds \\ \leqslant & M\|a\|_\alpha + Mk(\rho)\left(\int_0^{\tau-t} e^{-\beta u}du + \int_0^\infty u^{-\alpha}e^{-\beta u}du\right)2M\|a\|_\alpha \\ \leqslant & M\|a\|_\alpha + Mk(\rho)\left(\beta^{-1} + \int_0^\infty u^{-\alpha}e^{-\beta u}du\right)2M\|a\|_\alpha \\ \leqslant & 2M\|a\|_\alpha, \end{aligned}$$

$$\|G(Y)(t)-G(Z)(t)\|_\alpha \leqslant Mk(\rho)\left(\beta^{-1}+\int_0^\infty u^{-\alpha}\mathrm{e}^{\beta u}\mathrm{d}u\right)\|Y-Z\|_S$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|Y-Z\|_S.$$

于是 G 在 S 中有唯一不动点, 即当 $t\leqslant\tau$ 时, 积分方程有唯一解 $y(t)=y^*(t;\tau,a)$ (注意, 此记号不暗含 $y^*(\tau;\tau,a)=a$) 且

$$\|y(t)\|_\alpha \leqslant 2M\|a\|_\alpha \mathrm{e}^{2\beta(t-\tau)} \leqslant \rho \mathrm{e}^{2\beta(t-\tau)}.$$

同时还有

$$\begin{aligned}\|y^*(\tau;\tau,a)-a\|_\alpha &= \left\|\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{e}^{-(\tau-s)L_2}E_2 g(s,y^*(s))\mathrm{d}s\right\|_\alpha\\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\tau} M(\tau-s)^{-\alpha}\mathrm{e}^{\beta(\tau-s)}k(\rho)2M\|a\|_\alpha \mathrm{e}^{2\beta(t-\tau)}\mathrm{d}s\\ &\leqslant 2M^2k(\rho)\int_0^\infty u^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\beta u}\mathrm{d}u\|a\|_\alpha \leqslant \frac{1}{2}\|a\|_\alpha,\end{aligned}\tag{6.8}$$

从而有

$$\|y^*(\tau;\tau,a)\|_\alpha \geqslant \frac{1}{2}\|a\|_\alpha.$$

若证得 $y^*(t;\tau,a)$ 是方程 (6.4) 的解, 令 $z_n=y^*(t_0;t_0+n,a)$, 则当 $n\to\infty$ 时,

$$\|z_n\|_\alpha \leqslant \rho \mathrm{e}^{-2\beta n}\to 0,$$

且对 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+n$, 方程 (6.4) 有解

$$v(t;t_0,z_n)=y^*(t;t_0+n,a),$$

$$\begin{aligned}\sup_{t\geqslant t_0}\|v(t;t_0,z_n)\|_\alpha &\geqslant \|v(t_0+n;t_0,z_n)\| = \|y^*(t_0+n,t_0+n,a)\|_\alpha\\ &\geqslant \frac{1}{2}\|a\|_\alpha > 0.\end{aligned}$$

余下证明 $y(t)=y^*(t;\tau,a)$ 是方程 (6.4) 的解. 令 $\gamma(s)=g(s,y(s))$. 由积分方程 (6.7) 得

$$\begin{aligned}E_1y(t) &= \mathrm{e}^{-(t-\tau)L_1}a+\int_\tau^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)L_1}E_1\gamma(s)\mathrm{d}s,\\ E_2y(t) &= \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-(t-s)L_2}E_2\gamma(s)\mathrm{d}s\\ &= \mathrm{e}^{-(t-t_0)L_2}\left(\int_{-\infty}^{t_0}\mathrm{e}^{-(t_0-s)L_2}E_2\gamma(s)\mathrm{d}s\right)+\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-(t-s)L_2}E_2\gamma(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由第 8 章中关于积分方程与微分方程的等价性定理知, 程分方程 (6.7) 的解 $y(t) = E_1 y(t) + E_2^{\cdot} y(t)$ 也是微分方程 (6.4) 的解. 证毕.

注 6.3 从不等式 (6.8) 的推导过程中易看出,

$$\|y^*(\tau;\tau,a) - a\| \leqslant \frac{1}{2}\|a\|_\alpha.$$

从而可得更强的结果: 存在 $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ 满足 $\|x_0 - x_n\|_\alpha \to 0$, 但对每个 $n \geqslant 1$,

$$\sup_{t\geqslant t_0} \|u(t;t_0,x_n) - x_0\| \geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

注 6.4 定理 9.6.7 中假设 $\sigma(L) \cap \{\mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$ 是一非空谱集, 等价于假设 $\sigma(L) \cap \{\mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$ 为有界闭集, 此时 $\sigma(L) \cap \{\mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$ 必有负上界. 注意定理 9.6.7 的证明不适用于 $\sigma(L) \cap \{\mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$ 无负上界的情形. 下面的不稳定性定理说明若 $g(t,v)$ 满足一定的衰减估计, 可去掉 $\sigma(L) \cap \{\mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$ 有负上界的限制, 其不稳定性结果对 L 有连续谱情形, 特别对 0 是 $\sigma(L)$ 的连续谱情形, 是一重要推广.

定理 9.6.8 设 u_0 是方程 (6.3) 的平衡点, A 是 X 中的扇形算子. 又设对某 $0 \leqslant \alpha < 1$ 条件 (H_2^α) 成立, 且存在 $p > 1$, 使得当 $\|v\|_\alpha \to 0$ 时, 对 $t \geqslant t_0$ 一致地有

$$\|g(t,v)\| = O(\|v\|_\alpha^p).$$

记 $L = A - B$, 若 $\sigma(L) \cap \{\mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$ 非空, 则平衡点 u_0 是不稳定的.

这里略去证明, 详细证明见 [Hen, 定理 5.1.5 及推论 5.1.6].

下面看两个例子.

例 2

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + au - bu^3, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0. \end{cases} \tag{6.9}$$

问题 (6.9) 关于零解的线性化问题是

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + av, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0. \end{cases}$$

相应的特征值问题

$$\begin{cases} -\varphi'' - a\varphi = \lambda\varphi, \quad 0 < x < \pi, \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0 \end{cases}$$

的全体特征值为

$$\{n^2 - a : n = 1, 2, 3, \cdots\}.$$

因此, 当 $a<1$ 时, 零解在 $H_0^1(0,\pi)$ 是渐近稳定的; 当 $a>1$ 时, 零解是不稳定的; 当 $a=1$ 时, 零为最小特征值, 此时不能利用线性近似方法.

当 $b>0, a>1$ 时, 问题 (6.9) 有唯一正平衡解 $u_s(x)$. 记

$$f(u)=au-bu^3,$$

则

$$f(v+u_s)=f(u_s)+Bv+g(v),\qquad B=a-3bu_s^2.$$

考察特征值问题

$$\begin{cases} -\varphi''+(3bu_s^2-a)\varphi=\lambda\varphi, & 0<x<\pi,\\ \varphi(0)=\varphi(\pi)=0. \end{cases} \tag{6.10}$$

因为

$$\begin{cases} -w''+(bu_s^2-a)w=\lambda w, & 0<x<\pi,\\ w(0)=w(\pi)=0 \end{cases}$$

有特征值 $\lambda=0$, 相应特征函数为 $u_s(x)>0$ ($x\in(0,\pi)$), 由定理 2.3.20 及推论 2.3.21 知 $\lambda=0$ 为最小特征值. 又因为 $3bu_s^2-a>bu_s^2-a$, 由定理 2.3.11 可得问题 (6.10) 的最小特征值是正的. 因此, $u_s(x)$ 在 $H_0^1(0,\pi)$ 中是稳定的.

例 3 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界光滑区域, 而 u,T 是消耗在一级热反应中的物质浓度和温度, 它们满足

$$\begin{cases} u_t=D\Delta u-\varepsilon uf(T), & x\in\Omega, \quad t>0,\\ T_t=\Delta T+quf(T), & x\in\Omega, \quad t>0, \end{cases} \tag{6.11}$$

其中 D,q,ε 是正常数, ε 充分小, $f(T)=\exp(-H/T)$, H 是正常数 (当 $T=0$ 时 $f(T)=0$).

将方程组 (6.11) 化为

$$\begin{cases} u_t=D\Delta u-\varepsilon uf(T^*+1), & x\in\Omega, \quad t>0,\\ T_t^*=\Delta T^*+quf(T^*+1), & x\in\Omega, \quad t>0, \end{cases} \tag{6.12}$$

边界条件是

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega}=0,\quad T^*|_{\partial\Omega}=0, \tag{6.13}$$

其中 $T^*=T-1$.

方程 (6.12) 连同边条件 (6.13) 关于 (0,0) 的线性近似问题是

$$\begin{cases} u_t = D\Delta u - \varepsilon f(1)u, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ T_t^* = \Delta T^* + qf(1)u, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad T^*|_{\partial\Omega} = 0, & t > 0, \end{cases}$$

相应的特征值问题是

$$\begin{cases} -\Delta u + \varepsilon f(1)u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ -\Delta T^* - qf(1)u = \lambda T^*, & x \in \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad T^*|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{6.14}$$

它的最小特征值是 $\lambda_0 = \min\{\lambda^*, \varepsilon f(1)\}$, 其中 λ^* 是

$$\begin{cases} -\Delta T^* = \lambda T^*, & x \in \Omega, \\ T^*|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{6.15}$$

的最小特征值, $\lambda^* > 0$ (习题 9.5). 因此 $\lambda_0 > 0$, $(u, T^*) = (0,0)$ 是渐近稳定的, 即 $(u,T) = (0,1)$ 在 $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ 中是渐近稳定的.

9.7 稳定性问题的若干例子

本节利用抽象理论讨论算子方程

$$\begin{cases} u'(t) + Au = f(u), \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

的若干例子, 例如

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ 或 } \left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

这里 $A = -\Delta$ 是 Laplace 算子.

对于第一边界条件的情形, 考虑

$$A : D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L_2(\Omega) := X.$$

那么 A 是扇形算子, 而且还是正的和自共轭的, A^{-1} 是紧算子. 我们可以定义分数幂算子 A^α $(0 < \alpha < 1)$ 及分数幂空间 $X^\alpha = D(A^\alpha)$. 特别有 $X^{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega)$.

对于第二边条件情形, 考虑

$$A: D(A)=\left\{u: u\in H^2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0\right\}\to X,$$

那么 A 也是扇形算子, 而且是非负的、自共轭的, 这时 $D(A^{\frac{1}{2}})=X^{\frac{1}{2}}=H^1(\Omega)$.

因此, 本节中讨论的平衡解的稳定性均指 $H^1(\Omega)$ 中的稳定性. 但是在一定条件下, 对于有界解来说, 由 $H^1(\Omega)$ 中的收敛性可以得到 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 中的收敛性.

例 1 N. Chafee 和 E. Infante[CI] 在 1971 年对非线性方程

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+\lambda f(u), & 0<x<\pi,\ t>0, \quad \text{(a)}\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, & t\geqslant 0, \quad \text{(b)}\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in[0,\pi], \quad \text{(c)}\end{cases} \tag{7.1}$$

讨论了全局稳定性问题, 其中 λ 是非负常数, $f\in C^2(\mathbb{R})$ 满足:

$$\begin{aligned}&(1)\ f(0)=0, f'(0)>0;\\ &(2)\ \lim_{|u|\to\infty}\sup\frac{f(u)}{u}\leqslant 0;\\ &(3)\ \mathrm{sgn} f''(u)=-\mathrm{sgn}\ u.\end{aligned} \tag{7.2}$$

在第 7 章中, 曾在条件 (7.2) 下, 对问题 (7.1) 的平衡解的分叉, 即边值问题

$$\begin{cases} u''(x)+\lambda f(u(x))=0, \quad 0<x<\pi,\\ u(0)=u(\pi)=0\end{cases}$$

进行过详细的讨论, 现在分析这些平衡解的稳定性.

问题 (7.1) 中的 (a), (b) 式可写成

$$u_t(t)+Au=\lambda f(u), \tag{7.3}$$

其中 $A=-\dfrac{d^2}{\mathrm{d}x^2}$, $D(A)=H^2(0,\pi)\cap H_0^1(0,\pi)$. 记 $X=L(0,\pi)$, $X^{1/2}=D(A^{1/2})=H_0^1(0,\pi)$.

1. **解的估计**

方程 (7.3) 有 Lyapunov 函数

$$V(\varphi)=\int_0^\pi\left[\frac{1}{2}(\varphi'(x))^2-\lambda F(\varphi(x))\right]\mathrm{d}x, \quad \varphi(x)\in X^{1/2},$$

其中

$$F(u)=\int_0^u f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

因为

$$\frac{F(s)}{s^2}=\frac{\int_0^M f(\xi)\mathrm{d}\xi}{s^2}+\frac{\int_M^s f(\xi)\mathrm{d}\xi}{s^2},$$

利用条件 (7.2) 的 (2) 知: 对任意 $\varepsilon>0$, 存在常数 C_ε, 使得

$$F(s)\leqslant\varepsilon s^2+C_\varepsilon,\quad -\infty<s<\infty,$$

于是

$$V(\varphi)\geqslant\frac{1}{2}\int_0^\pi\varphi'(x)^2\mathrm{d}x-\lambda\varepsilon\int_0^\pi\varphi^2(x)\mathrm{d}x-\lambda\pi C_\varepsilon.$$

由于当 $\varphi\in H_0^1(0,\pi)$ 时, $\int_0^\pi[\varphi'(x)]^2\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^\pi\varphi^2(x)\mathrm{d}x$, 有

$$V(\varphi)\geqslant\left(\frac{1}{2}-\lambda\varepsilon\right)\int_0^\pi\varphi'(x)\mathrm{d}x-\lambda\pi C_\varepsilon.$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{4\lambda}$, 得

$$V(\varphi)\geqslant\frac{1}{4}\|\varphi\|_{H_0^1}^2-\pi\lambda C_\varepsilon.$$

若 $u(x,t;\varphi)$ 是问题 (7.3) 的解, 则在解的存在区间上

$$V(\varphi)\geqslant V(u(x,t;\varphi))\geqslant\frac{1}{4}\|u(x,t;\varphi)\|_{H_0^1}^2-\pi\lambda C_\varepsilon,$$

于是

$$\|u(x,t;\varphi)\|_{H_0^1}^2\leqslant4(\pi\lambda C_\varepsilon+V(\varphi)).$$

因此, 解的存在区间是 $[0,\infty)$, 问题 (7.3) 在 $H_0^1(0,\pi)$ 上确定一个动力系统.

2. **原点的稳定性问题**

不妨假定 $f'(0)=1$, 不然的话可改变参数 λ, 使之满足这个条件.

问题 (7.3) 在原点的线性化问题是

$$\begin{cases}v_t=v_{xx}+\lambda v, & 0<x<\pi,\quad t>0,\\ v(0,t)=v(\pi,t)=0,\end{cases}$$

由此易知

$$\sigma(A-\lambda I)=\{n^2-\lambda:n=1,2,3,\cdots\}.$$

由定理 9.6.2 与定理 9.6.7 知:

若 $0\leqslant\lambda<1$, 则 $u=0$ 在 $H_0^1(0,\pi)$ 中是指数稳定的; 若 $\lambda>1$, 则 $u=0$ 在 $H_0^1(0,\pi)$ 中是不稳定的.

利用线性近似方法, 当 $\lambda=1$ 时无法判断 $u=0$ 的稳定性. 即使对 $\lambda<1$, 得到的也只是局部的稳定性.

现在可进一步证明:

定理 9.7.1 当 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 时, $u=0$ 在 $H_0^1(0,\pi)$ 中是全局渐近稳定的.

证明 令

$$V(\varphi)=\int_0^\pi[\varphi'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\|\varphi\|_{H_0^1}^2,\quad \varphi\in H_0^1(0,\pi).$$

设 $u(x,t)$ 满足问题 (7.1), 则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V(u(x,t))}{\mathrm{d}t}&=2\int_0^\pi u_xu_{tx}\mathrm{d}x=-2\int_0^\pi u_tu_{xx}\mathrm{d}x\\&=-2\int_0^\pi\lambda f(u)u_{xx}\mathrm{d}x-2\int_0^\pi u_{xx}^2\mathrm{d}x\\&=2\int_0^\pi\lambda f'(u)u_x^2\mathrm{d}x-2\int_0^\pi u_{xx}^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为对任意 ξ, 有 $f'(\xi)\leqslant f'(0)=1$, 同 9.4.3 例 1 的证明, 有 $\int_0^\pi u_x^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^\pi u_{xx}^2\mathrm{d}x$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}V(u(x,t))}{\mathrm{d}t}\leqslant-2(1-\lambda)\int_0^\pi u_x^2\mathrm{d}x.$$

由此推出

$$\begin{aligned}&\dot V(\varphi)\leqslant 0,\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1,\\&\dot V(\varphi)\leqslant-2(1-\lambda)\|\varphi\|_{H_0^1}^2,\quad 0\leqslant\lambda<1.\end{aligned}$$

这就证明了: 当 $0\leqslant\lambda<1$ 时, $u=0$ 是全局渐近稳定的.

当 $\lambda=1$ 时, 仍有 Lyapunov 函数 $V(\varphi)=\|\varphi\|_{H_0^1}^2$, 故原点稳定. 再考察

$$\begin{cases}\varphi''(x)+f(\varphi(x))=0,\quad 0<x<\pi,\\ \varphi(0)=\varphi(\pi)=0.\end{cases}$$

若 $\varphi(x)$ 是它的解, 则

$$(\varphi''(x)+\varphi)\varphi=(\varphi-f(\varphi))\varphi,$$

两边积分得

$$\int_0^\pi\left\{-[\varphi'(x)]^2+\varphi^2(x)\right\}\mathrm{d}x=\int_0^\pi[\varphi(x)-f(\varphi)]\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

由 Poincaré 不等式知上式左端 $\leqslant 0$. 根据 f 的条件易证, 当 $u\neq 0$ 时, $[u-f(u)]u\geqslant 0$, 所以上式右端 $\geqslant 0$. 因此, 只能有

$$\int_0^\pi[\varphi-f(\varphi)]\varphi\mathrm{d}x=0,$$

即 $\varphi(x) \equiv 0$. 故当 $\lambda = 1$ 时, $u = 0$ 也是全局渐近稳定的.

3. 非零平衡解的稳定性

现在讨论非零平衡解 $\varphi_k^{\pm}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ 的稳定性问题. 先证一个比较原理.

引理 9.7.2 设 $p(x) \in C^1[a,b], p(x) > 0$ $(x \in [a,b]), q(x) \in C[a,b], \varphi(x), \psi(x) \in C^2(a,b) \cap C[a,b]$, 在 $(a,b]$ 上 $\psi(x) > 0$ 且

$$(p(x)\varphi')' + q(x)\varphi \geqslant 0 \geqslant (p(x)\psi')' + q(x)\psi, \quad x \in (a,b), \tag{7.4}$$

并且在 (a,b) 的任意子区间上, 若一端取恒等号, 则另一端不取恒等号. 又设 $\varphi(a) = \psi(a) = 0, \varphi'(a) = \psi'(a) > 0$, 则在 $a < x \leqslant b$ 上,

$$\varphi(x) > \psi(x).$$

证明 (1) 先证对任意 $x_0 \in (a,b]$, 若在 (a, x_0) 内 $\varphi(x) > 0$, 则 $\varphi(x) > \psi(x)$ $(x \in (a, x_0])$.

事实上, 由不等式 (7.4) 得

$$[p(\varphi'\psi - \varphi\psi')]' = (p\varphi')'\psi - (p\psi')'\varphi \geqslant 0, \quad x \in (a, x_0),$$

在 (a, x_0) 的任意子区间上不恒为零, 又

$$p(a)[\varphi'(a)\psi(a) - \varphi(a)\psi'(a)] = 0,$$

故当 $x \in (a, x_0)$ 时有 $(\varphi'\psi - \varphi\psi') > 0$; 而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = \frac{\varphi'\psi - \varphi\psi'}{\psi^2} > 0, \quad \lim_{x \to a+} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1,$$

所以

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} > 1, \quad x \in (a, x_0].$$

(2) 因为 $\varphi(a) = 0, \varphi'(a) > 0$, 所以存在 $\delta > 0$, 使得当 $a < x < a + \delta$ 时 $\varphi(x) > 0$.

(3) 取上述最大的 δ, 若 $a + \delta \geqslant b$, 则在 $(a,b]$ 上 $\varphi(x) > 0$.

若最大的 δ 满足 $a + \delta < b$, 则 $\varphi(x) > 0$ $(x \in (a, a+\delta)), \varphi(a+\delta) = 0$. 由 (1) 知, 在 $(a, a+\delta]$ 上 $\varphi(x) > \psi(x)$. 于是 $\varphi(a+\delta) = 0 > \psi(a+\delta)$, 这便矛盾了.

综上, 引理得证.

利用这个引理可证以下判断稳定性的准则.

定理 9.7.3 设 $\varphi(x)$ 是 (7.1) 的非零平衡解, 又设存在 $\psi \in C^2(0,\pi) \cap C[0,\pi]$, 满足

$$\begin{cases} \psi''(x) + \lambda f'(\varphi(x))\psi(x) = 0, & 0 < x < \pi, \\ \psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 1. \end{cases} \tag{7.5}$$

(1) 若在 $0 < x \leqslant \pi$ 上 $\psi(x) > 0$, 则 $\varphi(x)$ 是渐近稳定的.

(2) 若在 $0 < x < \pi$ 内某点处 $\psi(x) < 0$, 则 $\varphi(x)$ 是不稳定的.

证明 考察特征值问题

$$\begin{cases} -\theta'' - \lambda f'(\varphi(x))\theta = \mu\theta, \quad 0 < x < \pi, \\ \theta(0) = 0, \quad \theta(\pi) = 0. \end{cases}$$

设 μ_0 为第一个特征值, 相应的特征函数为 $\theta_0(x)$, $\theta_0'(0) = 1$, $\theta_0(x) > 0$ $(x \in (0, \pi))$.

若在 $0 < x \leqslant \pi$ 上 $\psi(x) > 0$, 则 $\mu_0 > 0$. 若不然, 则 $\mu_0 \leqslant 0$. 若 $\mu_0 = 0$, 由初值问题解的唯一性知, $\theta_0(x) = \psi(x), \theta_0(\pi) = \psi(\pi) = 0$, 与 $\psi(\pi) > 0$ 矛盾. 若 $\mu_0(0) < 0$, 则

$$\begin{cases} \theta_0'' + \lambda f'(\varphi)\theta_0 > 0 = \psi'' + \lambda f'(\varphi)\psi, \quad x \in (0, \pi), \\ \theta_0(0) = \psi(0) = 0, \quad \theta_0'(0) = \psi'(0) = 1. \end{cases}$$

于是由引理 9.7.2 知, $\theta_0(x) > \psi(x)$ $(x \in (0, \pi])$, 与 $\psi(\pi) > 0$ 矛盾. 由 $\mu_0 > 0$ 知, $\varphi(x)$ 是渐近稳定的. 另一结论类似可证. 证毕.

利用这个准则可得

定理 9.7.4 若 $\lambda > 1$ $(f'(0) = 1)$, 则问题 (7.1) 的平衡解 $\varphi_1^{\pm}$ 是渐近稳定的, 而 $\varphi_k^{\pm}$ $(k = 2, 3, \cdots)$ 都是不稳定的.

证明 令 $\varphi(x) = \varphi_1^{+}(x, \lambda)$, 则 $\varphi'(0) > 0$, 在 $0 < x < \pi$ 上 $\varphi(x) > 0$, 且 $f(\varphi(x)) > 0$.

现考察初值问题 (7.5) 的解 $\psi(x)$. 令

$$v(x) = -(\lambda\varphi'(0))^{-1}\varphi''(x) = (\varphi'(0))^{-1}f(\varphi(x)),$$

则当 $0 < x < \pi$ 时, $v(x) > 0, v(0) = 0, v(\pi) = 0$, $v'(0) = 1$, 在 $(0, \pi)$ 上

$$v'' + \lambda f'(\varphi)v = f''(\varphi(x))\varphi'(x)^2/\varphi'(0) \leqslant 0,$$

且在 $(0, \pi)$ 的任意子区间上不恒为零. 由引理 9.7.2 知, 在 $0 < x \leqslant \pi$ 上 $\psi(x) > v(x) \geqslant 0$. 这就证明了 φ_1^{+} 的渐近稳定性. 类似地, φ_1^{-} 是渐近稳定的.

现假定 φ 是非零平衡解, 满足 $\varphi'(0) > 0$, 同时在 $(0, \pi)$ 中某处 φ 取零值, 则在 $(0, \pi)$ 中某点 x_1 处有负最小值, 所以 $\varphi(x_1) < 0$, $\varphi'(x_1) = 0$. 但是 $\psi(x)$ 和 $\varphi'(x)$ 都是 $v'' + \lambda f'(\varphi)v = 0$ 的解, 所以它们的 Wronski 行列式为常数:

$$\psi'(x)\varphi'(x) - \psi(x)\varphi''(x) = \varphi'(0) > 0.$$

因此, 令 $x = x_1$, 得

$$-\psi(x_1)\varphi''(x_1) > 0;$$

而 $\varphi''(x_1) > 0$, 故 $\psi(x_1) < 0$, 从而证明了 φ 是不稳定的. 当 $\varphi'(0) < 0$ 时类似可证. 证毕.

以上稳定性均指 $H_0^1(0,\pi)$ 空间中的稳定性. 本例子可参见 [Hen].

例 2 初边值问题

$$\begin{cases} u_t = (p(x)u_x)_x + f(u), \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \tag{7.6}$$

和

$$\begin{cases} u_t = (p(x)u_x)_x + f(u), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \tag{7.7}$$

相应的平衡解问题分别是

$$\begin{cases} -(p(x)u')' - f(u) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} -(p(x)u')' - f(u) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

这里, $p \in C^2[0,1]$, $p(x) > 0$ $(x \in [0,1])$, $f \in C^2$.

定理 9.7.5 设 $\varphi(x)$ 是问题 (7.6) 的非常数平衡解, $\varphi(x) \in C^3[0,1]$. 若 $p(x) = b^2(x), b''(x) \leqslant 0$ $(x \in [0,1])$, 则 $\varphi(x)$ 是不稳定的 (在 $H^1(0,1)$).

证明 令

$$J(v) = \int_0^1 [p(x)|v'|^2 - f'(\varphi(x))v^2]\mathrm{d}x,$$

只需证明存在 $v \in H^1(0,1)$, 使得

$$J(v) < 0.$$

由

$$\begin{cases} (b^2\varphi')' + f(\varphi) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0 \end{cases}$$

得

$$b'(b\varphi') + b(b\varphi')' + f(\varphi) = 0.$$

两边对 x 求导得

$$b''(b\varphi') + 2b'(b\varphi')' + b(b\varphi')'' + f'(\varphi)\varphi' = 0.$$

两边乘以 $b^2\varphi'$ 并积分得

$$\int_0^1 b''b^3\varphi'^2\mathrm{d}x + 2\int_0^1 b^2b'(b\varphi')'\varphi'\mathrm{d}x + \int_0^1 b^2(b\varphi')''(b\varphi')\mathrm{d}x + \int_0^1 f'(\varphi)b^2\varphi'^2\mathrm{d}x = 0.$$

因为

$$\int_0^1 b^2(b\varphi')''(b\varphi')\mathrm{d}x = -\int_0^1 b^2[(b\varphi')]^2\mathrm{d}x - 2\int_0^1 bb'(b\varphi')(b\varphi')'\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_0^1 b^2[(b\varphi')']^2\mathrm{d}x - \int_0^1 f'(\varphi)b^2\varphi'^2\mathrm{d}x = \int_0^1 b''b^3\varphi'^2\mathrm{d}x,$$

即

$$J(b\varphi') = \int_0^1 b''b^3\varphi'^2\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

平衡解 $\varphi(x)$ 处的线性化问题相应的特征值问题是

$$\begin{cases} -(b^2(x)w')' - f'(\varphi(x))w = \lambda w, & 0 < x < 1, \\ w'(0) = w'(1) = 0. \end{cases} \tag{7.8}$$

根据特征值的极小原理, 若 $J(b\varphi') < 0$, 则问题 (7.8) 的最小特征值 $\lambda^* < 0$. 若 $J(b\varphi') = 0$, 也必有 $\lambda^* < 0$. 若不然, $\lambda^* = 0$, 则 $b\varphi'$ 是相应的特征函数, $b\varphi'|_{x=0,1} = 0$. 但是问题 (7.8) 的最小特征值对应的特征函数在 $[0,1]$ 处处不为零, 故矛盾.

为了讨论问题 (7.7) 的平衡解, 要用到下面的引理, 其证明可由特征值的极小性质推出.

引理 9.7.6 设 $a < a_1 < b_1 < b$, $p(x) \in C^1[a,b]$, $p(x) > 0$ $(x \in [a,b])$. 若

$$\begin{cases} (p(x)u')' + q(x)u = \lambda u, & 0 < x < 1, \\ u'(a_1) = u'(b_1) = 0 \end{cases}$$

的最小特征值是负的, 那么

$$\begin{cases} (p(x)u')' + q(x)u = \lambda u, & 0 < x < 1, \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

的最小特征值也是负的.

定理 9.7.7 设 $\varphi(x)$ 是问题 (7.7) 的平衡解, $\varphi(x) \in C^3[0,1]$, 在 $(0,1)$ 有零点. 若 $p(x) = b^2(x)$, $b''(x) \leqslant 0$ $(x \in [0,1])$, 则 $\varphi(x)$ 是不稳定的 (在 $H^1(0,1)$).

证明 存在 $[\alpha,\beta] \subset (0,1)$, 使得

$$\begin{cases} (p(x)\varphi')' + f(\varphi(x)) = 0, & \alpha < x < \beta, \\ \varphi'(\alpha) = \varphi'(\beta) = 0. \end{cases}$$

根据定理 9.7.5 的证明, 问题

$$\begin{cases} -(p(x)w')' - f'(\varphi(x))w = \lambda w, & \alpha < x < \beta, \\ w'(\alpha) = w'(\beta) = 0 \end{cases}$$

有负的最小特征值. 再由引理 9.7.6 知

$$\begin{cases} -(p(x)w')' - f'(\varphi(x))w = \lambda w, & 0 < x < 1, \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$$

有负的最小特征值. 因此, $\varphi(x)$ 在 $H^1(0,1)$ 是不稳定的. 证毕.

定理 9.7.8 设 $f(0) = 0, f'(0) > 0$, 当 $u > 0$ 时 $f''(u) < 0$. 若 $\varphi(x)$ 是问题 (7.7) 的平衡解, 在 $(0,1)$ 上 $\varphi(x) > 0$ 且 $f(\varphi(x)) > 0$, 则 $\varphi(x)$ 是稳定的 (在 $H_0^1(0,1)$ 中).

证明 考察值问题

$$\begin{cases} (p(x)\psi')' + f'(\varphi(x))\psi = 0, & 0 < x < 1, \\ \psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 1 \end{cases}$$

的解 $\psi(x)$. 令 $v(x) = af(\varphi(x))$, $a = [f'(0)\varphi'(0)]^{-1}$, 则

$$v(x) > 0 \ \ (x \in (0,1)), \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1,$$

且

$$(p(x)v')' + f'(\varphi(x))v = p(x)f''(\varphi(x))[\varphi'(x)]^2 a \leqslant 0, \quad x \in (0,1).$$

由引理 9.7.2 知, 在 $0 < x \leqslant 1$ 上 $\psi(x) > v(x) \geqslant 0$. 再由定理 9.7.3 知, $\varphi(x)$ 是稳定的. 证毕.

本例可参见 [CH].

例 3 考察初边值问题

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, & t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是带光滑边界的有界区域, $f\in C^1$. 它的平衡解问题是

$$\begin{cases} -\Delta\varphi(x)-f(\varphi(x))=0, \quad x\in\Omega, \\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega}=0. \end{cases} \tag{7.9}$$

下面对 f 或区域加以限制, 以保证非常数平衡解 $\varphi(x)$ 是不稳定的 (在 $H^1(\Omega)$ 中).

在平衡解 $\varphi(x)$ 处的线性化问题相应的特征值问题是

$$\begin{cases} -\Delta w-f'(\varphi(x))w=\lambda w, \quad x\in\Omega, \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega}=0. \end{cases} \tag{7.10}$$

根据特征值的极小原理, 若存在 $v\in H^1(\Omega)$, 使得

$$I(v)=\int_\Omega[-|\nabla v|^2+f'(\varphi(x))v^2]\mathrm{d}x>0,$$

则最小特征值是负的, 因而 $\varphi(x)$ 在 $H^1(\Omega)$ 中是不稳定的.

定理 9.7.9 设 $\varphi(x)$ 是非常数平衡解, 值域属于 $[a,b]$. 若 $u\in[a,b]$ 时 $f''(u)\geqslant 0$ (或 $f''(u)\leqslant 0$), 但不恒为零, 则 $\varphi(x)$ 是不稳定的.

证明 设 $f''\geqslant 0$, $f''(u)\not\equiv 0$. 令 $c=\min\limits_{\Omega}\varphi(x)$, 只需证明

$$I(\varphi-c)=\int_\Omega\left[-|\nabla\varphi|^2+f'(\varphi(x))(\varphi(x)-c)^2\right]\mathrm{d}x>0.$$

因为 $\varphi(x)$ 满足 (7.9), 所以

$$\int_\Omega\varphi f(\varphi)\mathrm{d}x=\int_\Omega|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x, \quad \int_\Omega f(\varphi)\mathrm{d}x=0.$$

由此得

$$\begin{aligned} I(\varphi-c) &=-\int_\Omega(\varphi-c)f(\varphi)\mathrm{d}x+\int_\Omega f'(\varphi)(\varphi-c)^2\mathrm{d}x \\ &=-\int_\Omega(\varphi-c)[f(\varphi)-f'(\varphi)(\varphi-c)]\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

又因为 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega}=0$, 所以不论最小值在 Ω 内或 $\partial\Omega$ 上取到, 在最小值点 x_0 处均有

$$f(c)=-\Delta\varphi(x_0)\leqslant 0.$$

由 f'' 的条件, 若 $\varphi(x)\neq c$, 则

$$0\geqslant f(c)\geqslant\not\equiv f(\varphi(x))+f'(\varphi)(c-\varphi(x)).$$

于是

$$I(\varphi - c) > 0.$$

另一情形类似可证. 证毕.

定理 9.7.10 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是凸子集, $\varphi(x) \in C^3(\Omega)$ 是非常数平衡解, 则 $\varphi(x)$ 是不稳定的.

证明 $n = 1$ 时即是例 2 的特殊情形. 下面只需考虑 $n \geqslant 2$. 分以下几步:

(1) 证明 $\sum\limits_{i=1}^{n} I(\varphi_{xi}) = -\int_{\partial\Omega} \nabla\varphi \cdot \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(\nabla\varphi)\mathrm{d}\sigma.$

由 (7.9) 得

$$\Delta\varphi_{x_i} + f'(\varphi)\varphi_{x_i} = 0,$$

$$\int_\Omega \varphi_{xi}\Delta\varphi_{xi}\mathrm{d}x + \int_\Omega f'(\varphi)\varphi_{xi}^2\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_\Omega [-|\nabla\varphi_{xi}|^2 + f'(\varphi)\varphi_{x_i}^2]\mathrm{d}x = -\int_{\partial\Omega} \varphi_{x_i}\frac{\partial\varphi_{x_i}}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n} I(\varphi_{x_i}) = -\int_{\partial\Omega} \nabla\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(\nabla\varphi)\mathrm{d}\sigma. \tag{7.11}$$

(2) 证明对任意 $x \in \partial\Omega$,

$$\nabla\varphi(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(\nabla\varphi(x)) \leqslant 0.$$

不失一般性, 可设 x 是坐标原点, 并设在原点邻域内 Ω 的边界可表为 $x_n = g(x_1, \cdots, x_{n-1})$, 在原点处 $-x_n$ 方向是 $\partial\Omega$ 的外法向, g 是凸函数.

显然

$$\varphi_{x_n}(0) = -\frac{\partial\varphi(0)}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_{x_i}(0)}{\partial \boldsymbol{n}} = -\varphi_{x_i x_n}(0),$$

于是

$$\nabla\varphi(0)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(\nabla\varphi(0)) = -\sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}(0)\varphi_{x_i x_n}(0). \tag{7.12}$$

在 $\partial\Omega$ 上原点的邻域内

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{n}} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i} \cos\alpha_i|_{x_n = g(x_1, \cdots, x_{n-1})}, \\
0 = & \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_{x_i}(x_1, \cdots, x_{n-1}, g(x_1, \cdots, x_{n-1}))g_{x_i} \\
& -\varphi_{x_n}(x_1, \cdots, x_{n-1}, g(x_1, \cdots, x_{n-1})).
\end{aligned}$$

注意 $g(0)=0$, g 以原点为极小点, $g_{x_i}(0)=0$ $(i=1,\cdots,n)$. 上式对 x_j 求导, 得

$$\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_{x_i}(0)g_{x_ix_j}(0)=\varphi_{x_jx_n}(0).$$

将其代入 (7.12) 式得

$$\nabla\varphi(0)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(\nabla\varphi(0))=-\sum_{i,j=1}^{n-1}g_{x_ix_j}(0)\varphi_{x_i}(0)\varphi_{x_j}(0).$$

因为 g 是凸的, 所以右端非正, 即

$$\nabla\varphi(x)\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(\nabla\varphi(x))\leqslant 0,\quad x\in\partial\Omega. \tag{7.13}$$

(3) 证明最小特征值 $\lambda^*<0$.

根据 (7.11) 式和 (7.13) 式,

$$\sum_{i=1}^{b}I(\varphi_{x_i})\geqslant 0,$$

因而至少有一个 i, 使得 $\varphi_{x_i}\neq 0$, $I(\varphi_{x_i})\geqslant 0$.

若 $I(\varphi_{x_i})>0$, 显然问题 (7.10) 的最小特征值 $\lambda_0<0$. 若 $I(\varphi_{x_i})=0$, 也必有 $\lambda_0<0$. 如若不然, 则 $\lambda_0=0$, φ_{x_i} 是相应的特征函数, 在 $\partial\Omega$ 的某点处

$$\varphi_{x_i}=\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{n}}=0.$$

但是问题 (7.10) 的最小特征值对应的特征函数在 $\bar{\Omega}$ 上处处不为零, 故得矛盾. 证毕.

本例可参见 [ChH].

习 题 九

9.1 证明定理 9.3.2.

9.2 证明推论 9.3.7 与推论 9.3.9.

9.3 设在原点邻域内 $\rho:X^\alpha\to\mathbb{R}_+$, $f:X^\alpha\to X$ 是连续可微的, A 是扇形算子, $f(0)=0$, $\rho(0)=1$. 又设 $\sigma(A-Df(0))>0$, 其中 $Df(0)$ 是 f 在 $x=0$ 处的导算子. 证明

$$x'(t)+\rho(x)Ax=f(x)$$

的零解在 X^α 中是一致渐近稳定的.

9.4 设 $T(t)$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群, B 是它的无穷小生成元. 令 $B_\lambda(t)x = \int_0^t \mathrm{e}^{\lambda(t-s)}T(s)x\mathrm{d}s$. 证明

(1) 对所有 $x \in X$, 有 $B_\lambda(t)x \in D(B)$ 且

$$B(B_\lambda(t)x) = \lambda B_\lambda(t)x + T(t)x - \mathrm{e}^{\lambda t}x;$$

(2) 对所有 $x \in X$, 有

$$(\lambda I - B)B_\lambda(t)x = \mathrm{e}^{\lambda t}x - T(t)x;$$

(3) 对所有 $x \in D(B)$, 有

$$B_\lambda(t)(\lambda I - B)x = \mathrm{e}^{\lambda t}x - T(t)x;$$

(4) 记 $\rho(T(t))$ 为 $T(t)$ 的预解集, 若 $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{\lambda t} \in \rho(T(t))$, 令 $Q = (\mathrm{e}^{\lambda t} - T(t))^{-1}$, 则

$$T(t)Q = QT(t), \quad B_\lambda(t)Q = QB_\lambda(t);$$

(5) 若 $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{\lambda t} \in \rho(T(t))$, 则 $\lambda \in \rho(B)$.

9.5 证明问题 (6.14) 的最小特征值是 $\lambda_0 = \min(\lambda^*, \varepsilon f(1))$, 其中 λ^* 是问题 (6.15) 的最小特征值.

9.6 考察如下特征值问题

$$\begin{cases} -u'' + a(x)u + b(x)v = \lambda u, & x \in (\alpha, \beta), \\ -v'' + c(x)v = \lambda v, & x \in (\alpha, \beta), \\ u(\alpha) = u(\beta) = v(\alpha) = v(\beta) = 0, \end{cases}$$

其中 $a(x), b(x), c(x) \in C[\alpha, \beta]$, 它的特征值集合记为 Λ. 又

$$\begin{cases} -u'' + a(x)u = \lambda u, & x \in (\alpha, \beta), \\ u(\alpha) = u(\beta) = 0 \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} -v'' + c(x)v = \lambda v, & x \in (\alpha, \beta), \\ v(\alpha) = v(\beta) = 0 \end{cases}$$

的特征值集合分别记为 Λ_1 与 Λ_2, 最小特征值分别记为 $\lambda_0^{(1)}$ 与 $\lambda_0^{(2)}$. 证明:

(1) $\Lambda \subset \Lambda_1 \cap \Lambda_2$.

(2) $\Lambda_1 \cup (\Lambda_2 \backslash \Lambda_1) \subset \Lambda$.

(3) 若 $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$, 则 $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$.

(4) 若 $\lambda \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$, 相应的特征函数分别为 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$, 则

$$\lambda \in \Lambda \Longleftrightarrow \int_a^b b(x)\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(5) $\Lambda \subset \mathbb{R}^1$, Λ 有下界, $\inf \Lambda := \lambda_0 = \min\{\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)}\} \in \Lambda$.

9.7 设 X 是 Banach 空间, $T(t)$ 是 X 上的解析半群, 以 B 为无穷小生成元, $\|T(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{-\omega t}$ $(\forall\, t \geqslant 0)$, $M \geqslant 1$, $\omega > 0$ 为常数, $G: X \to X$ 是局部 Lipschitz 连续的, $G(0) = 0$, 存在常数 $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, 使得当 $\|u\| \leqslant \varepsilon_0$ 时,

$$\|G(u)\| \leqslant \beta\|u\|^{1+\alpha}.$$

方程

$$u'(t) = Bu + G(u)$$

满足初值 $u(0) = u_0$ 的解记为 $u(t; u_0)$, 考察零解的局部渐近稳定性.

(1) 证明当 $0 < r_0 < [\omega/(M\beta)]^{1/\alpha}$ 时, 初值问题

$$\begin{cases} r' = -\omega r + M\beta r^{1+\alpha}, \\ r(0) = r_0 \end{cases}$$

的解 $r(t)$ 的存在区间是$[0, \infty)$, $r'(t) < 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} r(t) = 0$.

(2) 导出 $r(t)$ 满足的积分方程.

(3) 令 $\varepsilon_1 = \min\left\{\varepsilon_0, \left(\dfrac{\omega}{M\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$. 证明对于任意的 $u_0 \in X$, 当 $\|u_0\| < \varepsilon_1/M$ 时, 解 $u(t; u_0)$ 在存在区间上满足

$$\|u(t; u_0)\| \leqslant r(t),$$

其中 $r(0) = M(\|u_0\|)$.

(4) 对于任意的 $u_0 \in X$, 证明当 $\|u_0\| < \varepsilon_1/2M$ 时, 解 $u(t; u_0)$ 的存在区间是 $[0, \infty)$.

(5) 证明方程 $u'(t) = Bu + G(u)$ 的零解是 (局部) 渐近稳定的.

第 10 章　行波解的稳定性基本理论及谱方法的应用

10.1　行波解的几种稳定性定义

设 $\phi_c(x-ct)$ 为一维空间中自治系统

$$u_t = F(u, D_x u, \cdots, D_x^m u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \tag{1.1}$$

的行波解, 且满足 $\phi_c(\pm\infty) = u_\pm$. 由方程 (1.1) 的平移不变性, 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\phi_c(x-ct+x_0)$ 仍为 (1.1) 的行波解, 且具相同的波形和波速.

考虑 (1.1) 对应的初值问题

$$\begin{cases} u_t = F(u, D_x u, \cdots, D_x^m u), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.2}$$

显然, 行波解 $\phi_c(x-ct)$ 为 (1.2) 以 $u_0(x) = \phi_c(x)$ 为初值的解.

设 $z = x - ct$, 在动坐标 (z,t) 下, 初值问题 (1.2) 可改写为

$$\begin{cases} u_t = F(u, D_z u, \cdots, D_z^m u) + cu_z, \quad z \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(z), \quad z \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.3}$$

此时 $\phi_c(z)$ 为 (1.3) 的平衡解, 且 $\phi_c(z)$ 对应于 (1.3) 的一族平衡解 $\{\phi_c(z+z_0),\ z_0 \in \mathbb{R}\}$.

设 X 为通常的 Banach 空间, 如 $X = C_{\text{unif}}(\mathbb{R})$, $L_2(\mathbb{R})$, $L_p(\mathbb{R})$, $H^m(\mathbb{R})$ 等. 根据 (1.3) 的平衡解 $\phi_c(z)$ 或平衡解族 $\phi_c(z+z_0)$ 在 X 中的 Lyapunov 稳定性、不稳定性及渐近稳定性定义 (参见第 3 章、第 9 章相关定义), 可给出 (1.1) 相应的行波解 $\phi_c(x-ct)$ 的稳定性定义. 几种常用的行波解的稳定性定义如下.

定义 10.1.1　若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意满足 $\|u_0(x) - \phi_c(x)\|_X < \delta$ 的初值 $u_0(x) \in X$, 初值问题 (1.2) 在 X 中存在唯一整体解 $u(x,t)$, 且满足

$$\|u(z+ct,t) - \phi_c(z)\|_X < \varepsilon, \quad \forall\, t > 0,$$

则称 (1.2) 的行波解 $\phi_c(x-ct)$ 在 X 中为 Lyapunov 稳定或非线性稳定, 即 (1.3) 的平衡解 $\phi_c(z)$ 在 X 中为 Lyapunov 稳定; 反之, 称为不稳定或非线性不稳定.

定义 10.1.2　若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意满足 $\|u_0(x) - \phi_c(x)\|_X < \delta$ 的初值 $u_0(x) \in X$, 初值问题 (1.2) 在 X 中存在唯一整体解 $u(x,t)$, 且满足

$$\sup_{t>0}\inf_{s\in\mathbb{R}}\|u(z+ct,t)-\phi_c(z+s)\|_X<\varepsilon,$$

则称 (1.2) 的行波解 $\phi_c(x-ct)$ 在 X 中为轨道稳定或波形稳定, 即 (1.3) 的平衡解族 $\{\phi_c(z+s),\ s\in\mathbb{R}\}$ 在 X 中为 Lyapunov 稳定; 反之, 行波解 $\phi_c(x-ct)$ 称为轨道不稳定.

定义 10.1.3 若存在 $\delta>0$, 使得对任意满足 $\|u_0(x)-\phi_c(x)\|_X<\delta$ 的初值 u_0, 初值问题 (1.2) 在 X 中存在唯一整体解 $u(x,t)$, 且满足

$$\lim_{t\to\infty}\|u(z+ct,t)-\phi_c(z)\|_X=0,$$

则称 (1.2) 的行波解 $\phi_c(x-ct)$ 在 X 中为局部渐近稳定的, 即 (1.3) 的平衡解 $\phi_c(z)$ 在 X 中为局部渐近稳定. 若存在 $z_0\in\mathbb{R}$ 依赖 u_0, 使得 $\lim\limits_{t\to\infty}\|u(z+ct,t)-\phi_c(z+z_0)\|_X=0$, 则称 (1.2) 的行波解 $\phi_c(x-ct)$ 在 X 中为带平移局部渐近稳定, 即 (1.3) 的平衡解族 $\{\phi_c(z+k),\ k\in\mathbb{R}\}$ 在 X 中为局部渐近稳定.

定义 10.1.4 若存在 $\delta>0$, $M>0$, $a>0$, 使得对任意满足 $\|u_0(x)-\phi_c(x)\|_X<\delta$ 的初值 u_0, 初值问题 (1.2) 在 X 中存在唯一整体解 $u(x,t)$, 且存在 $z_0\in\mathbb{R}$, 使得

$$\|u(z+ct,t)-\phi_c(z+z_0)\|_X\leqslant M\mathrm{e}^{-at},\quad \forall\, t\geqslant 0,$$

则称 (1.2) 的行波解 $\phi_c(x-ct)$ 在 X 中为带平移局部渐近指数稳定.

定义 10.1.5 设 X 为通常的 Banach 空间, $w(x)$ 为一正函数, 定义加权空间: $X_w=\{u(x)\in X: w(x)u(x)\in X\}$, 范数 $\|u\|_{X_w}=\|wu\|_X$. 若存在 $\delta>0$, 当初值 $u_0(x)$ 满足 $\|u_0(x)-\phi_c(x)\|_{X_w}<\delta$ 时, 存在 $z_0\in\mathbb{R}$, 使得

$$\lim_{t\to\infty}\|u(z+ct,t)-\phi_c(z+z_0)\|_{X_w}=0,$$

则称 (1.2) 的行波解 $\phi_c(x-ct)$ 在加权空间 X_w 中为带平移局部渐近稳定.

10.2 行波解的渐近稳定性理论

考虑半线性自治系统

$$u_t=A_x u+F(u),\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0, \tag{2.1}$$

其中 A_x 为关于 x 的常系数线性微分算子. 为了方便后面的讨论及证明, 假设 $F(u)\in C^2(\mathbb{R}^m)$, $u\in\mathbb{R}^m$, $m\geqslant 1$.

设 $\phi_c(x-ct)$ 为 (2.1) 的一给定行波解, 在动坐标 $z=x-ct$ 下, (2.1) 可改写为

$$u_t=A_z u+cu_z+F(u),\quad z\in\mathbb{R}, \tag{2.2}$$

此时, $\phi_c(z)$ 为 (2.2) 的平衡解.

与 (2.1) 对应的初值问题

$$\begin{cases} u_t = A_x u + F(u), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.3}$$

在动坐标系 $(z,t)\,(z = x - ct)$ 下等价于下面的初值问题

$$\begin{cases} u_t = A_z u + cu_z + F(u), & z \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(z), & z \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.4}$$

令 $v(z,t) = u(z,t) - \phi_c(z)$, 则 v 满足

$$\begin{cases} v_t = L_c v + g_c(v), & z \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ v|_{t=0} = u_0(z) - \phi_c(z) := v_0(z), & z \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.5}$$

其中 $L_c = A_z + c\dfrac{\partial}{\partial z} + F'(\phi_c(z))$ 为 (2.4) 方程右端项在 $\phi_c(z)$ 处的线性化微分算子,

$$g_c(v(z)) = F(\phi_c(z) + v(z)) - F(\phi_c(z)) - F'(\phi_c(z))v(z).$$

若 $X = C_{\text{unif}}(\mathbb{R})$, $F(u) \in C^2(\mathbb{R}^m)$, 则当 $\|v\|_X$ 充分小时,

$$\|g_c(v)\|_X = O(\|v\|_X^2). \tag{2.6}$$

与问题 (2.5) 对应的一阶线性近似方程 (问题 (2.4) 在 $\phi_c(z)$ 处的线性化方程) 的初值问题为

$$\begin{cases} v_t = L_c v, \\ v|_{t=0} = v_0. \end{cases} \tag{2.7}$$

若 (2.1) 为抛物型方程, 则对任意固定的 $c \in \mathbb{R}$, L_c 在 $X = C_{\text{unif}}(\mathbb{R})$ 上生成解析半群.

若 (2.1) 为抛物双曲耦合方程或守恒系统, 则一般可推出 L_c 在某 X 上生成 C_0 半群.

对于行波解 $\phi_c(z)$, 由其平移不变性, 在一些经典 Banach 空间 X 中, 如 $C_{\text{unif}}(\mathbb{R})$, $H^1(\mathbb{R})$, $L_2(\mathbb{R})$, 一般有 $L_c(\phi_c') = 0$, 且 $\phi_c' \in D(A) \subset X$, 此时零是 L_c 的特征值, 于是 $\phi_c(z)$ 不可能有经典意义下的线性指数稳定性, 也没有经典意义下的局部渐近指数稳定性.

若零特征值仅是由平移引起的, 下面的稳定性定理说明类似平衡解的线性稳定性理论, 我们可给出在相应谱条件下行波解的带平移渐近稳定性及不稳定性. 若在某特殊空间 (如加权空间) 中零不再是特征值, 则可考虑在相应特殊空间中经典意义下行波解的线性稳定性与非线性渐近稳定性 (不带平移).

对 L_c 为解析半群的无穷小生成元情形, 文献 [Hen, VVV] 采用不同的方法均证明了在相同的谱条件 (见定理 10.2.7 条件 (1)) 下行波解 $\phi_c(x - ct)$ 的局部渐近

指数稳定性, 其中文献 [Hen] 对二阶半线性抛物方程利用特殊的分解技巧和构造性证明方法, 证明了由行波解 (广义) 线性指数稳定性可推出行波解的带平移局部渐近指数稳定性, 其构造性证明方法与解析半群无关, 对连续半群情形仍适用.

下面总假设 X 为可连续嵌入到 $L_\infty(\mathbb{R})$ 的 Banach 空间, 如 $X = C_{\mathrm{uinf}}(\mathbb{R})$, $H^1(\mathbb{R})$ 等, 我们将分别就线性化算子 L_c 为 X 上解析半群、连续半群的无穷小生成元情形, 利用半群理论及空间分解理论给出相应的谱条件, 以保证 (2.1) 的行波解 $\phi_c(x-ct)$ 为 (广义) 线性指数稳定 (L_c 在特殊子空间上生成的半群为指数衰减). 进而利用 [Hen] 中特殊的分解技巧及构造性证明方法, 证明在相应的谱条件下行波解为带平移局部渐近指数稳定.

在叙述行波解的抽象稳定性定理之前, 先介绍一些有关算子谱的基本概念及一些经典谱理论.

定义 10.2.1 设 X 为复 Banach 空间, 算子 L: $D(L) \to X$ 为 X 上的闭线性算子, 且 $D(L) \subset X$, I 为 X 上的恒同算子, $\lambda \in \mathbb{C}$. 若算子 $L-\lambda I$ 可逆, 即 $L-\lambda I$ 为 $D(L) \to X$ 的一一映射, 则称 λ 在 L 的预解集 $\rho(L)$ 中, 此时 $L-\lambda I$ 的逆算子 $(L-\lambda I)^{-1}$ 必为 X 上的有界算子. 反之, 称 λ 为 L 的谱, 记为 $\lambda \in \sigma(L) := \mathbb{C}\backslash\rho(L)$.

定义 10.2.2 设 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, 若存在非零 $\phi_0 \in D(L)$ 使得 $L\phi_0 = \lambda_0\phi_0$, 则称 λ_0 为 L 的特征值, 记为 $\lambda_0 \in \sigma_p(L)$, ϕ_0 称为与特征值 λ_0 对应的特征函数. 显然 $\sigma_p(L) \subset \sigma(L)$. 与 λ_0 对应的所有特征函数构成的空间记为 $N(L-\lambda_0 I)$, 其维数称为特征值 λ_0 的几何重数.

定义 10.2.3 设 $L: D(L) \to X$ 为闭稠定线性算子, λ_0 为 L 的一孤立特征值. 取复平面 $\mathbb{C}$ 上的一简单闭曲线 Γ, 使得 Γ 上不含 L 的谱且 Γ 内除 λ_0 外不含 L 的其他谱. 定义映射 P: $X \to D(L)$,

$$P := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma (\lambda I - L_c)^{-1} \mathrm{d}\lambda,$$

算子 P 的值域 $R(P)$ 的维数称为特征值 λ_0 的代数重数.

定义 10.2.4 若 λ_0 为算子 L 的孤立的具有有限代数重数的特征值, 称 λ_0 为 L 的正则特征值, 记为 $\lambda_0 \in \sigma_n(L)$. 若 $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(L) := \sigma(L)\backslash\sigma_n(L)$, 称 λ 在 L 的本质谱中.

下面特别介绍当 L 为 $\mathbb{R}$ 上的有限阶 (可为变系数但系数在 $\pm\infty$ 有极限) 线性微分算子时, 其本质谱分布的一种经典估计方法.

引理 10.2.5 设 X 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的复 Banach 函数空间, L 为 X 上某 C_0 半群的无穷小生成元, L 为 $\mathbb{R}$ 上的有限阶微分算子, 且特征值问题 $Lu = \lambda u$ 可化为等价的一阶微分方程组:

$$Y' = A(z,\lambda)Y, \quad Y \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $A(z,\lambda)$ 为 $n \times n$ 矩阵. 又设对任意固定的 $\lambda \in \mathbb{C}$, 存在常数矩阵 $A^\pm(\lambda)$ 使得

$$A(z,\lambda) \to A^{\pm}(\lambda), \quad 当\ z \to \pm\infty.$$

定义两曲线族 $S^{\pm}$:

$$S^{\pm} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\mathrm{i}\tau I - A^{\pm}(\lambda)) = 0,\ 存在某\ \tau \in \mathbb{R}\},$$

则 $\sigma_{\mathrm{ess}}(L)$ 必包含在 S^+ 与 S^- 围成的左侧域的闭包内, 且 $S^+ \cup S^- \subset \sigma_{\mathrm{ess}}(L)$. 详细证明可见 [Hen].

引理 10.2.5 给出 L 的本质谱 $\sigma_{\mathrm{ess}}(L)$ 的边界的计算方法, 即 L 的本质谱 $\sigma_{\mathrm{ess}}(L)$ 的边界由 $S^{\pm}$ 决定.

考虑下面的二阶自共轭常微分算子

$$L = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + q(x) : H^2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}).$$

假设 $q(x)$ 满足:

$$q(x) \to q_{\pm}, \quad 当\ x \to \pm\infty, \tag{2.8}$$

由前面的本质谱计算方法易得

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(L) = (-\infty, q_0], \quad q_0 = \max\{q_-, q_+\}. \tag{2.9}$$

由 (2.9) 及算子 L 的自共轭性质, L 的正则特征值 (孤立的具有有限代数重数) 必为实特征值且满足 $\lambda > q_0$. 又因 $-L$ 为扇形算子, 故 L 最多有有限个 (不妨记为 n 个, 不包括重数在内) 正则特征值, 可排序为 $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > q_0$. 下面的定理给出这些正则特征值及对应的特征函数的一些特性.

定理 10.2.6 (无界域上的 Sturm-Liouville 定理)　假设 (2.8) 成立, $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > q_0$ 为算子 $L = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + q(x) : H^2(\mathrm{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ 的所有正则特征值, 则 λ_k 为简单的, 且与 λ_k 对应的特征函数恰有 $k-1$ 个零点, $k = 1, \cdots, n$.

证明　在 (2.8) 假设下, 由 (2.9) 知, 若算子 L 存在正则特征值 $\lambda_0 > q_0$, 则由特征函数的无穷远线性化渐近分析知: 特征函数 ϕ_0 必为指数衰减且 $\phi_0 \in C^2(\mathbb{R})$. 定义

$$J(u) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (u_x^2 - q(x)u^2)\mathrm{d}x}{\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}, \quad \forall\ u \in H^1(\mathbb{R}).$$

易证 $\inf\limits_{\substack{u\in H^1(\mathbb{R})\\ u\neq 0}} J(u)$ 存在, 记

$$\lambda_1 = -\inf_{\substack{u\in H^1(\mathbb{R})\\ u\neq 0}} J(u).$$

显然 $q_0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1 < \infty$, 进而由变分原理、(2.9) 及线性化渐近分析, 类似有界域上的二阶自共轭椭圆算子零边值情形的讨论 (见 [EK] 第 5 章), 可证明 λ_1 必为算子

L 的最大特征值且为简单的, 对应的特征函数 $\phi_1 \in C^2(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R})$, ϕ_1 不变号且满足 $J(\phi_1) = -\lambda_1$.

记 $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > q_0$ 为算子 L 的所有正则特征值, 完全类似有界域零边值情形的讨论 (见 [EK] 第 5 章), 可证 L 的第 k $(k > 1)$ 个特征值 λ_k 对应的特征函数恰有 $k-1$ 个零点, 且 λ_k 必为简单的, 这里略去详细证明.

定理 10.2.7 设 $F \in C^2(\mathbb{R}^m)$, $\phi_c(x-ct)$ 为方程 (2.1) 的一个行波解, 记 $L_c = A_z + c\dfrac{\partial}{\partial z} + F'(\phi_c(z))$, 并设 $-L_c\colon D(L_c) \to X$ 为一扇形算子.

(1) (i) 若零为 L_c 的简单 (孤立的且代数重数为 1) 特征值, $\phi_c'(z)$ 为相应的特征函数, 且

(ii) $\sup\{\mathrm{Re}\{\sigma(L_c)\setminus\{0\}\}\} \leqslant -\sigma_0 < 0$.

则 (2.1) 的行波解 $\phi_c(x-ct)$ 为带平移局部渐近指数稳定, 即存在 $\delta > 0$, 当 $\|u_0 - \phi_c\|_X < \delta$ 时, 存在 $z_0 \in R$, 使得

$$\|u(z,t) - \phi_c(z+z_0)\|_X \leqslant M_\sigma \mathrm{e}^{-\sigma t}, \quad \forall 0 < \sigma < \sigma_0.$$

(2) 若 $\sigma(L_c) \cap \{\mathrm{Re}\,\lambda > 0\} \neq \varnothing$, 则 $\phi_c(x-ct)$ 为不稳定.

定理 10.2.8 设 $F \in C^2(\mathbb{R}^m)$, $\phi_c(x-ct)$ 为方程 (2.1) 的一个行波解. 记 $L_c = A_z + c\dfrac{\partial}{\partial z} + F'(\phi_c(z))$, 并设 $L_c\colon D(L_c) \to X$ 在 X 上生成 C_0 半群. 若

(i) 零为 L_c 的简单 (孤立的且代数重数为 1) 特征值, $\phi_c'(z)$ 为相应的特征函数,

(ii) $\sup \mathrm{Re}\{\sigma(L_c)\setminus\{0\}\} \leqslant -\sigma_0 < 0$,

(iii) $\sup\limits_{\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0} \|(\lambda I - L_c^0)^{-1}\|_{X_0 \to X_0} < \infty$, $X_0 = R(L_c)$, $\|\cdot\|_{X_0} = \|\cdot\|_X$,

其中 L_c^0 为 L_c 在 $D(L_c) \cap X_0$ 上的限制算子, 则 (2.1) 的行波解 $\phi_c(x-ct)$ 为带平移局部渐近指数稳定.

注 2.1 设 $L: D(L) \to X$ 为 X 上的闭稠定线性算子. 若 $0 \in \sigma(L_c)\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(L_c)$, 则 0 为 L_c 的具有有限代数重数的孤立特征值, 此时 0 必为预解算子 $R(\lambda, L_c) = (\lambda I - L_c)^{-1}$(关于 λ) 的一孤立奇点 (有限阶极点), 见 [Kat, p.180]. 进而由谱分解定理 ([Yo, p.229, 定理 3]) 知, 存在正整数 m 使得 L_c^m 的值域空间 $R(L_c^m)$ 必为闭的且 X 有下面的直交分解

$$X = N(L_c^m) \oplus R(L_c^m). \tag{2.10}$$

此时定义 10.2.3 中 P 的值域 $R(P) = N(L_c^m)$, 且易验证 $N(L_c^m) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} N(L_c^k)$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} N(L_c^k)$ 称为 L_c 的广义核空间. 此时, 孤立特征值 0 的代数重数等于 L_c 的广义核空间的维数, 因此有下面的判别准则:

0 为 L_c 的简单特征值当且仅当 $0 \in \sigma_n(L_c)$ 且 L_c 的广义核空间为一维, 即

$$\dim N(L_c) = 1, \quad N(L_c) \cap R(L_c) = \{0\}. \tag{2.11}$$

注 2.2　由注 2.1 知, 若 0 为 L_c 的简单特征值, 则 $R(L_c)$ 必为闭的, L_c 的广义核空间为一维且 X 有下面的直交分解

$$X = N(L_c) \oplus R(L_c). \tag{2.12}$$

定义算子 L_c^0: $D(L_c) \cap R(L_c) \to X_0 = R(L_c)$, $L_c^0 v = L_c v$, $v \in D(L_c^0)$. 易证: 若 L_c 在 X 上生成解析半群 (连续半群), 则 L_c^0 在 X_0 上也生成解析半群 (连续半群). 利用 (2.12) 还有

$$0 \notin \sigma(L_c^0), \quad \sigma(L_c^0) = \sigma(L_c) \setminus \{0\}.$$

由定理 10.2.7 条件 (1) (ii) (定理 10.2.8 的条件 (ii) 和 (iii)) 有 $\mathrm{Re}\,\sigma(L_c^0) \leqslant -\sigma_0 < 0$ $\left(\mathrm{Re}\,\sigma(L_c^0) \leqslant -\sigma_0 < 0, \text{且} \sup\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0} \|(\lambda I - L_c^0)^{-1}\|_{X_0 \to X_0} < \infty\right)$. 于是根据解析半群及连续半群理论 (定理 8.4.20、定理 8.2.8), 半群 $T_0(t) = \mathrm{e}^{tL_c^0}$ 有衰减估计:

$$\|\mathrm{e}^{tL_c^0}\|_{X_0 \to X_0} \leqslant C_a \mathrm{e}^{-at}, \quad \forall 0 < a < \sigma_0, \quad t > 0. \tag{2.13}$$

定理 10.2.7 及定理 10.2.8 的证明　定理 10.2.7 的结论 (2) 可由解析半群平衡解稳定性理论 (定理 9.6.8) 直接得到, 这里不再证明.

只需证定理 10.2.7 的结论 (1) 及定理 10.2.8 成立, 下面给出统一的证明.

由注 2.2, 在定理 10.2.7 的条件 (1)(i)、定理 10.2.8 的条件 (i) 下, 均有

$$X = N(L_c) \oplus X_0, \quad N(L_c) = \{k\phi_c' : k \in \mathbb{R}\}, \quad X_0 = R(L_c).$$

定义 L_c 在子空间 X_0 上的限制算子 L_c^0 : $D(L_c) \cap X_0 \to X_0$. 由注 2.2 知, 在定理 10.2.7 的条件 (1) (ii)、定理 10.2.8 的条件 (ii) 和 (iii) 下, L_c^0 在 X_0 上生成的解析或连续半群 $\mathrm{e}^{tL_c^0}$ 满足衰减估计 (2.13).

设 $u(z,t)\,(z = x - ct)$ 为初值问题 (2.4) 的唯一解. 令 $v(z,t) = u(z,t) - \phi_c(z)$, 则 $v(z,t)$ 满足

$$\begin{cases} v_t = L_c v + g(v), & z \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ v|_{t=0} = u_0 - \phi_c := v_0, & z \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.14}$$

其中

$$g(v(z)) = F(\phi_c(z) + v(z)) - F(\phi_c(z)) - F'(\phi_c(z))v(z).$$

因为 $F \in C^2(\mathbb{R}^m)$, 所以 $g(0) = g'(0) = 0$. 故当 $\|v\|_{L_\infty}$ 充分小时, $\|g(v)\|_{L_\infty} = O(\|v\|_{L_\infty}^2)$.

引进两个新函数 $\sigma(t) \in \mathbb{R}$, $y(z,t) \in X_0$, 使得

$$v(z,t) = \phi_c(z + \sigma(t)) - \phi_c(z) + y(z,t),$$
$$v_0 = \phi_c(z + \sigma(0)) - \phi_c(z) + y(z,0), \quad y(z,0) \in X_0.$$

则 (2.14) 变为

$$\begin{aligned}\phi_c'(z+\sigma(t))\sigma' + y_t &= L_c(\phi_c(z+\sigma) - \phi_c(z)) + L_c y + g(\phi_c(z+\sigma) - \phi_c(z) + y) \\ &= L_c y + H(y, \sigma(t)),\end{aligned} \tag{2.15}$$

其中

$$\begin{aligned}H(y,\sigma(t)) &= g(y + \phi_c^*(z,\sigma(t))) - g(\phi_c^*(z,\sigma(t))), \\ \phi_c^*(z,\sigma(t)) &= \phi_c(z+\sigma(t)) - \phi_c(z).\end{aligned}$$

当 $\|v\|_{L_\infty}$ 充分小时 (因 $F \in C^2(\mathbb{R}^m)$),

$$|H(y(z,t),\sigma(t))| \leqslant C(|y(z,t)| + |\sigma(t)|)|y(z,t)|, \quad \forall z \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

因 L_c 为 X 中的闭稠定线性算子, 由 [Kat, p.184] 的结论知 L_c 的共轭算子, 记为 L_c^*, 满足 $\dim(N(L_c^*)) = \dim(N(L_c)) = 1$. 记

$$N(L_c^*) = \{k\psi_0 : k \in \mathbb{R}\}, \quad \|\psi_0\|_{X^*} = 1.$$

由于 $R(L_c)$ 为闭的, 根据闭值域定理 [Yo, p.205, 定理 3], $R(L_c) = (N(L_c^*))^\perp$. 又因 $X = N(L_c) \oplus R(L_c)$, 所以

$$\langle\psi_0, \phi_c'\rangle \neq 0, \ \langle\psi_0, v\rangle = 0, \quad \text{当且仅当 } v \in R(L_c).$$

故当 $|\sigma(t)|$ 充分小时, 有 $\langle\psi_0, \phi_c'(\cdot+\sigma)\rangle \neq 0$.

定义函数 $F_*(\sigma) = \langle\psi_0, \phi_c^*(z,\sigma)\rangle$, 则

$$F_*(0) = 0, \quad F_*'(0) = \langle\psi_0, \phi_c'\rangle \neq 0.$$

由隐函数定理, 当 $|\varepsilon|$ 充分小时, $F_*(\sigma) = \varepsilon$ 在 0 附近存在唯一解 $\sigma = F^{-1}(\varepsilon)$. 因而当 $\|v_0\|_X$ 充分小时, 在 0 附近存在唯一 σ_0 满足 $\langle\psi_0, v_0\rangle = \langle\psi_0, \phi_c^*(z,\sigma_0)\rangle$. 取 $\sigma_0 = F_*^{-1}(\langle\psi_0, v_0\rangle)$, 则

$$v_0(z) = \phi_c(z+\sigma_0) - \phi_c(z) + y_0(z), \quad y_0 \in X_0.$$

在 (2.15) 中, 取函数 $\sigma(t)$ 满足下面常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \sigma'(t) = \psi(\sigma, y), \\ \sigma(0) = \sigma_0, \end{cases} \tag{2.17}$$

其中

$$\psi(\sigma, y) = \frac{\langle\psi_0, H(y,\sigma(t))\rangle}{\langle\psi_0, \phi_c'(\cdot+\sigma)\rangle}.$$

前面已说明, 当 $|\sigma(t)|$ 充分小时, 有 $\langle\psi_0, \phi_c'(\cdot+\sigma)\rangle \neq 0$. 因为 $R(L_c) = N(L_c^*)^\perp$, 由 (2.15) 和 (2.17) 知, $y(t) = y(z,t)$ 满足

$$\begin{cases} y'(t) = L_c^0 y + G(\sigma, y), & t > 0, \\ y(0) = y_0 \in X_0, \end{cases} \tag{2.18}$$

$$G(\sigma, y) = H(y, \sigma(t)) - \phi_c'(\cdot + \sigma)\psi(\sigma, y) \in X_0. \tag{2.19}$$

由 $F(u) \in C^2(\mathbb{R}^m)$, 显然若 $|\sigma| + \|y\|_{X_0}$ 充分小, 则 ψ, G 关于 σ, y 为 C^1 连续, 且由 (2.16) 有

$$|\psi(\sigma, y)| + \|G(\sigma, y)\|_{X_0} \leqslant \gamma(\rho)\|y\|_{X_0}, \quad 当\ |\sigma| + \|y\|_{X_0} \leqslant \rho, \tag{2.20}$$

其中 $\gamma(\rho) \to 0$, 当 $\rho \to 0$.

根据连续半群适定性理论, 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 充分小, 使得对任意给定初值, 只要 $|\sigma_0| + \|y_0\|_{X_0} \leqslant \varepsilon_0/2$, 那么初值问题 (2.17) 和 (2.18) 存在唯一饱和解 $(\sigma(t), y(z,t)) \in C^1([0, T_{\max})) \times C([0, T_{\max}), X_0)$, 并且满足

$$|\sigma(t)| + \|y(z,t)\|_{X_0} \leqslant \varepsilon_0, \quad \forall\, t \in [0, T_{\max}), \tag{2.21}$$

其中 $[0, T_{\max})$ 为满足 (2.21) 的解的最大存在区间.

注意到 (2.18) 的解 $y(z,t)$ 满足积分方程

$$y(z,t) = \mathrm{e}^{tL_c^0} y_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)L_c^0} G(\sigma(s), y(\cdot, s))\mathrm{d}s, \tag{2.22}$$

利用 (2.13) 和 (2.20), 类似平衡解的渐近指数稳定性定理 (定理 9.6.3) 的证明, 可证对给定的 $\varepsilon_0 > 0$, 满足 (2.21) 和 (2.22) 的解 $y(z,t)$ 必满足指数衰减估计

$$\|y(z,t)\|_{X_0} \leqslant K\mathrm{e}^{-at}\|y_0\|_{X_0}, \quad \forall\, t \in [0, T_{\max}), \tag{2.23}$$

常数 K 与 $t, \|y_0\|_{X_0}, T_{\max}$ 无关.

进而, 又由 $\sigma(t)$ 满足的方程 (2.17), (2.20) 及 (2.23) 推得

$$\left|\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}(t)\right| = |\psi(\sigma, y)| \leqslant K_1 \mathrm{e}^{-at}\|y_0\|_{X_0}, \quad \forall\, t \in [0, T_{\max}), \tag{2.24}$$

常数 K_1 与 $t, \|y_0\|_{X_0}, T_{\max}$ 无关.

根据 (2.23) 和 (2.24), 对固定的 $\varepsilon_0 > 0$, 存在充分小的 $\delta_0 > 0$ 及常数 $M \geqslant 1$ 与 $\delta_0, t, T_{\max}$ 无关, 使得只要 $|\sigma_0| + \|y_0\|_{X_0} \leqslant \delta_0$, 则

$$\begin{aligned} \|y(z,t)\|_{X_0} + |\sigma(t)| &\leqslant M\mathrm{e}^{-at}\|y_0\|_{X_0} + |\sigma_0| + M\|y_0\|_{X_0} \\ &\leqslant \varepsilon_0/2, \quad \forall t \in [0, T_{\max}). \end{aligned} \tag{2.25}$$

由解的局部存在性及满足 (2.21) 的 $T_{\max}$ 的定义, 必有 $T_{\max} = \infty$. 于是, 若 $\|v_0\|_X = \|u_0 - \phi_c\|_X$ 充分小, 则初值问题 (2.17) 和 (2.18) 存在唯一整体解 $(\sigma(t), y(z,t))$, 且对任意 $t \geqslant 0$ 满足 (2.21) 及指数衰减估计 (2.24). 进而存在 $\sigma_\infty \in \mathbb{R}$, $M_1 > 0$, 使得

$$|\sigma(t)-\sigma_\infty|\leqslant M_1\mathrm{e}^{-at},\quad \forall\, t\geqslant 0.$$

于是对任意固定的 $a\in(0,\sigma_0)$, 存在充分小 $\delta_0>0$ 及正常数 $M_a>0$, 使得当 $\|u_0-\phi_c\|_X\leqslant\delta_0$ 时, 初值问题 (2.4) 存在唯一整体解, 且存在 $\sigma_\infty\in\mathbb{R}$, 使得

$$\begin{aligned}\|u(z,t)-\phi_c(z+\sigma_\infty)\|_X&\leqslant\|\phi_c(z+\sigma(t))-\phi_c(z+\sigma_\infty)\|_X+\|y(z,t)\|_{X_0}\\&\leqslant M_a\mathrm{e}^{-at},\quad \forall\, t\geqslant 0.\end{aligned}$$

定理 10.2.7 和定理 10.2.8 得证.

注 2.3 对更一般的非线性自治方程如拟线性发展方程 $u_t=F(u,D_xu,\cdots,D_x^mu)$, 若 $F(u,u_1,\cdots,u_m)$ 关于 $u,u_1,\cdots,u_m$ 为 C^2, 且 $F(u,D_zu,\cdots,D_z^mu)+cD_zu$ 在行波解 $\phi_c(z)\,(z=x-ct)$ 处的线性化算子 L_c 在 X 上生成解析半群, 如第 8 章所述, 可由扇形算子 $-L_c$ 定义相应的分数幂空间 $X^\alpha,\alpha\in[0,1]$, 其中 $X^0=X$, $X^1=D(L_c)$. 进一步, 若可验证存在 $\alpha\in[0,1)$, 使得相应的非线性扰动方程 (2.14) 中的非线性项 $g(v)$ 及 (2.15) 中的 $H(y,\sigma(t))$ 满足

$$\begin{gathered}\|g(v)\|_X=O(\|v\|_{X^\alpha}^q),\quad q>1\ (\text{当}\|v\|_{X^\alpha}\text{充分小}),\\ \|H(v,\sigma)\|_X\leqslant C(\rho)\|v\|_{X^\alpha}\ (\text{当}\|v\|_{X^\alpha}+|\sigma|\leqslant\rho),\quad \lim_{\rho\to0}C(\rho)=0,\end{gathered}$$

其中

$$g(v)=F(\phi_c+v,D_z\phi_c+D_zv,\cdots,D_z^m\phi_c+D_z^mv)-F(\phi_c,D_z\phi_c,\cdots,D_z^m\phi_c)-(L_c-c\partial_z)v.$$

结合定理 10.2.7 及定理 9.6.2 的证明, 可证在分数幂空间 X^α 中定理 10.2.7 仍成立, 即在相应的 L_c 的谱条件下有行波解在 X^α 中的渐近指数稳定性及不稳定性.

10.3 双稳态方程及广义 Fisher 方程波前解的渐近稳定性

10.3.1 双稳态方程波前解的渐近稳定性

考虑双稳态方程

$$u_t=u_{xx}+f(u),\tag{3.1}$$

其中 $f(u)$ 满足

$$f(0)=f(1)=0,\quad f'(0)<0,\quad f'(1)<0,\quad f\ \text{在}\ (0,1)\ \text{内只有一个零点}.\tag{3.2}$$

如 Hodgkin-Huxley 方程: $f(u)=u(1-u)(u-a)$, $0<a<1$.

由定理 1.2.16 知, 存在唯一波速 c, 使得 (3.1)—(3.2) 存在连接 0 和 1 的波前解 $u(x,t)=\phi(x-ct)$, 满足

$$\phi(-\infty)=0,\quad \phi(\infty)=1,\quad \phi'(z)>0,\quad z\in\mathbb{R}.\tag{3.3}$$

下面研究 $\phi(x-ct)$ 的稳定性.

在动坐标 $z=x-ct$ 下, (3.1) 在 ϕ 处的线性化方程为

$$v_t = v_{zz} + cv_z + f'(\phi(z))v.$$

定义线性算子 $L_c: C^2_{\text{unif}}(\mathbb{R}) \to C_{\text{unif}}(\mathbb{R})$:

$$L_c := \frac{\partial^2}{\partial z^2} + c\frac{\partial}{\partial z} + f'(\phi(z)).$$

设 $X = C_{\text{unif}}(\mathbb{R})$, 显然 $-L_c$ 为 X 上的扇形算子.

考虑 L_c 的特征值问题

$$L_c v = \lambda v. \tag{3.4}$$

把 (3.4) 改写为等价的一阶常微分方程组

$$Y' = A_c(z,\lambda)Y, \quad Y = (v, v')^{\mathrm{T}}, \tag{3.5}$$

其中

$$A_c(z,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - f'(\phi(z)) & -c \end{pmatrix}.$$

记 $A_c^{\pm}(\lambda) = A_c(\pm\infty,\lambda)$, 其中

$$A_c^-(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - f'(0) & -c \end{pmatrix}, \quad A_c^+(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - f'(1) & -c \end{pmatrix}.$$

定义代数曲线

$$S^{\pm} = \{\lambda \in \mathbb{C}: \det(A_c^{\pm}(\lambda) - \mathrm{i}\tau I) = 0, \text{ 存在某 } \tau \in \mathbb{R}\}.$$

因为 $f'(0)<0$, $f'(1)<0$, 易计算

$$\sup\{\mathrm{Re}\{S^- \cup S^+\}\} \leqslant -\sigma_0, \quad -\sigma_0 = \max\{f'(0), f'(1)\} < 0. \tag{3.6}$$

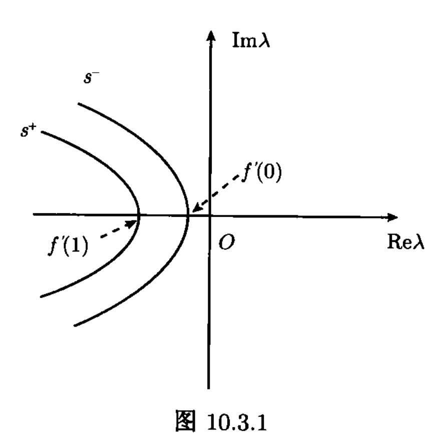


图 10.3.1

于是由微分算子的本质谱理论 (引理 10.2.5) 知, $\sigma_{\mathrm{ess}}(L_c)$ 包含在曲线 S^+ 及 S^- 所围的左侧闭区域内 (图 10.3.1), 且 $S^+\cup S^-\subset\sigma_{\mathrm{ess}}(L_c)$. 故有

$$\sup\{\mathrm{Re}\,\sigma_{\mathrm{ess}}(L_c)\}\leqslant-\sigma_0<0. \tag{3.7}$$

因此在 $\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,\lambda>-\sigma_0\}$ 内, 最多包含 $\sigma(L_c)$ 的有限个孤立的具有有限代数重数的特征值.

以下为叙述简便, 对正常数 δ_0, 定义区域 $\Omega_{\delta_0}=\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant-\delta_0\}$. 为研究 $\phi(x-ct)$ 的线性稳定性或不稳定性, 仅需研究

(1) 零是否为 L_c 的简单特征值;

(2) 除零外, 在某 Ω_{δ_0} 中 ($\delta_0>0$ 充分小) 是否有 L_c 的其他特征值.

因 L_c 不是自共轭算子, 故不能立即断定 Ω_{δ_0} 中 L_c 的特征值均为实的. 设 $\lambda\in\Omega_{\delta_0}$ 为 L_c 的特征值, 对应的特征向量记为 $v_\lambda(z)$. 对任意 $\lambda\in\Omega_{\delta_0}$, 由 (3.6) 及简单计算易证, 矩阵 $A_c^+(\lambda)$ 的两个特征根 $\sigma_1^\pm(\lambda)$ 和 $A_c^-(\lambda)$ 的两个特征根 $\sigma_0^\pm(\lambda)$ 总满足:

$$\mathrm{Re}\,\sigma_0^+(\lambda)>0,\quad \mathrm{Re}\,\sigma_0^-(\lambda)<0,\quad \mathrm{Re}\,\sigma_1^+(\lambda)>0,\quad \mathrm{Re}\,\sigma_1^-(\lambda)<0, \tag{3.8}$$

其中

$$\sigma_0^\pm(\lambda)=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4(f'(0)-\lambda)}}{2},\quad \sigma_1^\pm(\lambda)=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4(f'(1)-\lambda)}}{2}.$$

根据 (3.8), 对 (3.4) 或 (3.5) 应用常微分方程渐近理论, 有下面关于特征函数的渐近估计.

命题 10.3.1 取 $\delta_0=\min\left\{-\dfrac{f'(0)}{2},-\dfrac{f'(1)}{2}\right\}$. 在区域 Ω_{δ_0} 中, 若 λ 为 L_c 的特征值, $v_\lambda(z)\in C^2_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R})$ 为相应的特征向量, 则 $v_\lambda(z)$ 在 $z\to\pm\infty$ 时必以指数率衰减, 且

$$v_\lambda(z)\sim\exp\{\sigma_0^+(\lambda)z\},\quad 当\ z\to-\infty, \tag{3.9}$$

$$v_\lambda(z)\sim\exp\{\sigma_1^-(\lambda)z\},\quad 当\ z\to\infty. \tag{3.10}$$

把 L_c 转换为自共轭算子. 令 $\hat v(z)=\mathrm{e}^{\frac{c}{2}z}v(z)$, 则 (3.4) 可改写为

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\hat v+\left(f'(\phi_c)-\frac{c^2}{4}\right)\hat v=\lambda\hat v. \tag{3.11}$$

定义算子 $\hat L_c:H^2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$,

$$\hat L_c=\frac{\partial^2}{\partial z^2}+f'(\phi_c)-\frac{c^2}{4}.$$

显然, $\hat L_c$ 为 $L_2(\mathbb{R})$ 上的自共轭算子, 且

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\hat L_c)\subset\mathbb{C}\backslash\Omega_{\delta_0}.$$

若 $\lambda \in \Omega_{\delta_0}$ 为 L_c 的一个特征值, $v_\lambda \in C^2_{\text{unif}}(\mathbb{R})$ 为相应的特征向量, 由 (3.9) 和 (3.10) 得

$$\begin{cases} \hat{v}_\lambda \sim \exp\{(\sigma_0^+ + \frac{c}{2})z\} \to 0, & \text{当 } z \to -\infty, \\ \hat{v}_\lambda \sim \exp\{(\sigma_1^- + \frac{c}{2})z\} \to 0, & \text{当 } z \to \infty. \end{cases}$$

于是 $\hat{v}_\lambda \in H^2(\mathbb{R})$, 故 λ 必为 $\hat{L}_c$ 的特征值, 反之亦然. 所以在 Ω_{δ_0} 中, $\sigma_p(L_c) = \sigma_p(\hat{L}_c)$, 且 $\lambda - L_c$ 与 $\lambda - \hat{L}_c$ 的核空间维数相同. 类似可证 $\lambda - L_c$ 与 $\lambda - \hat{L}_c$ 的广义核空间的维数也相同.

因此在 Ω_{δ_0} 中, $\sigma_p(L_c) = \sigma_p(\hat{L}_c)$. 因 $\hat{L}_c$ 为自共轭算子, 其特征值必为实的. 显然零为 $\hat{L}_c$ 的正则特征值, 对应的特征向量为 $\mathrm{e}^{\frac{c}{2}z}\phi_c'(z) := \phi_1(z)$. 注意 $\phi_c'(z) > 0$, 故 $\phi_1(z) > 0$. 对二阶自共轭微分算子 $\hat{L}_c$ 应用 Sturm-Liouville 定理知, 0 必为 $\hat{L}_c$ 的第一特征值 (最大特征值) 且为简单的, $\hat{L}_c$ 的其余孤立特征值必为负实数且有负上界.

于是得到

引理 10.3.2 存在小 $\delta_0 > 0$, 使得若 $\lambda \in \Omega_{\delta_0}$ 为 L_c 的特征值, 则 λ 必为实的, 且零为 L_c 的简单特征值, 进而

$$\operatorname{Re}\{\sigma_p(L_c) \setminus \{0\}\} \leqslant -\varepsilon_0 < 0.$$

由 (3.7)、引理 10.3.2 及定理 10.2.7, 有下面的稳定性结果.

定理 10.3.3 在 (3.2) 的条件下, 方程 (3.1) 的行波解 $\phi_c(x-ct)$ 在 $C_{\text{unif}}(\mathbb{R})$ 中为带平移局部渐近指数稳定.

Fife 和 Mcleod [FM1] 利用上、下解方法、Lyapunov 函数法并结合行波解的局部指数稳定性, 得到了下面的全局渐近稳定性结果.

定理 10.3.4 假设条件 (3.2) 成立. 若方程 (3.1) 的初值 $u_0(x)$ 满足

$$0 \leqslant u_0(x) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \limsup_{x\to-\infty} u_0(x) < a < \liminf_{x\to\infty} u_0(x) \leqslant 1, \tag{3.12}$$

则方程 (3.1) 的行波解 $\phi_c(x-ct)$ 在 $C_{\text{unif}}(\mathbb{R})$ 中为带平移全局渐近指数稳定.

这里仅介绍定理 10.3.4 的主要证明思路, 详细证明见 [FM1].

设 $\phi_c(x-ct)$ 为 (3.1) 的连接 0 和 1 的行波解. 令 $z = x - ct$, 考虑方程 (3.1) 在动坐标系 (z,t) 下的初值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{zz} + cu_z + f(u), & z \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(z), & z \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.13}$$

首先对任意满足 (3.12) 的初值 u_0, 利用上下解方法可得到 (3.13) 的解 $u(z,t)$ 的上下界估计.

引理 10.3.5 假设初值 $u_0(z)$ 满足 (3.12), 则存在常数 z_1, z_2 及正常数 q_0, μ, 使得 (3.13) 的解 $u(z,t)$ 满足

$$\phi_c(z-z_1)-q_0\mathrm{e}^{-\mu t}\leqslant u(z,t)\leqslant\phi_c(z-z_2)+q_0\mathrm{e}^{-\mu t}. \tag{3.14}$$

利用估计 (3.14) 及 $\phi_c(z)$ 在 $\pm\infty$ 的指数衰减性, 易证

引理 10.3.6 假设初值 $u_0(z)$ 满足 (3.12), 则存在正常数 σ,μ 及 C, 其中 $\sigma>|c|/2$, 使得 (3.13) 的解 $u(z,t)$ 满足

$$|1-u(z,t)|,|u_z(z,t)|,|u_{zz}(z,t)|,|u_t(z,t)|<C(\mathrm{e}^{(-\frac{1}{2}c-\sigma)z}+\mathrm{e}^{-\mu t}),\quad z>0, \tag{3.15}$$

$$|u(z,t)|,|u_z(z,t)|,|u_{zz}(z,t)|,|u_t(z,t)|<C(\mathrm{e}^{(-\frac{1}{2}c+\sigma)z}+\mathrm{e}^{-\mu t}),\quad z<0. \tag{3.16}$$

由引理 10.3.6 可得 u,u_z,u_{zz} 的一致有界性、等度连续性及在 $z\to\pm\infty$, $t\to\infty$ 的一致衰减估计. 利用标准的紧性讨论方法, 可证

引理 10.3.7 对任意固定的 $\delta>0$, 轨道 $\{u(\cdot,t):\ t\geqslant\delta\}$ 作为 $C^2(\mathbb{R})$ 中的子集是相对紧的.

进而利用 Lyapunov 函数法并结合引理 10.3.6, 可证 (详细证明见 [FM1])

引理 10.3.8 假设初值 $u_0(x)$ 满足 (3.12), 则存在常数 z_0, 使得

$$\lim_{t\to\infty}\|u(z,t)-\phi_c(z-z_0)\|_{L_\infty}=0.$$

定理 10.3.4 可由定理 10.3.3 及引理 10.3.8 推出.

10.3.2 广义 Fisher 方程波前解在加权空间中的稳定性

考虑广义 Fisher 方程 (结–鞍情形)

$$u_t=u_{xx}+f(u),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{3.17}$$

其中 $f\in C^2(\mathbb{R})$ 满足

$$f(0)=f(1)=0,\quad f'(0)>0,\quad f'(1)<0;\quad f(u)>0\quad 当\ u\in(0,1). \tag{3.18}$$

由定理 1.2.12 知, 在条件 (3.18) 之下, 存在最大波速 $c^*<0$, 使得对任何 $c\leqslant c^*$, 方程 (3.17) 存在波前解 $\phi_c(x-ct)$ 满足

$$\phi_c(-\infty)=0,\quad \phi_c(\infty)=1,\quad \phi_c'(z)>0,\quad z\in\mathbb{R}. \tag{3.19}$$

由于 (3.17) 的满足 (3.19) 波前解的波速不是孤立的, 对任意 $c\leqslant c^*$, 波前解在通常意义下 ($H^1(\mathbb{R})$ 或 $C_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R})$ 空间中) 不可能是带平移渐近稳定的. 事实上, 若选 ϕ_c 附近具其他波速的波形 $\phi_{c+\Delta c}(x)$ 作为初值, 它是 $\phi_c(x)$ 的小扰动 (当 $|\Delta c|$ 适当小时), 对应的 (3.17) 的初值问题解 $\phi_{c+\Delta c}(x-(c+\Delta c)t)$ 在动坐标 $z=x-ct$ 下不会趋于 $\phi_c(z)$ 的一个平移.

对于 Hodgkin-Huxley 方程, 一些数值计算结果表明: 对 $c<c^*$, 当初值仅在有限区间上对 ϕ_c 作小扰动, 则解趋于 ϕ_c. 当初值取为 $u_0=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x>0\end{cases}$ 时, 解趋于具最大波速的波前解 $\phi_{c^*}(x-c^*t)$.

下面研究 $\phi_c(z)$ 对应的线性化算子 L_c (同 10.3.1 节中的定义) 的谱特征, 根据它在几种空间中的谱特征, 说明其在相应空间下的线性稳定性或不稳定性, 进而得到波前解在相应空间中的非线性渐近稳定性或不稳定性.

设 $c \leqslant c^*$, $\phi_c(x-c\,t)$ 为 (3.17) 满足 (3.19) 的波前解. 在动坐标系 $z = x - c\,t$ 下, (3.17) 在 $\phi_c(z)$ 处的线性化方程为

$$v_t = v_{zz} + c\, v_z + f'(\phi_c)v. \tag{3.20}$$

取 $X = L_2(\mathbb{R})$ 或 $C_{\text{unif}}(\mathbb{R})$, 定义算子

$$L_c : D(L_c) \to X, \quad D(L_c) = H^2(\mathbb{R}) \text{ 或 } C^2_{\text{unif}}(\mathbb{R}),$$
$$L_c = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + c\frac{\partial}{\partial z} + f'(\phi_c).$$

根据 (3.19) 和 (3.20), 计算易知 (图 10.3.2)

$$S^- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = (\mathrm{i}\tau)^2 + c(\mathrm{i}\tau) + f'(0),\ \ \tau \in \mathbb{R}\},$$
$$S^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = (\mathrm{i}\tau)^2 + c(\mathrm{i}\tau) + f'(1),\ \ \tau \in \mathbb{R}\},$$

所以

$$\sup\{\mathrm{Re}\,\sigma_{\text{ess}}(L_c)\} = f'(0) > 0.$$

于是在 $X = L_2(\mathbb{R})$ 或 $C_{\text{unif}}(\mathrm{R})$ 中, ϕ_c 无线性指数稳定性. 另外, $\phi_c(z)$ 关于 c 连续且光滑, $\dfrac{\partial}{\partial c}\phi_c(z)$ 存在, 且满足

$$L_c\frac{\partial}{\partial c}\phi_c(z) = -\phi_c'(z), \quad L_c^2\left(\frac{\partial}{\partial c}\phi_c(z)\right) = 0.$$

故若 $\dfrac{\partial}{\partial c}\phi_c(z) \in X$, 则 0 的代数重数至少是 2.

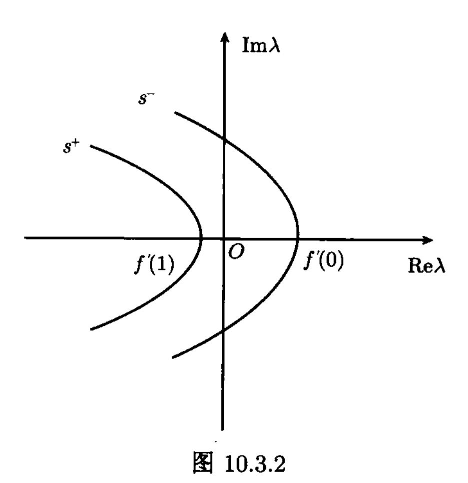


图 10.3.2

为得到 $\phi_c(z)$ 在一定意义下的局部渐近稳定性, 至少要排除附近其他波速的波作为 $\phi_c(z)$ 的小扰动. 由定理 1.2.15 知, 对 $c \leqslant c^* < 0$, 波前解 $\phi_c(z)$ 按下面指数衰减率趋于 0 和 1.

$$\phi_c(z) - 1,\ \phi_c'(z) \sim \exp\{\sigma_1^-(c)\, z\}, \quad z \to \infty, \ \ \forall\, c \leqslant c^*, \tag{3.21}$$

$$\phi_c(z),\ \phi_c'(z) \sim \exp\{\sigma_0^-(c)\, z\}, \quad z \to -\infty, \ \ \forall\, c < c^*, \tag{3.22}$$

$$\phi_c(z),\ \phi_c'(z) \sim \exp\{\sigma_0^+(c)\, z\}, \quad z \to -\infty, \ \ c = c^*, \tag{3.23}$$

其中

$$\sigma_0^{\pm}(c) = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2} > 0, \quad \sigma_1^-(c) = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4f'(1)}}{2} < 0.$$

因 $\sigma_0^{\pm}(c)$ 与 $\sigma_1^-(c)$ 依赖 c, 故对不同的 c, $\phi_c(z)$ 在 $\pm\infty$ 处具有不同的指数衰减率. 若在 $\pm\infty$ 处对初始扰动加一定的限制, 如令初始小扰动在 $-\infty$ 处趋于零的速度至少比 $\exp\{\sigma_0^-(c)z\}$ 快, 则 $\phi_{c+\Delta c}(z) - \phi_c(z)$ 不满足此条件, 此时可排除其他波速的波作为可允许的初值. 因此, 对更强限制下的初值, 波前解有可能是渐近稳定的. 下面利用波前解的渐近稳定理论及细致的谱分析, 试图证明 $\phi_c(x - ct)$ 在合适的加权空间中是局部渐近指数稳定的.

令 $X = C_{\text{unif}}(\mathbb{R})$, 选取权函数 $w(z) = 1 + \mathrm{e}^{-az}$, $a > 0$ 待定. 定义

$$X_w = \{v : wv \in X\} := C_{\text{unif},w}(\mathbb{R}), \quad \|v\|_{X_w} = \|wv\|_X,$$

则 X_w 为 Banach 空间, 称它为 X 的加权空间. 同理可定义 $C^2_{\text{unif}}(\mathbb{R})$ 的加权空间 $C^2_{\text{unif},w}(\mathbb{R})$.

定义 L_c 在加权空间 X_w 上的限制算子 $L_{c,w} : D(L_{c,w}) = C^2_{\text{unif},w}(\mathrm{R}) \to X_w$,

$$L_{c,w} v = L_c v, \quad \forall\, v \in D(L_{c,w}).$$

定义 $\bar{L}_{c,w} : C^2_{\text{unif}}(\mathbb{R}) \to C_{\text{unif}}(\mathbb{R})$,

$$\bar{L}_{c,w} u := w L_{c,w}(u/w) = L_{c,w} u + cw(1/w)_z u + 2w(1/w)_z u_z + w(1/w)_{zz} u,$$

其中

$$|w(1/w)_z| \leqslant C, \quad |w(1/w)_{zz}| \leqslant C, \quad z \in \mathbb{R},$$

且

$$w\,(1/w)_z \to a \quad \text{当 } z \to -\infty, \quad w\,(1/w)_z \to 0 \quad \text{当 } z \to \infty,$$
$$w\,(1/w)_{zz} \to a^2 \quad \text{当 } z \to -\infty, \quad w\,(1/w)_{zz} \to 0 \quad \text{当 } z \to \infty.$$

显然算子 $L_{c,w} : D(L_{c,w}) \to X_w$ 等价于算子 $\bar{L}_{c,w} : D(\bar{L}_{c,w}) \to X$, 且

$$\sigma(L_{c,w})=\sigma(\bar{L}_{c,w}),\quad \sigma_p(L_{c,w})=\sigma_p(\bar{L}_{c,w}),\quad \sigma_{\text{ess}}(L_{c,w})=\sigma_{\text{ess}}(\bar{L}_{c,w}),$$
$$\|(\lambda I-L_{c,w})^{-1}\|_{X_w\to X_w}=\|(\lambda I-\bar{L}_{c,w})^{-1}\|_{X\to X},\quad \forall\,\lambda\in\rho(\bar{L}_{c,w}).$$

易见 $\bar{L}_{c,w}$ 在 X 上生成解析半群, 故 $L_{c,w}$ 在 X_w 上也生成解析半群.

定义 $\bar{L}_{c,w}$ 的极限算子 $\bar{L}_{c,w}^{\pm\infty}$:

$$\bar{L}_{c,w}^{-\infty}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}+(c+2a)\frac{\partial}{\partial z}+(f'(0)+ca+a^2),$$
$$\bar{L}_{c,w}^{\infty}=\frac{\partial^2}{\partial z^2}+c\frac{\partial}{\partial z}+f'(1),$$

及代数曲线 $\hat{S}^{\pm}$:

$$\hat{S}^{+}=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda=(\mathrm{i}\tau)^2+c(\mathrm{i}\tau)+f'(1),\ \ \tau\in\mathbb{R}\},$$
$$\hat{S}^{-}=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda=(\mathrm{i}\tau)^2+(c+2a)(\mathrm{i}\tau)+f'(0)+ca+a^2,\ \ \tau\in\mathbb{R}\}.$$

对于 $\lambda\in\hat{S}^-$, $\mathrm{Re}\,\lambda=-\tau^2+f'(0)+ca+a^2$, 选 $a>0$ 使得

$$\frac{-c-\sqrt{c^2-4f'(0)}}{2}<a<\frac{-c+\sqrt{c^2-4f'(0)}}{2},$$

则 $-\delta_a:=\max\{f'(0)+ca+a^2,\ f'(1)\}<0$, 满足 $\sup\mathrm{Re}\,\hat{S}^{\pm}\leqslant-\delta_a<0$. 由引理 10.2.5,

$$\sup\{\mathrm{Re}\,\sigma_{\text{ess}}(\bar{L}_{c,w})\}\leqslant\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda:\lambda\in\hat{S}^-\cup\hat{S}^+\}\leqslant-\delta_a<0.$$

于是有

引理 10.3.9　对任意固定的 $c<c^*$, 取 $w=1+\mathrm{e}^{-az}$. 若 $a>0$ 满足

$$\frac{-c-\sqrt{c^2-4f'(0)}}{2}<a<\frac{-c+\sqrt{c^2-4f'(0)}}{2},\tag{3.24}$$

则有

$$\sup\{\mathrm{Re}\,\sigma_{\text{ess}}(L_{c,w})\}\leqslant-\delta_a<0.$$

注 3.1　若 c^* 满足 $(c^*)^2>4f'(0)$, 则对满足 (3.24) 的权函数 $w=1+\mathrm{e}^{-az}$, 引理 10.3.9 的结论对 $c=c^*$ 仍成立.

注 3.2　若 c^* 满足 $(c^*)^2=4f'(0)$ (如 $f(u)=u(1-u)$), 则对 $c=c^*$ 不存在 a 满足 (3.24), 故引理 10.3.9 结论对 $c=c^*$ 不成立. 若取 $a=-c^*/2$, 有

$$\mathrm{Re}\,\{\sigma_{\text{ess}}(L_{c,w})\}\setminus\{0\}<0,\quad 0\in\sigma_{\text{ess}}(L_{c,w}).\tag{3.25}$$

下面设 $a>0$ 满足条件 (3.24) 且 a 固定. 考虑区域 $\Omega_{\delta_0}=\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant-\delta_0\}$ $\left(0<\delta_0<\dfrac{\delta_a}{2}\text{ 且 }\delta_0\text{ 充分小}\right)$ 中 $L_{c,w}$ 的特征值的分布. 设 $\lambda\in\Omega_{\delta_0}$ 为 $L_{c,w}$ 的特征值, $v_\lambda\in X_w$ 为相应的特征函数, 即

$$v_\lambda'' + cv_\lambda' + f'(\phi_c)v_\lambda = \lambda v_\lambda, \quad v \in X_w,$$

其等价的一阶微分方程组为 $Y' = A_c(z,\lambda)Y$. 易验证在 (3.18) 和 (3.24) 的假设下, 当 $\lambda \in \Omega_{\delta_0}$ 时, $A_c(-\infty,\lambda)$ 的两个特征值 $\sigma_0^\pm(\lambda)$ 和 $A_c(\infty,\lambda)$ 的两个特征值 $\sigma_1^\pm(\lambda)$ 满足

$$\mathrm{Re}\,\sigma_0^-(\lambda) < a < \mathrm{Re}\,\sigma_0^+(\lambda), \quad \mathrm{Re}\,\sigma_1^-(\lambda) < 0 < \mathrm{Re}\,\sigma_1^+(\lambda),$$

其中

$$\sigma_0^\pm(\lambda) = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4(f'(0)-\lambda)}}{2}, \quad \sigma_1^\pm(\lambda) = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4(f'(1)-\lambda)}}{2}.$$

于是有

引理 10.3.10 对任意固定的 $c < c^*$, 取 $w = 1 + \mathrm{e}^{-az}$, 则当 a 满足 (3.24) 时, 存在充分小的正数 δ_0 ($\delta_0 < \frac{1}{2}\delta_a$), 使得若 $\lambda \in \Omega_{\delta_0}$ 为 $L_{c,w}$ 的特征值, 则特征向量 $v_\lambda \in X_w$ 在 $\pm\infty$ 处必以下面的指数率衰减:

$$v_\lambda(z) \sim \exp\{\sigma_1^-(\lambda)z\}, \quad z \to \infty, \tag{3.26}$$

$$v_\lambda(z) \sim \exp\{\sigma_0^+(\lambda)z\}, \quad z \to -\infty. \tag{3.27}$$

与 10.3.1 节类似, 作变换

$$\hat{v}(z) = \exp\left\{\frac{c}{2}z\right\} v(z), \tag{3.28}$$

则原特征值问题 $L_{c,w}v = \lambda v$ 变为 $\hat{L}_{c,w}\hat{v} = \lambda\hat{v}$, 其中

$$\hat{L}_{c,w} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(f'(\phi_c) - \frac{c^2}{4}\right). \tag{3.29}$$

类似于 10.3.1 节中的讨论, 由 (3.24), (3.28) 和 (3.29), 容易证明

引理 10.3.11 设 a 满足 (3.24), 取 $w = 1 + \mathrm{e}^{-az}$, $\delta_0 > 0$ 充分小, 则在区域 $\Omega_{\delta_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant -\delta_0\}$ 中, 存在非零函数 $v_\lambda \in C^2_{\mathrm{unif},\omega}(\mathbb{R})$ 使得 $L_{c,w}v_\lambda = \lambda v_\lambda$, 当且仅当存在非零函数 $\hat{v}_\lambda \in H^2(\mathbb{R})$ 使得 $\hat{L}_{c,w}\hat{v}_\lambda = \lambda\hat{v}_\lambda$.

显然, $\hat{L}_{c,w}$ 为 $L_2(\mathbb{R})$ 上的自共轭算子, 引理 10.3.11 意味着当 a 满足 (3.24) 时, $L_{c,w}$ 在 Ω_{δ_0} 中的特征值 λ 必为实的. 事实上, 下面可以进一步证明 $L_{c,w}$ 在 Ω_{δ_0} 中的特征值 λ 必为负的.

定理 10.3.12 对任一固定的 $c < c^*$, 取 $w = 1 + \mathrm{e}^{-az}$, 其中 a 满足 (3.24). 对充分小的 $\delta_0 > 0$, 若 $\lambda \in \Omega_{\delta_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant -\delta_0\}$ 为 $L_{c,w}$ 的特征值, 则 λ 必为实的, 且存在 $\delta_c > 0$, 使得

$$\sup\{\mathrm{Re}\,\sigma_p(L_{c,w})\} \leqslant -\delta_c < 0,$$

其中 $0 < \delta_c < \delta_0$.

证明　设 $\lambda \geqslant 0$ 为 $L_{c,w}$ 的特征值, $v_\lambda(z) \in C^2_{\text{unif},w}(\mathbb{R})$ 为相应的特征函数. 作变换

$$v_\lambda(z) = u_\lambda(z)\phi_c'(z). \tag{3.30}$$

于是 $u_\lambda(z)$ 满足

$$u_\lambda'' + (2\phi_c''/\phi_c' + c)u_\lambda' = \lambda u_\lambda, \tag{3.31}$$

或等价地

$$\left\{\exp\left[\int_0^z \left(2\frac{\phi_c''(s)}{\phi_c'(s)} + c\right) \mathrm{d}s\right] u_\lambda'(z)\right\}' = \lambda u_\lambda \exp\left[\int_0^z \left(2\frac{\phi_c''(s)}{\phi_c'(s)} + c\right) \mathrm{d}s\right]. \tag{3.32}$$

首先证明 0 不是 $L_{c,w}$ 的特征值, 由反证法, 设 0 是 $L_{c,w}$ 的特征值, $v_0(z) \in X_w$ 为相应的特征函数.

由 (3.30) 和 (3.32) 得

$$u_0'(z) = C\exp\left[-\int_0^z \left(2\frac{\phi_c''(s)}{\phi_c'(s)} + c\right) \mathrm{d}s\right], \tag{3.33}$$

其中 C 为常数.

由波前解的存在性知, $\phi_c'(z) > 0$. 利用 (3.21), 易验证

$$-(2\phi_c''(z)/\phi_c'(z) + c) \to \sqrt{c^2 + 4f'(1)} > 0, \quad 当\ z \to \infty. \tag{3.34}$$

根据 (3.21), (3.26) 和 (3.30), 容易验证: $u_0'(z)$ 在 $z \to \infty$ 时一定有界. (3.33) 和 (3.34) 又意味着若 $u_0'(z)$ 在 $z = \infty$ 附近有界, 则 $u_0'(z) \equiv 0$, $z \in \mathbb{R}$, 此时有 $v_0(z) = C_0\phi_c'(z)$, 其中 C_0 为常数. 比较 (3.22) 和 (3.27) 知, 当 a 满足 (3.24) 时, $\phi_c'(z) \notin X_w$, 于是 $v_0(z) \equiv 0$, 矛盾. 故 0 不是 $L_{c,w}$ 的特征值.

注意到引理 10.3.11 以及 0 不是 $L_{c,w}$ 的特征值, 下面只需证明 $\hat{L}_{c,w}$ 不存在正的特征值.

反设 $\lambda_1 > 0$ 是 $\hat{L}_{c,w}$ 的第一特征值, 相应的特征函数为 $\hat{v}_{\lambda_1}$, 引理 10.3.11 说明 λ_1 也是 $L_{c,w}$ 的第一特征值, 相应的特征向量为 v_{λ_1}. 由 Sturm-Liouville 定理, $\hat{v}_{\lambda_1}$ 为不变号的函数. 不失一般性, 设 $\hat{v}_{\lambda_1}(z) > 0$. 由 (3.28) 知, $v_{\lambda_1}(z) > 0$, 进而由 (3.30) 和 $\phi_c'(z) > 0$ 又知 $u_{\lambda_1}(z) > 0$.

利用 (3.21), (3.22), (3.26), (3.27) 和 (3.30) 知, $u_{\lambda_1}(z)$ 满足

$$|u_{\lambda_1}(z)|,\ |u_{\lambda_1}'(z)| \to 0, \quad 当 z \to \pm\infty. \tag{3.35}$$

由 (3.32), $u_{\lambda_1}'(z) \not\equiv 0$, 不妨认为存在 $z_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $u_{\lambda_1}'(z_0) > 0$, 不妨设 $z_0 = 0$, 即 $u_{\lambda_1}'(0) > 0$. 由于 $\lambda_1 > 0$, $u_{\lambda_1}(z) > 0$, (3.32) 意味着

$$u_{\lambda_1}'(z) > u_{\lambda_1}'(0)\exp\left\{\int_0^z -(2\phi_c''/\phi_c' + c)\,\mathrm{d}s\right\}, \quad \forall z > 0. \tag{3.36}$$

由 (3.34) 及 (3.36) 易见, 当 $z \to \infty$ 时, $u'_{\lambda_1}(z) \to \infty$, 这与 (3.35) 矛盾. 故 $L_{c,w}$ 在 Ω_{δ_0} 中没有正特征值. 定理 10.3.12 证毕.

注 3.3 若临界波速 c^* 满足 $c^* < -2\sqrt{f'(0)}$, 取权函数 $w(z) = 1 + \mathrm{e}^{-az}$, a 满足 (3.24), 其中 $c = c^*$. 易见此时引理 10.3.9—10.3.10 的结果对 $c = c^*$ 仍成立. 进而利用波前解 ϕ_{c^*} 在 $\pm\infty$ 的衰减估计 (3.21) 和 (3.23), 类似引理 10.3.12 的证明可得 $L_{c^*,w}$ 的孤立特征值分布, 即有

定理 10.3.13 若 c^* 满足 $c^* < -2\sqrt{f'(0)}$, 取权函数 $w(z) = 1 + \mathrm{e}^{-az}$, a 满足 (3.24), 其中 $c = c^*$, 则存在充分小的 $\delta_0 > 0$, 使得若 $\lambda \in \Omega_{\delta_0}$ 为 $L_{c^*,w}$ 的特征值, 则 λ 必为实的, 且 0 为 $L_{c^*,w}$ 的简单特征值, 进而

$$\mathrm{Re}\,\{\sigma_p(L_{c^*,w}) \setminus \{0\}\} \leqslant -\sigma_a < 0.$$

于是, 由引理 10.3.9、定理 10.3.12、定理 10.3.13 及注 3.1, 有下面局部稳定性定理.

定理 10.3.14 (非临界波速的波前解在指数加权空间中的渐近指数稳定性) 对任意固定的 $c < c^*$, 取 $w = 1 + \mathrm{e}^{-az}$, 其中 a 满足 (3.24), 则波前解 $\phi_c(z)$ 在 $X_w = C_{\mathrm{unif},w}(\mathbb{R})$ 中为局部渐近指数稳定, 即存在 $\delta_c > 0, \sigma_c > 0, K_c > 0$, 若初值 $u_0(z)$ 满足 $\|u_0(z) - \phi_c(z)\|_{X_w} < \delta_c$, 则 $\|u(z,t) - \phi_c(z)\|_{X_w} \leqslant K_c \mathrm{e}^{-\sigma_c t}$, $\forall t > 0$.

定理 10.3.15 (临界波速的波前解在指数加权空间中的带平移渐近稳定性) 若临界波速 c^* 满足 $c^* < -2\sqrt{f'(0)}$, 取 $w = 1 + \mathrm{e}^{-az}$, 其中 a 满足 (3.24), 则波前解 $\phi_c(z)$ 在 $X_w = C_{\mathrm{unif},w}(\mathbb{R})$ 中为带平移局部渐近指数稳定.

注 3.4 若 $c^* = -2\sqrt{f'(0)}$, 取权函数 $w(z) = 1 + \mathrm{e}^{-az}$, $a = -\dfrac{c^*}{2}$. 结合定理 10.3.12 的证明方法, 可证在 $\{\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0\}$ 中 $L_{c^*,w}$ 的特征值均为实的, 且 0 为 $L_{c^*,w}$ 的几何重数为 1 的特征值, 进而可证 $L_{c^*,w}$ 无正特征根 (详细证明留给读者). 但由注 3.2, 0 在 $L_{c^*,w}$ 的本质谱中, 故 0 不是 $L_{c^*,w}$ 的孤立特征值, 此时无法应用现有的经典行波解稳定性理论得到 $\phi_{c^*}(z)$ 在指数加权空间中的局部渐近指数稳定性. 当初值满足更细致渐近估计时, [KR] 证明了初值问题的解在 $L_\infty(\mathbb{R})$ 意义上趋于临界波速的行波解 (该稳定性不同于 10.1 中定义的在某函数空间中的局部稳定性, 初值限于特殊函数类, 解在相对弱的函数空间中趋于行波解), 详细结果可见 [KR].

10.4 退化 Fisher 方程波前解的渐近稳定性

本节考虑退化 Fisher 方程

$$u_t = u_{xx} + u^p(1-u), \quad p > 1, \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

连结 0 和 1 的波前解 $u = \phi_c(x - ct)$ 的稳定性, 其中 $f(u) = u^p(1 - u)$ 满足 $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) = 0$, $f'(1) < 0$, 当 $0 < u < 1$ 时 $f(u) > 0$.

由定理 1.4.1 知, 对任意固定 $p > 1$, 存在 $c^*(p) < 0$, 使得对任意 $c \leqslant c^*(p)$, 方程 (4.1) 存在波前解 $u = \phi_c(x - ct)$ 满足

$$\phi_c(-\infty) = 0, \quad \phi_c(\infty) = 1.$$

进而在 $z = -\infty$ 附近有下面的渐近衰减性:

$$\phi_c(z),\ \phi_c'(z) \sim \mathrm{e}^{-cz} \quad 当\ z \to -\infty,\ c = c^*(p), \tag{4.2}$$

$$\phi_c(z) \sim \left(\frac{c}{(p-1)z}\right)^{\frac{1}{p-1}} \quad 当\ z \to -\infty,\ c < c^*(p). \tag{4.3}$$

在动坐标 $z = x - ct$ 下, 方程 (4.1) 的初值问题为

$$\begin{cases} u_t = u_{zz} + cu_z + u^p(1-u), & z \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(z), & z \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.4}$$

问题 (4.4) 在 $\phi_c(z)$ 处的线性化方程为

$$v_t = v_{zz} + cv_z + f'(\phi_c)v := L_c v. \tag{4.5}$$

对任意 $c \leqslant c^*$, 同前面 10.3 节的计算可得到线性算子 $L_c : C^2_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R}) \to C_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R})$ 的本质谱的边界 $S^{\pm}$(图 10.4.1), 其中

$$S^- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = (\mathrm{i}\tau)^2 + c(\mathrm{i}\tau) + f'(0),\ \ \tau \in \mathbb{R}\},$$
$$S^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = (\mathrm{i}\tau)^2 + c(\mathrm{i}\tau) + f'(1),\ \ \tau \in \mathbb{R}\}.$$

因 $f'(0) = 0$, $f'(1) < 0$, 于是有估计:

$$\mathrm{Re}\,\{\sigma_{\mathrm{ess}}(L_c) \setminus \{0\}\} < 0, \quad 0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(L_c). \tag{4.6}$$

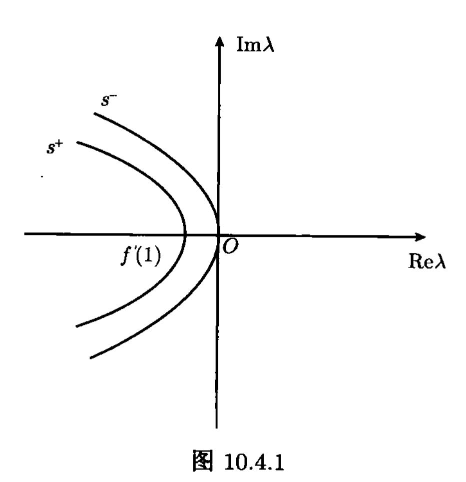


图 10.4.1

注意到 $0 \in \sigma_{\text{ess}}(L_c)$, 故 10.2 节中建立的行波解的渐近稳定性理论 (定理 10.2.7) 无法保证 (4.1) 的行波解在 $X = C_{\text{unif}}(\mathbb{R})$ 中的渐近指数稳定性. 类似于 10.3.2 节, 考虑在加权空间 X_w $(w = 1 + \mathrm{e}^{-az})$ 中 L_c 的限制算子 $L_{c,w}$ (定义同 10.3.2 节) 的谱分布.

类似 10.3.2 节中的计算及注 3.1, 有下面的本质谱估计.

引理 10.4.1 对任意固定的 $p > 1$, $c \leqslant c^*(p) < 0$, $0 < a < -c$, 存在 $\delta_a > 0$ 使得 $L_{c,w}$ 满足

$$\text{Re}\ (\sigma_{\text{ess}}(L_{c,w})) \leqslant -\delta_a < 0. \tag{4.7}$$

下面对固定的 $c \leqslant c^*(p)$, $0 < a < -c$, 研究 $L_{c,w}$ 在 $\{\text{Re}\,\lambda \geqslant -\delta_a/2\}$ 中的特征值分布.

首先对 $c = c^*(p)$, 由存在性结果知 $\phi_c(z)$ 在 $z = \pm\infty$ 附近为指数衰减, 且 $c^*(p) < -2\sqrt{f'(0)} = 0$. 由 10.3.2 节中对临界波速情形的讨论, 类似于定理 10.3.13 有下面的特征值估计.

引理 10.4.2 对任意固定的 $p > 1$, $c = c^*(p) < 0$, $0 < a < -c$,

$$\begin{cases} 0\ \text{是}L_{c,w}\text{的简单特征值,特征函数空间由}\phi_c'(z)\ \text{张成,} \\ \text{且}\ \sup \text{Re}\ (\sigma_p(L_{c,w}) \setminus \{0\}) < -\sigma_a < 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

定理 10.4.3 对任意固定的 $p > 1$, $c = c^*(p) < 0$, $0 < a < -c$, 波前解 $\phi_c(z)$ 在 $X_w = C_{\text{unif},w}(\mathbb{R})$ 中为带平移局部渐近指数稳定.

证明 对于 $p \geqslant 2$ 的情形, 根据引理 10.4.1、引理 10.4.2 及 $f(u) = u^p(1-u) \in C^2(\mathbb{R})$, 可应用定理 10.2.7 直接得到定理 10.4.3 的结论.

对于 $1 < p < 2$ 的情形, 由引理 10.4.1 及引理 10.4.2, 仍有行波解在 X_w 中 (广义) 的线性渐近稳定性. 确切地说, $L_{c,w}$ 在 X_w 的子空间 X_0 上生成的解析半群 $T_0(t) = \mathrm{e}^{L_{c,w}}|_{X_0 \to X_0}$ 为指数衰减, 其中 $X_0 = R(L_{c,w})$. 注意到当 $1 < p < 2$ 时, 在 $u = 0$ 附近 $f''(u)$ 无界, 不满足定理 10.2.7 中关于 $f(u)$ 的假设条件, 故对此情形不能直接应用定理 10.2.7 来得到行波解的非线性 (带平移) 渐近稳定性. 为得到此情形行波解的渐近稳定性, 需减弱定理 10.2.7 的条件. 对 $1 < p < 2$, 首先对问题 (2.14) 中的非线性方程 $v_t = L_{c^*,w}v + g(v, \phi_{c^*})$ 通过细致计算, 可证明非线性扰动项 $g(v, \phi_{c^*})$ 满足估计:

$$|g(v(z), \phi_{c^*}(z))| \leqslant C|v(z)|^p, \quad \forall\ z \in \mathbb{R}, \quad \text{若}\ \|v\|_{L_\infty}\ \text{充分小}, \quad 1 < p < 2. \tag{4.9}$$

且当 $\phi_{c^*}(z)$ 满足渐近估计 (4.2) 时, 非线性方程 (2.15) 中的扰动项 $H(y, \sigma(t))$ 满足

$$|H(y(z,t), \sigma(t))| \leqslant C_p \left(|y(z,t)|^{p-1} + |\sigma(t)|\right) |y(z,t)|, \quad 1 < p < 2. \tag{4.10}$$

由估计 (4.9) 和 (4.10), 可直接验证定理 10.2.7 的证明中的关键估计 (2.20) 仍成立, 于是估计 (2.23) 和 (2.24) 仍成立, 其中 $X_0 = R(L_{c^*,w})$, $\|\cdot\|_{X_0} = \|\cdot\|_{X_w}$. 类似于定

理 10.2.7 的证明, 对 $1 < p < 2$, $0 < a < -c^*(p)$ 的情形可证行波解 $\phi_{c^*}(z)$ 在 X_w 中为局部渐近指数稳定. 定理 10.4.3 证毕.

进一步利用上下解方法, Lyapunov 函数法及定理 10.4.3, 可得到具临界波速的波前解在指数加权空间中的全局稳定性.

定理 10.4.4　对任意固定的 $p > 1$, 若初值 $u_0(z)$ 满足

$$0 \leqslant u_0(z) \leqslant 1, \quad \liminf_{z\to\infty} u_0(z) > 0, \tag{4.11}$$

$$\lim_{z\to-\infty} \mathrm{e}^{-rz} u_0(z) = 0, \quad \text{对某}\, r > 0, \tag{4.12}$$

则存在常数 $z_0 \in \mathbb{R}$, 使得 (4.4) 的解 $u(z,t)$ 满足

$$\|u(z,t) - \phi_{c^*(p)}(z+z_0)\|_{X_w} \leqslant C\mathrm{e}^{-\sigma t},$$

其中权函数 $w(z) = 1 + \mathrm{e}^{-az}$ 满足

$$0 < a < \min\{r_s, c^*(p)\}, \quad r_s := \sup\{r > 0 : \lim_{z\to-\infty} \mathrm{e}^{-rz} u_0(z) = 0\}, \tag{4.13}$$

C, σ 为依赖于 a 的正常数.

证明思路　对初值问题 (4.4) 可以证明 (详细证明见 [WX]), 若初值 $u_0(z)$ 满足 (4.11) 和 (4.12), 则存在正常数 $\varepsilon_0, z_1^* < z_1, z_2^* < z_2, \mu$, 及单调下降的有界 C^2 函数 $q_1(z)$ 和 $q_2(z)$, 使得

$$\begin{aligned}\underline{u}(z,t) &= \phi_c(z+z_1) - (1-\varepsilon_0)\mathrm{e}^{-\mu t} q_1(z+z_1^*),\\ \bar{u}(z,t) &= \phi_c(z-z_2) + (1-\varepsilon_0)\mathrm{e}^{-\mu t} q_2(z-z_2^*)\end{aligned}$$

为 (4.4) 的一对下上解. 故

$$\phi_c(z+z_1) - (1-\varepsilon_0)\mathrm{e}^{-\mu t} q_1(z+z_1^*) < u(z,t) < \phi_c(z-z_2) + (1-\varepsilon_0)\mathrm{e}^{-\mu t} q_2(z-z_2^*). \tag{4.14}$$

利用 (4.14), 类似于 10.3.1 节中对双稳态方程情形的讨论可证 (详细证明见 [WX]), 存在一子列 $\{t_j\}$, $t_j \to \infty$, 及 $\tilde{z}_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $u(\cdot, t_j)$ 在加权空间 $C^2_{\text{unif},w}$ 中收敛到行波解 $\phi_{c^*}(z - \tilde{z}_0)$. 进而由定理 10.4.3 ($\phi_{c^*}(z)$ 的带平移局部指数稳定性) 可证当 $t \to \infty$ 时, (4.4) 的解 $u(z,t)$ 必指数趋于 $\phi_{c^*}(z - \tilde{z}_0)$. 定理 10.4.4 证毕.

下面考虑 $p > 1$, $c < c^*(p)$ 时波前解 $\phi_c(x - ct)$ 在合适空间中的渐近稳定性. 由引理 10.4.1, 下面总是取 $w(z) = 1 + \mathrm{e}^{-az}$, 其中 $0 < a < -c$. 为得到 $\phi_c(z)$ 在指数加权空间 X_w 中的渐近稳定性, 需要研究 $L_{c,w}$ 在本质谱集外的特征值分布. 定义 $\Omega_{\delta_0} := \{\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant -\delta_0\}$, 其中 $0 < \delta_0 < \delta_a$. 若 $\lambda \in \Omega_{\delta_0}$ 是 L_c 的特征值, v_λ 为相应的特征函数, 由 $\phi_c(z)$ 在 $z = \infty$ 处的指数衰减性, 同广义 Fisher 方程非临界波速情形, 特征函数 $v_\lambda(z)$ 在 $z = \infty$ 附近仍满足指数衰减估计 (3.26). 但在 $z = -\infty$ 附近, 因行波解 $\phi_c(z)$ 为代数衰减, 与退化 Fisher 方程 (4.1) 的临界波速情形及广义

Fisher 方程非临界波速情形不同. 当 $z \to -\infty$ 时, 线性化算子 L_c 的系数仅以 $1/|z|$ 速率趋于常数, 此时对 L_c 的特征值问题: $L_c v = \lambda v$, 不能直接应用常微分方程的经典渐近理论来得到特征函数在 $z = -\infty$ 附近的渐近衰减估计. 特别是引理 10.3.10 和引理 10.3.11 的结果及证明方法不能直接应用于此情形. 因此, 对此情形不能直接得到类似于引理 10.3.11 及定理 10.3.12 的结果.

事实上, 对 $c < c^*(p)$ 的情形, 利用更弱意义下常微分方程的渐近理论, 可证特征函数在 $z = -\infty$ 附近满足下面特殊形式的衰减估计 (具体证明见 [WXY]).

引理 10.4.5 对任意固定的 $p > 1$, $c < c^*(p)$ 及 $0 < a < -c$, 存在充分小的 $\delta_0 > 0$, 若 $\lambda \in \Omega_{\delta_0} := \{\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant -\delta_0\}$ 是 L_c 的特征值, v_λ 为相应的特征函数, 则 v_λ 在 $z = -\infty$ 附近有渐近估计:

$$v_\lambda(z) \sim \phi_c'(z) \exp\left\{-\int_{z_0}^{z} \left[\frac{c}{2} + \frac{\phi_c''(s)}{\phi_c'(s)} + \sqrt{\left(\frac{c}{2} + \frac{\phi_c''(s)}{\phi_c'(s)}\right)^2 + \lambda}\,\right] \mathrm{d}s\right\}. \tag{4.15}$$

利用衰减估计 (3.26) 和 (4.15), 可以验证引理 10.3.11 的结果仍成立, 且定理 10.3.12 的证明仍适用此情形. 于是定理 10.3.12 的结果对 $p > 1$, $c < c^*(p)$, $0 < a < -c$ 情形仍成立, 即有

定理 10.4.6 对任意固定的 $p > 1$, $c < c^*(p)$ 及 $0 < a < -c$, 存在充分小的 $\sigma_0 > 0$, 使得

$$\sup \mathrm{Re}\,(\sigma_p(L_{c,w})) \leqslant -\sigma_0.$$

结合定理 10.4.6 与引理 10.4.1, 由解析半群理论可直接得到 $L_{c,w}$ 在 X_w 上生成的解析半群 $T(t) = \mathrm{e}^{L_{c,w}t}$ 在 $X_w \to X_w$ 范数意义下的渐近指数衰减性 (波前解在 X_w 空间中的线性指数稳定性).

定理 10.4.7 对任意固定的 $p > 1$, $c < c^*(p)$ 及 $0 < a < -c$, 波前解 $\phi_c(z)$ 在 $X_w = C_{\mathrm{unif},w}(\mathbb{R})$ 中为局部渐近指数稳定.

证明 当 $p \geqslant 2$ 时, 根据引理 10.4.1, 定理 10.4.6 及 $f(u) = u^p(1-u) \in C^2(\mathbb{R})$, 利用行波解的渐近稳定性理论, 定理 10.4.7 对 $p \geqslant 2$ 情形自然成立.

对 $1 < p < 2$ 的情形, 利用引理 10.4.1 和定理 10.4.6, 仍有行波解在 X_w 中的线性指数稳定性. 同前面对临界波速情形的讨论, 对 $c < c^*(p)$, $1 < p < 2$ 的情形, 估计式 (4.9) 仍成立, 即有

$$\|g(v, \phi_c)\|_{X_w} \leqslant C\|v\|_{X_w}^p, \quad \text{当 } \|v\|_{X_w} \text{ 充分小}, \quad 1 < p < 2, \tag{4.16}$$

其中 $g(v) = F(\phi_c + v)) - F(\phi_c) - F'(\phi_c)v$, $F(u) = u^p(1-u)$.

根据估计式 (4.16), 可直接应用解析半群的平衡解渐近稳定性理论 (见定理 9.6.2) 得到非线性方程 (4.4) 的平衡解 $\phi_c(z)$ 在 X_w 空间中的局部渐近指数稳定性. 定理 10.4.7 得证.

注 4.1　对临界及非临界波速情形, 若取代数加权空间, 其中权函数在 $z=-\infty$ 附近为代数增长. 通过更细致的谱分析, 更细致的半群衰减估计及应用 Evans 函数法, 可证当初值为行波解在合适的代数加权空间中的小扰动时, 解在相应的低阶代数加权空间中以代数衰减率趋于波前解, 详细结果及证明可见 [WX, WXY].

10.5 评　注

行波解出现在大量的生物、物理、化学及流体力学模型中, 特别是多种类型的反应扩散方程 (组) 的行波解、粘性守恒律方程 (组) 的粘性冲击波及哈密顿系统孤立波的存在性、稳定性, 近二十年来已被广泛而深入地进行了研究, 并已形成了一些系统的理论和研究方法. 最初仅用于研究反应扩散方程组行波解稳定性的谱方法及相关的 Evans 函数法, 近年来也被推广并被广泛应用于粘性守恒律方程组、抛物双曲耦合方程组及哈密顿系统行波解的稳定性的研究, 并取得一些重要的成果. 这里仅介绍用于研究反应扩散方程波前解及脉冲解稳定性的几种常用研究方法. 除谱方法外, 还有上下解方法、能量法或称 Lyapunov 函数法.

1. *上下解方法在反应扩散方程行波解的稳定性中的应用*

1977 年 Fife 和 Mcleod [FM1] 通过构造与行波解有关的特殊形式的上下解并结合 Lyapunov 函数法, 得到了双稳态方程具唯一波速的行波解的全局渐近指数稳定性 (见定理 10.3.4), 并利用上下解方法研究了当初值具紧支集时解的渐近性. 1997 年 X.F.Chen [Che] 在 Fife 等研究工作的基础上, 通过构造具有指数衰减性及具有更细致结构的上下解, 直接利用上下解方法及移动平面法 (不需谱方法及 Lyapunov 函数法), 证明了一类抽象的带非局部项的反应扩散方程具唯一波速的行波解的全局指数稳定性, 其中双稳态方程具唯一波速的行波解的全局渐近指数稳定性也可由他的证明方法和结果得到. 在 [WX] 中基于 [FM1] 中的上下解的构造思想, 通过构造特殊形式的上下解并结合谱方法, 证明了退化 Fisher 方程的具临界波速的行波解在指数加权空间中的全局稳定性 (见定理 10.4.4). 对双退化 Fisher 方程 $u_t=u_{xx}+u^p(1-u)^q$, 其中 $p,q>1$, 在 [HL] 中通过构造特殊的上下解直接得到具临界波速的行波解的某种全局渐近稳定性. 与 10.4 节研究的退化 Fisher 方程情形不同, 双退化 Fisher 方程的具临界波速的行波解 $v_c(z)$ 在 $v=1$ 附近为代数衰减. 近十年来, 上下解方法还被广泛应用于多种类型的带时滞及非局部项的反应扩散方程的行波解的稳定性研究中, 并已有大量的研究成果.

2. *半群方法及能量法在粘性守恒律方程的粘性冲击波的稳定性中的应用*

对粘性守恒律方程及方程组 (带非线性对流项的反应扩散方程)

$$u_t+f(u)_x=\varepsilon u_{xx},\quad \varepsilon>0,$$

1972 年 Sattinger[Sa3] 利用半群及谱方法对单个粘性守恒律方程证明了粘性冲击波 $\phi_c\left(\dfrac{x-ct}{\varepsilon}\right)$ 在适当指数加权空间中局部渐近指数稳定性. 1993 年 Jones, Gardner 和 Kapitula [JGK] 利用谱方法、Evans 函数法及细致的半群衰减估计对单个粘性守恒律方程证明了粘性冲击波 $\phi_c\left(\dfrac{x-ct}{\varepsilon}\right)$ 在适当代数加权空间中的局部渐近稳定性.

事实上, 除可利用谱方法研究粘性守恒律方程的波的稳定性外, 研究此类方程的另一重要及常用的研究方法是能量法. 早在 1957 年 Oleinik 对 $f''(u)>0$ 情形利用能量法和极值原理对单个粘性守恒律方程证明了当初值为某粘性冲击波在指数加权空间 (或代数加权空间) 的小扰动时, 解将指数 (或渐近) 趋于该粘性冲击波. 1986 年 Goodman[Go] 对一类抽象粘性守恒律方程 (组) 建立了更一般的能量法研究框架, 得到在更弱初值条件下具小强度的粘性冲击波的局部渐近稳定性. 1994 年 Matsumura 和 Nishihara[MN] 对单个粘性守衡律方程, 当 $f(u)$ 为非凸、波强度无小性假设及波为代数衰减情形, 利用加权能量方法得到了粘性冲击波的局部渐近稳定性及代数衰减率.

能量方法及加权能量方法近十年来已被广泛应用于多种类型的双曲守恒律方程 (组) 的粘性冲击波的渐近稳定性研究中.

3. *谱方法及 Evans 函数法在多种类型的非线性发展方程 (组) 的行波解稳定性中的应用*

在利用谱方法及波的线性稳定理论研究行波的渐近稳定性中, 最关键也是最困难的谱分析是得到线性化算子的具非负实部孤立特征值的分布及零特征值的代数重数. 特别是对耦合的反应扩散方程组, 因其线性化算子为变系数的矩阵微分算子, 一般无法像单个方程那样利用特殊的变换将线性化算子转化为自共轭算子, 进而证明非负特征值为实的. 也无法利用常数变易法或 Sturm-Liouville 定理直接得到变系数的矩阵微分算子零特征值的几何重数、代数重数及其他具非负实部的特征值的存在或不存在性.

1972—1973 年, Evans [E1]—[E4] 为研究一类神经传导方程组脉冲波解的稳定性, 建立了脉冲波解的线性稳定性理论及 Evans 函数方法, 在一定假设下, 把求本质谱外线性化算子 L_c 的孤立特征值的个数转化为求一复解析函数 (Evans 函数)$D(\lambda)$ 的零点个数, 且给出下面的结论:

$\{\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant-\delta\}$ (某 $\delta>0$) 中 L_c 特征值个数 (包括代数重数在内) 等于 Evans 函数 $D(\lambda)$ 在其上零点个数 (包括代数重数在内).

基于 Evans 建立的稳定性理论及 Evans 函数方法, 1984 年 Jones [J] 具体研究

了 F-N 方程脉冲波解的稳定性, 并推广了 Evans 函数的定义, 建立了特征值个数 (含代数重数) 与 Evans 函数零点个数 (含代数重数)、闭曲线上 Evans 函数的旋转数的相等关系, 并证明了脉冲波解的稳定性.

1990 年 Alexsander, Gardner 和 Jones [AGJ] 对经典半线性反应扩散方程组, 对空间指数衰减的行波解在更弱条件下推广了 Evans 函数的定义, 并建立了本质谱外特征值个数与复解析 Evans 函数的零点个数、闭曲线上 Evans 函数的旋转数及不稳定解流形对应的某复向量丛的第一 Chern 数的相等关系的抽象理论. 1990 年 Gardner 和 Jones [GJ] 利用此抽象理论, 建立拓扑指标研究法, 对一类带小参数的捕食模型, 证明了具内边界层的行波解的稳定性. 2005 年吴雅萍和赵学志 [WZ] 把 [GJ] 中建立的拓扑指标法应用于更一般的拟线性交错扩散方程组, 并改进了 [GJ] 中的相关拓扑等价性抽象证明, 证明了一类拟线性交错扩散方程组的具内边界层的行波解的稳定性.

1992 年, Pego 和 Weinstein [PW] 对更一般的特征值问题

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi} = A(\lambda, \xi)\psi, \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \tag{5.1}$$

当 $A(\lambda, \xi) \to A(\lambda, \pm\infty)$ 满足一定衰减假设 (比 [AGJ] 中指数衰减的假设弱), 使得

$$\int_{\pm z_0}^{\pm\infty} |A(\lambda, \xi) - A(\lambda, \pm\infty)|\mathrm{d}\xi < \infty, \tag{5.2}$$

及在更一般的波的稳定性意义上 (可在指数加权空间中) 推广了 [E4] 中的具共轭形式的 Evans 函数 $D(\lambda)$ 的定义, 并给出了 $D'(0)$ 的表达式. 进而利用共轭 Evans 函数的性质和估计, 研究了一些哈密顿系统孤立波的线性稳定性及孤立波在某类指数加权空间中的局部渐近指数稳定性.

1993 年, Jones, Gardner 和 Kapitula [JGK] 利用 Evans 函数法还研究了一带非凸对流项的粘性守恒律方程行波解的代数渐近稳定性, 把 Evans 函数推广到本质谱边界. 1997 年以来, Gardner 和 Zumbrun [GZ] 把 Evans 函数法推广到粘性守恒律方程组的粘性冲击波研究中, 定义了更一般的 Evans 函数并得到相关 Evans 函数在本质谱内的延拓及特征. 近年来, Zumbrun 和 Howard [ZH] 等把 Evans 函数法与 Green 函数法、逐点半群估计相结合, 提出一新的研究框架, 研究了一些粘性守恒律方程组及抛物双曲耦合方程的各种粘性冲击波的线性稳定性、不稳定性及更一般的渐近稳定性. 文献 [LtW] 利用连续半群的行波稳定性理论及细致的谱分析, 对一类带松弛的拟线性双曲方程组得到了非弱强度波的局部指数稳定性.

当行波解为空间慢代数衰减时, 如退化及双退化 Fisher 方程的具非临界波速的行波解和一些粘性守恒律方程 (组) 的退化粘性冲击波解情形, 此时 [AGJ] 及 [PW] 中给出的 Evans 函数方法不能直接应用. 文献 [HZ][LW][WXY] 中分别对这些代数

衰减波, 利用改进的 Evans 函数法、细致的谱分析及特殊的半群衰减估计, 得到了行波解在某些特殊函数空间中的局部渐近稳定性. 谱方法及 Evans 函数法近年来还被推广应用于离散偏微分方程的离散波及反应扩散方程的周期行波解和高维波前解的稳定性研究中.

习　题　十

在下面的 10.1—10.7 题中考察粘性 Burgers 方程

$$u_t + uu_x = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \tag{I}$$

设 $u(x,t) = \phi_c(x-ct)$ 为粘性 Burgers 方程的满足 $\phi_c(-\infty) = u_-$, $\phi_c(\infty) = u_+$, $\phi(0) = 1/2$ 的唯一波前解, 其中 c, u_-, u_+ 满足 R-H 条件: $c = \dfrac{u_- + u_+}{2}$.

10.1 试证明方程 (I) 在动坐标系 (z,t) $(z = x - ct)$ 下关于 $\phi_c(z)$ 的线性化方程为

$$v_t = cv_z + (\phi_c v)_z + v_{zz}.$$

10.2 定义算子:

$$L_c = c\frac{\partial}{\partial z} + \phi_c(z)\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \phi_c'(z) : C^2_{\text{unif}}(\mathbb{R}) \to C_{\text{unif}}(\mathbb{R}), \tag{II}$$

(1) 试证明:

$$\sigma_{\text{ess}}(L_c) \setminus \{0\} \subset \{\text{Re}\,\lambda < 0\}, \quad 0 \in \sigma_{\text{ess}}(L_c).$$

(2) 试画出描述 $\sigma_{\text{ess}}(L_c)$ 边界的曲线.

10.3 设 L_c 为 (II) 中定义的算子.

(1) 假设 λ 为 L_c 在 $\{\text{Re}\lambda \geqslant 0\} \setminus \{0\}$ 中的特征值, 试证明其在 $C^2_{\text{unif}}(\mathbb{R})$ 中的特征函数在 $\pm\infty$ 必为指数衰减, 并求出其指数衰减率.

(2) 试证明 L_c 在 $\{\text{Re}\,\lambda \geqslant 0\}$ 中的特征值必为实的.

10.4 对 (II) 中定义的算子 L_c, 利用变换 (3.28) 证明 0 是 L_c 的几何重数为 1 的特征值.

10.5 选取指数加权空间 $X^k_\alpha = \{v(z) \in C^k_{\text{unif}}(\mathbb{R}) : v(z)\,(\mathrm{e}^{\alpha z} + \mathrm{e}^{-\alpha z}) \in C^k_{\text{unif}}(\mathbb{R})\}$, 其中 α 为正常数, k 为非负整数. 定义

$$L^\alpha_c = c\frac{\partial}{\partial z} + \phi_c(z)\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \phi_c'(z) : X^2_\alpha \to X^0_\alpha.$$

试证明对任意固定的 $\alpha \in (0,c)$, 存在 $\delta_\alpha > 0$, 使得算子 L^α_c 满足

$$\sigma_{\text{ess}}(L^\alpha_c) \subset \{\text{Re}\,\lambda < -\delta_\alpha\}.$$

10.6 对任意固定的 $\alpha \in (0, c)$, 算子 L_c^α 的定义同题 10.5, 试证明:

(1) 存在 $\delta_1 > 0$, 使得 L_c^α 在 $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant -\delta_1\}$ 中的特征值均为实的;

(2) 0 是 L_c^α 的代数重数为 1 的特征值;

(3) 存在 $\delta_0 > 0$, 使得 L_c^α 在 $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant -\delta_0\}$ 中除 0 外没有其他特征值.

10.7 考虑方程 (I) 的初值问题. 当初值 $u(x, 0) = u_0(x)$ 满足 $u_0 \in C_{\mathrm{unif}}(\mathbb{R})$ 且当 $z \to \pm\infty$ 时指数趋于 $u_\pm$, 其中 $u_- > u_+$.

(1) 试证明存在唯一 $z_0 \in \mathbb{R}$, 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u_0(x) - \phi_c(x + z_0))\,\mathrm{d}x = 0.$$

(2) 记 $u(z, t)$ 为初值问题 (1) 在动坐标系下 (z, t) $(z = x - ct)$ 的解, 证明 $u(z, t)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u(z, t) - \phi_c(z + z_0))\mathrm{d}z = 0, \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

(3) 利用 (2) 及 10.6 题的结果证明: 存在 $0 < \alpha < c$, 使当 $\|u_0 - \phi_c\|_{X_\alpha^0}$ 充分小时, 有

$$\lim_{t\to\infty} \|u(z, t) - \phi_c(z + z_0)\|_{X_\alpha^0} \to 0 \text{ (指数收敛)},$$

其中 z_0 满足 (1).

附录　常微分方程准备知识

设 $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$. 形为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(u, x, t)$$

的反应扩散方程与常微分方程有密切联系, 其中

$$D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_m)$$

为正对角矩阵. 这类方程中的有些问题可以直接转化为常微分方程的有关问题, 而有些问题则可以用常微分方程的方法与有关结果来研究. 就抽象理论来看, 这类方程的定解问题可化为 Banach 空间中的微分方程, 它的理论与分析方法类似于常微分方程相应的理论和分析方法. 这里我们简单陈述常微分方程的基本理论和方法. 本附录的内容及证明可参见 [MM], [Zh].

1　基 本 定 理

1.1　初值问题解的存在性与唯一性

设 t 是实变量, x 是 n 维向量, G 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的开区域, 其元素记为 (x,t). 函数 $f: G \to \mathbb{R}^n$ 至少是连续的, $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. 又记 $\mathbb{R}^n$ 中的模为 $|\cdot|$, 零向量为 θ.

考察常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{I}$$

其中 $(x_0, t_0) \in G$.

定理 1.1 (存在性定理)　设 $(x_0, t_0) \in G$, $f \in C(G)$, $R = \{(x,t) : |x - x_0| \leqslant a, |t - t_0| \leqslant b\}$ 是 G 中的闭长方体, 则问题 (I) 至少存在一个解 $x = x(t)$ 定义在区间$J = [t_0 - h, t_0 + h]$ 上, 其中 $h = \min\left(b, \dfrac{a}{M}\right)$, $M = \max\limits_R |f(x,t)|$.

定义 1.2　若对 G 内任意有界闭区域 U, 存在常数 L_U 使得当 $(x,t), (y,t) \in U$ 时, 有

$$|f(x,t) - f(y,t)| \leqslant L_U |x - y|,$$

则称 $f(x,t)$ 在 G 内对 x 是局部 Lipschitz 的.

显然, 若 $f \in C^1(G)$, 则 f 在 G 内对 x 是局部 Lipschitz 的.

定理 1.3 (存在唯一性定理)　在定理 1.1 的条件下, 又若 f 在 G 内对 x 是局部 Lipschitz 的, 则问题 (I) 的解在 $|t-t_0| \leqslant h$ 上存在而且唯一. 这里的 h 如定理 1.1 所给出.

1.2　解的延拓

下面的定理给出了问题 (I) 解的最大存在区间.

定理 1.4 (解的延拓定理)　设 $(x_0,t_0) \in G$, $f \in C(G)$. 若 $x(t)$ 是问题 (I) 在 $|t-t_0| \leqslant \alpha$ 上的解, 则存在 $x(t)$ 的延拓 $\hat{x}(t)$, 其最大存在区间是开区间, 记为 (α,β). 同时, 当 $t \searrow \alpha$ 和 $t \nearrow \beta$ 时, $(\hat{x}(t),t)$ 趋于 G 的边界 (若 G 无边界, 则 $|t|+|\hat{x}(t)| \to \infty$).

什么时候能保证问题 (I) 的解定义在区间 $[t_0,\infty)$ (或 $(-\infty,\infty)$) 上呢?

定理 1.5　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开区域, $x_0 \in \Omega$, $f \in C(\Omega \times [t_0,\infty))$, K 是 Ω 内的有界闭集. 若 $x(t)$ 是问题 (I) 的解并且

$$\{x(t): t \geqslant t_0,\ t\text{属于解的存在区间}\} \subset K,$$

则解 $x(t)$ 定义在区间 $[t_0,\infty)$ 上.

推论 1.6　设 $f(x,t) \in C(\mathbb{R}^n \times [t_0,\infty))$. 若存在常数 $M>0$, 使得问题 (I) 的解 $x(t)$ 在 $t \geqslant t_0$ 的存在区间上有

$$|x(t)| \leqslant M,$$

那么解 $x(t)$ 定义在区间 $[t_0,\infty)$ 上.

1.3　解的连续性与可微性

把问题 (I) 的解记为 $x(t;t_0,x_0)$, 作为 t,t_0,x_0 的函数讨论它的连续性与可微性. 假设:

$(\mathrm{H_1})$ $f \in C(G)$, 在 G 内 f 对 x 局部 Lipschitz.

$(\mathrm{H_2})$ $\varphi(t)$ 是方程 $\dot{x}=f(x,t)$ 在某区间 $J_0=[a_0,b_0]$ 上的一个解, 因而 $t \in J_0$ 时 $(\varphi(t),t) \in G$.

定理 1.7　设条件 $(\mathrm{H_1})$ 和 $(\mathrm{H_2})$ 成立, 则

(1) 存在 $\delta>0$, 使得对任意 $(x_0,t_0) \in W := \{(x_0,t_0): a_0<t_0<b_0, |x_0-\varphi(t_0)|<\delta\}$, 问题 (I) 在 J_0 存在唯一解 $x(t;t_0,x_0)$.

(2) 对任意 (x_0,t_0), $(\tilde{x}_0,\tilde{t}_0) \in W$, 有

$$|x(t;t_0,x_0)-x(t;\tilde{t}_0.\tilde{x}_0)| \leqslant \big(|x_0-\tilde{x}_0|+M_0|t_0-\tilde{t}_0|\big)\mathrm{e}^{L_0(b_0-a_0)}, \quad \forall\, t \in J_0,$$

其中 M_0, L_0 为常数.

(3) $x(t;t_0,x_0) \in C(V)$, 其中

$$V := \{a_0 < t < b_0, (x_0,t_0) \in W\}.$$

再假设

(H_3) $f_x \in C(G)$.

定理 1.8 设 (H_1)—(H_3) 成立, 则问题 (I) 的解 $x(t;t_0,x_0) \in C^1(V)$, 且 $y = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_0}x(t;t_0,x_0)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \dot{y} = f_x(x(t;t_0,x_0),t)y, \\ y|_{t=t_0} = -f(x_0,t_0) \end{cases}$$

的解, 而 $Z(t;t_0,x_0) = D_{x_0}x(t;t_0,x_0)$ ($x(t;t_0,x_0)$ 对 x_0 的导数, 是一个矩阵) 是矩阵方程的初值问题

$$\begin{cases} \dot{Z} = f_x(x(t;t_0,x_0),t)Z, \\ Z|_{t=t_0} = I_n \end{cases}$$

的解, 其中 I_n 是 $n \times n$ 单位矩阵.

现在考察含参数向量 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)$ 的常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t,\mu), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{I_μ}$$

问题 (I_μ) 的解记为 $x(t;t_0,x_0,\mu)$, 作为 (t,t_0,x_0,μ) 的函数, 下面讨论 $x(t;t_0,x_0,\mu)$ 的连续性与可微性.

假设:

(H_{μ_1}) J_μ 是 k 维 μ 空间中的开区域, $G_\mu = G \times J_\mu, f \in C(G_\mu)$, 在 G_μ 内 f 对 x 是局部 Lipschitz 的, 并且 Lipschitz 常数与 $\mu \in J_\mu$ 无关.

(H_{μ_2}) 当 $\mu = \mu_0 \in J_\mu$ 时, $\varphi(t)$ 是方程 $\dot{x} = f(x,t,\mu_0)$ 在某区间 $J_0 = [a_0, b_0]$ 上的解. 因而当 $t \in J_0$ 时 $(\varphi(t), t, \mu_0) \in G_{\mu 0}$.

定理 1.9 设条件 (H_{μ_1}) 和 (H_{μ_2}) 成立, 则存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $(x_0,t_0,\mu) \in W_\mu := \{a_0 < t_0 < b_0, |x_0 - \varphi(t_0)| < \delta, |\mu - \mu_0| < \delta\}$, 问题 (I_μ) 在 J_0 上存在唯一解 $x(t;t_0,x_0,\mu)$, 并且 $x(t;t_0,x_0,\mu) \in C(V_\mu)$, 其中 $V_\mu := \{a_0 < t < b_0, (x_0,t_0,\mu) \in W\mu\}$.

现在用下面的 $(\mathrm{H}'_{\mu 1})$ 代替 $(\mathrm{H}_{\mu 1})$.

$(\mathrm{H}'_{\mu 1})$ f, f_x, f_μ 均属于 $C(G_\mu)$.

定理 1.10　设条件 $(H'_{\mu 1})$ 和 $(H_{\mu 2})$ 成立. 那么问题 (I_μ) 的解 $x(t;t_0,x_0,\mu)\in C^1(V)$, 且 $D_\mu x(t;t_0,x_0,\mu)=Y(t;t_0,x_0,\mu)$ 是矩阵方程初值问题

$$\begin{cases} \dot{Y}=f_x(x(t;t_0,x_0,\mu),t,\mu)\cdot Y+f_\mu(x(t;t_0,x_0,\mu),t,\mu), & t\in J_0 \\ Y|_{t=t_0}=O_k \end{cases}$$

的解, 其中 O_k 是 $k\times k$ 的零矩阵.

最后考察解对右端函数的连续性. 设有初值问题

$$\begin{cases} \dot{x}=f_m(x,t), \\ x(t_0)=x_m, \\ m=1,2,\cdots. \end{cases} \tag{I^m}$$

定理 1.11　设 $f,f_m\in C(G)$, (x_0,t_0), $(x_m,t_0)\in$ G, $x_m\to x_0$ 且 $f_m\to f$ 在 G 的紧子集上一致成立. 若 $x_m(t)$ 是问题 (I^m) 定义在 J_m 上不可延拓的解, 则存在子序列 $\{m_j\}$ 和问题 (I) 定义在 J_0 上不可延拓的解 $x(t)$, 使得

(1) J_0 包含 t_0, 并且 $\liminf\limits_{j\to\infty} J_{m_j}\supset J_0$①;

(2) 当 $j\to\infty$ 时, $x_{m_j}(t)\to x(t)$ 在 J_0 的紧子区间上一致成立.

此外, 若问题 (I) 的解是唯一的, 则当 $m\to\infty$ 时, $x_m(t)\to x(t)$ 在 J_0 的紧子区间上一致成立.

1.4　线性方程

一类非常特殊但又非常重要的方程组是线性方程组:

$$\begin{cases} \dot{x}_1=a_{11}(t)x_1+\cdots+a_{1n}(t)\,x_n+f_1(t), \\ \qquad\cdots\cdots \\ \dot{x}_i=a_{i1}(t)x_1+\cdots+a_{in}(t)\,x_n+f_i(t), \\ \qquad\cdots\cdots \\ \dot{x}_n=a_{n1}(t)x_1+\cdots+a_{nn}(t)\,x_n+f_n(t), \end{cases}$$

它又可写成

$$\dot{x}=A(t)x+f(x) \tag{II}$$

的形式, 其中 $A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$ 是 $n\times n$ 矩阵函数,

$$x=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad f(t)=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

① lim inf 是下极限记号.

当 $f(t)$ 是非零向量时, 方程 (II) 是线性非齐次方程. 当 $f(t)$ 是零向量时, 方程 (II) 是线性齐次方程

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{II$_0$}$$

总是假定: $a_{ij}(t), f(t) \in C(J)$, J 是某个区间.

定理 1.12 对任意 $t_0 \in J$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 初值问题

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad x(t_0) = x_0$$

存在唯一解, 其定义域也是 J.

定理 1.13 对任意 $t, \tau \in J$, 设 $\Phi(t,\tau)$ 是 (II$_0$) 的基本解矩阵, 满足 $\Phi(\tau,\tau) = I_n$, 则

(1) 对任意 t, σ, τ 有

$$\Phi(t,\tau) = \Psi(t)\Psi^{-1}(\tau), \quad \Phi(t,\tau) = \Phi(t,\sigma)\cdot\Phi(\sigma,\tau), \quad \Phi^{-1}(t,\tau) = \Phi(\tau,t),$$

其中 $\Psi(t)$ 是方程 (II$_0$) 的任一基本解矩阵.

(2) 初值问题

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0$$

的唯一解可表示为

$$x(t;t_0,x_0) = \Phi(t,t_0)x_0, \quad t \in J.$$

(3) 初值问题

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad x(t_0) = x_0$$

的唯一解可表示为

$$x(t;t_0,x_0) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)f(\tau)\mathrm{d}x, \quad t \in J.$$

当 $A(t)$ 为常数矩阵时, 得到常系数方程

$$\dot{x} = Ax,$$

其中 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是常数矩阵.

受 e^a 的级数展开式的启发, 引进矩阵 e^A. 为此, 考察矩阵序列

$$T_m = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^m}{m!}.$$

易知, 该矩阵序列是收敛的, 记

$$\mathrm{e}^A = \lim_{m\to\infty}\left(I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^m}{m!}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{A^m}{m!}.$$

定理 1.14　设 A 是 $n\times n$ 常数矩阵, 则

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{e}^{At}=A\mathrm{e}^{At}=\mathrm{e}^{At}A$.

(2) 初值问题

$$\dot{x}=Ax,\quad x(t_0)=x_0$$

的唯一解是

$$x=\mathrm{e}^{A(t-t_0)}x_0.$$

定理 1.15　设 A,B 是 $n\times n$ 常数矩阵.

(1) 若 A,B 相似, 即 $A=PBP^{-1}$, 则 $\mathrm{e}^A=P\mathrm{e}^BP^{-1}$.

(2) 若 A,B 可交换, 即 $AB=BA$, 则 $\mathrm{e}^{A+B}=\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B=\mathrm{e}^B\mathrm{e}^A$.

(3) e^A 有逆矩阵 $(\mathrm{e}^A)^{-1}=\mathrm{e}^{-A}$.

(4) $(\mathrm{e}^A)^T=\mathrm{e}^{A^T}$.

(5) $\det\mathrm{e}^A=\mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$, $\mathrm{tr}A$ 为 A 的迹.

下面介绍如何求 e^{tA}. 设 A 的标准形是 $\hat{J}$, 并假定 P 是非奇异常数矩阵, 使得 $A=P\hat{J}P^{-1}$, 则

$$\mathrm{e}^{tA}=P\mathrm{e}^{t\hat{J}}P^{-1},$$

而 $\hat{J}$ 有如下形式

$$\hat{J}=\begin{pmatrix} J_0 & & 0 \\ & J_1 & \\ 0 & & J_s \end{pmatrix},$$

其中 J_0 是对角矩阵, 对角线上的元素是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_q$,

$$J_i=\begin{pmatrix} \lambda_{q+i} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{q+i} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{q+i} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{q+i} \end{pmatrix},\quad i=1,2,\cdots,s.$$

容易证明

$$\mathrm{e}^{t\hat{J}}=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{tJ_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{tJ_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{tJ_s} \end{pmatrix},$$

$$
e^{tJ_0} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{t\lambda_q} \end{pmatrix}.
$$

因为 $J_i = \lambda_{q+i} I_{ri} + Z_i$, 其中 I_{ri} 是 $r_i \times r_i$ 单位矩阵,

$$
Z_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

是 $r_i \times r_i$ 矩阵, 所以

$$
e^{tJi} = e^{t\lambda_{q+i}} e^{tZi} = e^{t\lambda_{q+i}} \begin{pmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2!} & \cdots & \dfrac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \dfrac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.
$$

由 e^A 的上述表达式可得

定理 1.16 λ 是 A 的特征值的充要条件是 e^λ 是 e^A 的特征值.

2 常微分方程的比较原理

本节先讨论常微分方程的初值问题

$$
\begin{cases} \dot{x} = f(x,t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{I^1}
$$

其中 $x, f(x,t) \in \mathbb{R}$. 这时 G 是 (x,t) 平面中的开区域. 然后再讨论常微分方程组 (I^1).

2.1 方程式的最大解与最小解

设 $f \in C(G)$, $(x_0,t_0) \in G$, 若问题 (I^1) 的解不唯一, 证明其中必有一个最大解和一个最小解.

定义 2.1 设 $\varphi_M(t)$ 和 $\varphi_m(t)$ 均是问题 (I^1) 定义在 (a,b) 上的解. 若对问题 (I^1) 定义在 (a,b) 的任意其他解 $x(t)$ 都有

$$\varphi_m(t) \leqslant x(t) \leqslant \varphi_M(t), \quad t \in (a,b),$$

则分别称 φ_M 和 φ_m 为问题 (I^1) 在 (a,b) 上的最大解和最小解.

如果最大、最小解存在, 则它们必然唯一.

考察辅助初值问题

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) + \varepsilon, \\ x(t_0) = x_0 + \varepsilon, \end{cases} \tag{I^1_ε}$$

其中 $\varepsilon \geqslant 0$. 记问题 $(\mathrm{I}^1_\varepsilon)$ 的解为 $x(t,\varepsilon)$, 它向右是不可延拓的.

定理 2.2 设 $f \in C(G)$, $(x_0,t_0) \in G$, $\varepsilon \geqslant 0$ 充分小.

(1) 若 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, 则当 $t \geqslant t_0$ 且属于二者的共同存在区间时, 有 $x(t,\varepsilon_1) > x(t,\varepsilon_2)$;

(2) 存在常数 β 和问题 (I^1) 的解 $x^*(t)$ 定义在 $[t_0,\beta)$ 上且向右是不可延拓的, 使得

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} x(t,\varepsilon) = x^*(t)$$

对 t 在 $[t_0,\beta)$ 的任意紧子区间上一致成立;

(3) x^* 是问题 (I^1) 的最大解.

2.2 微分不等式与微分方程式的解的比较

分别以 $\bar{D}^+x(t)$, $\underline{D}^+x(t)$ 表示函数 $x(t)$ 在 t 处的右上导数和右下导数:

$$\bar{D}^+x(t) = \limsup_{h\to 0_+} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}\text{①}, \quad \underline{D}^+x(t) = \liminf_{h\to 0_+} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}.$$

类似地可定义 $x(t)$ 在 t 的左上导数和左下导数.

现在考察微分不等式

$$\bar{D}^+x(t) \leqslant f(x(t),t). \tag{2.1}$$

若 $x(t)$ 连续并满足 (2.1), 则称 $x(t)$ 是 (2.1) 的解. 现建立微分不等式 (2.1) 的解与微分方程初值问题 (I^1) 的解之间的比较定理.

定理 2.3 设 $f \in C(G)$, $(x_0,t_0) \in G$, $x(t)$ 是 (2.1) 的解, $x(t_0) \leqslant x_0$, $\varphi_M(t)$ 是 (I^1) 的最大解. 又设

$$J = \{t: t \geqslant t_0,\ t \text{ 属于 } x(t) \text{ 与 } \varphi_M(t) \text{ 的共同存在区间}\},$$

则有

$$x(t) \leqslant \varphi_M(t), \quad t \in J.$$

① lim sup 是上极限记号.

2.3 方程组解的模估计

定理 2.4 设 $f \in C(G)$, $(x_0, t_0) \in G$, $x(t)$ 是 (I^1) 的解. 又设 $F(x,t)$ 是二元连续函数, 满足

$$|f(x,t)| \leqslant F(|x|, t), \quad (x,t) \in G.$$

若 $|x(t_0)| \leqslant v_0, \varphi_M(t)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \dot{v} = F(v,t), \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$$

的最大解, 则在共同的存在区间上

$$|x(t)| \leqslant \varphi_M(t).$$

2.4 方程组的比较原理

定义 2.5 设 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$. 若 $a_i < b_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则称 $a < b$; 若 $a_i \leqslant b_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则称 $a \leqslant b$.

先讨论问题 (I) 解的正性问题. 记 $\mathbb{R}^n_+ = \{x : x = (x_1, \cdots, x_n),\ x > \theta$ 即 $x_1 > 0, \cdots, x_n > 0\}$. 假定 $f(x,t)$ 在 $\bar{\mathbb{R}}^n_+ \times \bar{\mathbb{R}}_+$ 上连续, 对 x 有连续导数, 因而初值问题

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x(0) = x_0 \tag{2.2}$$

的解 $x(t; x_0)$ 存在唯一, 其最大存在区间记为 $J = [0, \Delta)$, 其中 $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}^n_+$.

定理 2.6 假设 $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}^n_+$, 且当 $(x,t) \in \bar{\mathbb{R}}^n_+ \times \bar{\mathbb{R}}_+$ 时,

$$f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_n, t) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

则 $x(t; x_0) \geqslant \theta$, $t \in J$.

定理 2.7 记 $a = (a_1, \cdots, a_n)$, $b = (b_1, \cdots, b_n)$, $\Sigma_a^b = \{x : a < x < b\}$. 设 $(x,t) \in \bar{\Sigma}_a^b \times \bar{\mathbb{R}}_+$ 时 $f(x,t)$ 连续, 对 x 有连续导数且 f 的每个分量都满足

$$\begin{cases} f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \cdots, x_n, t) \geqslant 0 \\ f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \cdots, x_n, t) \leqslant 0, \\ i = 1, 2, \cdots n. \end{cases}$$

如果 $x_0 \in \bar{\Sigma}_a^b$, 则 $x(t, x_0) \in \bar{\Sigma}_a^b (t \in J)$.

定义 2.8 称函数 $\varphi(x,t) = (\varphi_1(x,t), \cdots, \varphi_n(x,t))$ 在区域 $\Omega \times J$ 内对 x 是拟单调不减的, 若对任意 $\xi, \eta \in \Omega, t \in J$, 由 $\xi_j \leqslant \eta_j$ $(j \neq i)$ 可推出

$$\varphi_i(\xi) \leqslant \varphi_i(\eta)|_{\eta_i = \xi_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

定理 2.9　设 $U(t), V(t) \in C^1[0,T]$ 满足

$$\begin{aligned} &V(t) \leqslant U(t), \\ &\dot{U}(t) \geqslant f(U(t),t), \\ &\dot{V}(t) \leqslant f(V(t),t). \end{aligned}$$

令 $a = \min\limits_{[0,T]} V(t)$, $b = \max\limits_{[0,T]} U(t)$. 又设 $f(x,t)$ 在 $\bar{\Sigma}_a^b \times [0,T]$ 上连续, 对 x 拟单调不减且有连续的导数. 则对任意 $V(0) \leqslant x_0 \leqslant U(0)$, 问题 (2.2) 存在唯一解 $x(t;x_0)$, 且满足

$$V(t) \leqslant x(t;x_0) \leqslant U(t), \quad t \in [0,T]. \tag{2.3}$$

3　自治系统的一般性质

3.1　相空间与相轨线

设某个系统的运动状态可用 n 个量 $x_1, \cdots, x_n$ 来描述, 它满足微分方程组

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.1}$$

写成向量形式即

$$\dot{x} = f(x,t). \tag{3.1$'$}$$

$x = (x_1, \cdots, x_n)$ 在同一瞬间的值表示系统在该瞬间的运动状态, 几何上对应 n 维空间的一个点, 故把这个表示系统状态的空间称为相空间. 相空间中表示系统状态的动点称为相点, 而方程 (3.1′) 的解 $x = x(t)$ (即 $x_i = x_i(t), i = 1, 2, \cdots, n$) 称为系统的运动方程, 即相点在相空间中的运动方程. 相点的轨迹, 即

$$\{x(t) : t \text{ 属于解的存在区间}\}$$

称为 (3.1′) 的相轨线, 简称轨线. 因而 $x = x(t)$ 就是相轨线的参数方程.

3.2　自治系统轨线的简单性质

若 $f(x,t) = f(x)$, 它不依赖于 t, 则方程 (3.1′) 变成

$$\dot{x} = f(x), \tag{3.2}$$

称它为自治系统.

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开区域, $f(x)$ 在 Ω 上是局部 Lipschitz 的. 对任意 $p \in \Omega$, 方程 (3.2) 满足初值 $x(0) = p$ 的解是唯一的, 记为 $x = \varphi(p,t)$ 或 $\varphi_t(p)$, 它的最大存在区间记为 $J(p)$.

方程 (3.2) 的解及其对应的轨线有以下简单性质.

引理 3.1 若 $x(t)$ 是方程 (3.2) 的解, 定义域为 J, h 为任意实数, 则 $x(t+h)$ 也是方程 (3.2) 的解, 定义域为 $J_h=\{t: t+h\in J\}$.

引理 3.1 指出: 不同的解可以对应相同的轨线. 事实上, 若 Γ 是解 $x(t)$ 对应的轨线, 则 Γ 也是解 $x(t+h)$ 对应的轨线.

引理 3.2 设 $x(t), \tilde{x}(t)$ 都是 (3.2) 的解, 定义域分别为 J 和 $\tilde{J}$. 若存在 $t_0\in J$, $\tilde{t}_0\in\tilde{J}$, 使得 $x(t_0)=\tilde{x}(\tilde{t}_0)$, 则对任意 $t\in\tilde{J}$, 有

$$\tilde{x}(t)=x(t+t_0-\tilde{t}_0).$$

该引理指出: (1) 自治系统 (3.2) 的不同轨线不能相交; (2) 若 Γ 是自治系统 (3.2) 的解 $x(t)$ 对应的轨线, 那么 (3.2) 以 Γ 为轨线的解一定可表为 $x(t+k)$, k 为某个实数. 因为, 以 Γ 为轨线的所有解在 Γ 上 t 增加的方向是相同的. Γ 可看作是定向曲线.

由于通过每一点 $p\in\Omega$, 方程 (3.2) 的轨线是唯一的, 常用 $\Gamma(p)$ 表示.

3.3 自治系统的解确定一个动力系统

令 $W=\{(p,t): (p,t)\in\Omega\times J(p)\}$, 于是 (3.2) 的解 $x=\varphi(p,t)=\varphi_t(p)$ 定义在 W 上, 取值在 Ω 内, 即 $\varphi: W\to\Omega$.

定义 3.3 函数 $\varphi(p,t)\equiv\varphi_t(p)$ 称为系统 (3.2) 的流, 也称为 $f(x)$ 的流.

下面讨论流的性质.

定理 3.4 设 $f(x)$ 在 Ω 是局部 Lipschitz 的, 对任意 $p\in\Omega$, 有 $J(p)=(-\infty,\infty)$, 则 (3.2) 的流 $\varphi(p,t)\equiv\varphi_t(p)$ 满足:

(1) $\varphi:\Omega\times\mathbb{R}\to\Omega$ 是连续的;

(2) $\varphi_0(p)=p\quad(\forall p\in\Omega)$;

(3) 对任意实数 a,b, 有 $\varphi_{a+b}(p)=\varphi_a(\varphi_b(p))\ (\forall p\in\Omega)$.

定义 3.5 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 映射 $\varphi:\Omega\times\mathbb{R}\to\Omega$ 记为 $\varphi(x,t)\equiv\varphi_t(x)$, 它是连续的. 固定 t 时, 映射 $\varphi_t:\Omega\to\Omega$, 满足: $\varphi_0:\Omega\to\Omega$ 是恒同映射; $\varphi_t\varphi_s=\varphi_{t+s}$ 对 $\mathbb{R}$ 内一切的 t 与 s 成立, 则称 φ_t 为动力系统.

因此, 在定理 3.4 的条件下, (3.2) 的流 $\varphi_t(p)$ 确定一个动力系统.

3.4 轨线的分类

现在对自治系统的轨线进行分类.

设对任意 $p\in\Omega$, (3.2) 的解 $\varphi(p,t)$ 的定义域是 $(-\infty,\infty)$.

定义 3.6 若 $p\in\Omega$, 满足 $\varphi_t(p)=p\ (-\infty<t<\infty)$, 则称 p 为系统 (3.2) 的平衡点或奇点.

显然, p 是 (3.2) 的平衡点的充要条件是 $f(p)=\theta$. 平衡点 p 是系统的平衡状态.

关于平衡点有以下结论.

引理 3.7　没有一条异于平衡点的轨线在有限时刻会经过平衡点.

引理 3.8　若 $\lim_{t\to\infty}\varphi_t(q)=p$, 则 p 是平衡点.

若 (3.2) 的解 $\varphi_t(p)$ 是 t 的周期函数, 但 p 不是平衡点, 则称 $\varphi_t(p)$ 是 (3.2) 的非平凡周期解.

引理 3.9　$\varphi_t(p)$ 是 (3.2) 的周期解的充要条件是: 存在 $t_1\neq t_2$ 使得 $\varphi_{t_1}(p)=\varphi_{t_2}(p)$. $\varphi_t(p)$ 是非平凡周期解的充要条件是: 存在 t_1,t_2 满足上述条件, 且 $t_1<t<t_2$ 时 $\varphi_t(p)\neq\varphi_{t_1}(p)$.

非平凡周期解的轨线是闭轨. 若 $\varphi_t(p)$ 的周期为 T, 则

$$\Gamma(p)=\{\varphi_t(p): 0\leqslant t\leqslant T\}.$$

由引理 3.9 立即可得

定理 3.10　自治系统 (3.2) 的轨线必为以下三类型之一.

(1) 不封闭. 当 $t_1\neq t_2$ 时, $\varphi_{t_1}(p)\neq\varphi_{t_2}(p)$;

(2) 闭轨;

(3) 平衡点.

3.5　不变集与解的不变性

由引理 3.1 和引理 3.2 知, (3.2) 的解具有不变性: 若 $x\in\Gamma(p)$, 则 $\varphi_t(x)\in\Gamma(p)$.

定义 3.11　集合 $A\subset\mathbb{R}^n$ 称为 (3.2) 的不变集: 若 $x\in A$, 对任意 $t\in\mathbb{R}$, 有 $\varphi_t(x)\in A$. 集合 A 称为 (3.2) 的正 (负) 不变集: 若 $x\in A$, 对任意 $t>0$ $(t<0)$, 有 $\varphi_t(x)\in A$.

显然, (3.2) 的整条轨线都是不变集, 正 (负) 半轨线是正 (负) 不变集. 反之, 任意不变集都是由一些整条轨线组成的, 正 (负) 不变集是由一些正 (负) 半轨线组成的.

定理 3.12　若 A 是不变集, 则 $\bar{A}$ (A 的闭包), A° (A 的内域) 也是不变集. 若 A 是正 (负) 不变集, 则 $\bar{A},A^\circ$ 也是正 (负) 不变集.

4　平面自治系统的平衡点

4.1　概述

单位质量的质点在力 $f(x,\dot{x})$ 的作用下沿直线运动的方程是

$$\ddot{x}=f(x,\dot{x}). \tag{4.1}$$

x (位置) 和 $\dot{x}$ (速度) 的值刻画了系统在任意时刻的状态, 即系统的相. x 与 $\dot{x}$ 的平面即为相平面. 若令 $y=\dot{x}$, 则 (4.1) 等价于方程组

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x, y). \tag{4.2}$$

这是二维自治系统

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) \tag{4.3}$$

的特殊情形. 研究 (4.2) 可得到 (4.1) 解的很多性质.

二维自治系统 (4.3) 的解 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 确定了 xy 平面, 即相平面上的一条曲线, 我们将研究这些曲线在相平面上所形成的图象 —— 相图. 在相图中起重要作用的是平衡点的类型.

方程 (4.2) 的平衡点是这样的点 $(x_0, 0)$, 在该点处 $y = 0$, $f(x_0, 0) = 0$. 它相应于质点的一个运动状态, 即速度 $\dot{x}$ 及加速度 $\ddot{x}$ 为零, 表示质点是静止的不受力的作用, 因而处于平衡状态 (故称为平衡点). 系统的平衡态是最重要的状态之一, 这就是研究平衡点的原因之一.

我们将研究:

(1) 平衡点及平衡点附近的轨线分布;

(2) 平衡点稳定与否, 即靠近平衡点的质点能否保持在该点附近.

若消去时间 t, (4.3) 化成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \tag{4.4}$$

设 $P, Q \in C^1$. 若 $P^2(x_0, y_0) + Q^2(x_0, y_0) \neq 0$, 点 (x_0, y_0) 是 (4.4) 的常点. 通过 (x_0, y_0), 方程 (4.4) 中至少有一个解存在且唯一. 若 $P^2(x_0, y_0) + Q^2(x_0, y_0) = 0$, 点 (x_0, y_0) 是 (4.4) 的奇点, 在该点解的存在唯一性定理已不适用. 因此, 也把 (4.3) 的平衡点叫奇点, 非平衡点叫常点.

若引进极坐标 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 则 (4.3) 化成

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos\theta \cdot P(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta Q(r\cos\theta, r\sin\theta), \\ \dot{\theta} = \dfrac{1}{r}[\cos\theta Q(r\cos\theta, r\sin\theta) - \sin\theta P(r\cos\theta, r\sin\theta)]. \end{cases} \tag{4.5}$$

通过 (4.4) 或 (4.5) 来研究 (4.3), 对某些特殊情形还可由此求出显式解 (例如线性方程的情形), 从而得到全平面上的相图. 然而对于一般情形, 不可能得到显式解, 这时常用线性化的方法:

(1) 在平衡点处将非线性方程 (4.3) 线性化.

(2) 讨论线性化方程的相图.

(3) 在平衡点邻域内用线性化方程的相图近似非线性方程的相图.

因此, 本节的方法对于非线性方程来说, 只能讨论平衡点邻域中解的局部性态.

若 (x_0, y_0) 是 (4.3) 的平衡点, 通过变量替换可化成以 $(0, 0)$ 为平衡点. 一般只考虑以原点为平衡点的情形.

4.2　二维常系数线性方程的标准化

先考虑二维常系数线性方程组

$$\dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = cx + dy. \tag{A}$$

当系数行列式 $q = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ 时, 方程组 (A) 有唯一平衡点 $(0,0)$, 称为简单平衡点. 当 $q = 0$ 时, 方程组 (A) 的平衡点称为非简单平衡点.

讨论方程组 (A) 的主要方法是将它标准化, 即作线性变换将方程组 (A) 化为标准形式.

方程组 (A) 的系数矩阵记为 A, 作非奇异线性变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

则方程组 (A) 化为

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = T^{-1}AT \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{$\tilde{\mathrm{A}}$}$$

令 $p = -(a+d)$, $q = ad - bc$, 则 A 的特征方程是

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + p\lambda + q.$$

$T^{-1}AT$ 的标准形取决于 $D(\lambda)$ 的根.

计算结果如下:

表 1

特征根	T	$T^{-1}AT$
两个相异实根 λ, μ	$\begin{pmatrix} b & d \\ \lambda-a & \mu-a \end{pmatrix} (b\neq 0)$ 或 $\begin{pmatrix} \lambda-d & \mu-d \\ c & c \end{pmatrix} (c\neq 0)$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$
两个相同实根 λ		
① $\lambda = a = d$ $b = c = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
② 其余情形	$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ -\varepsilon & a-\lambda \end{pmatrix} (b\neq 0)$ 或 $\begin{pmatrix} -\varepsilon & d-\lambda \\ 0 & -c \end{pmatrix} (c\neq 0)$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \varepsilon & \lambda \end{pmatrix} (\varepsilon \neq 0)$
两个共轭复根 $\lambda = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ $\beta \neq 0$	$\begin{pmatrix} 1 & (\alpha-a)/\beta \\ 0 & c/\beta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

4.3 标准化方程的简单平衡点

现在考虑标准化后的方程组 (A), 其中 $\det A \neq 0$.

1. *A* **有两个不同的实特征根** $\lambda > \mu$ $(\lambda\mu \neq 0)$

由

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

解得

$$x = c_1 e^{\lambda t}, \quad y = c_2 e^{\mu t},$$

或

$$y = c|x|^{\frac{\mu}{\lambda}}, \quad x = 0.$$

解曲线在 xy 平面上的图形如图 4.1, 图 4.2 和图 4.3 所示. 图中轨线上的箭头指向时间 t 增加的方向.

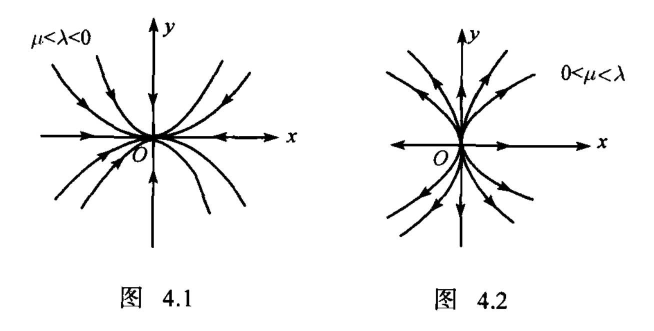


图 4.1 图 4.2

当 $\mu < \lambda < 0$ 时, (0,0) 称为稳定结点 (双切结点), 见图 4.1. 当 $t \to \infty$ 时, 一切轨线都趋于原点, 有两条轨线 (正、负 y 轴) 沿两个相反的方向 (正、负 y 轴方向) 趋于原点, 其余轨线都沿另外两个相反的方向 (正负 x 轴方向) 趋于原点, 而且沿这两个方向的两侧都有轨线趋于原点.

当 $0 < \mu < \lambda$ 时, (0,0) 点称为不稳定结点 (双切结点), 见图 4.2. 它与前者的区别只是把 $t \to \infty$ 改为 $t \to -\infty$, 且 x, y 轴互换.

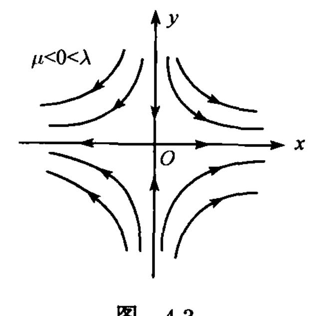


图 4.3

当 $\mu < 0 < \lambda$ 时, (0,0) 点称为鞍点 (图 4.3). 当 $t \to \infty$ 时, 只有两条轨线 (正、负 y 轴) 分别沿两个相反的方向趋向原点, 这两条轨线称为鞍点的稳定流形. 其余轨线都沿另外两个方向趋于无穷, 这其中有两条 (正、负 x 轴) 当 $t \to -\infty$ 时沿着两个相反的方向趋向原点, 这两条轨线称为鞍点的不稳定流形. 鞍点的这四条特殊的轨线又称为鞍点的分界线.

2. A 有两个相等的实特征根 λ $(\lambda \neq 0)$

若 λ 有两个线性无关的特征向量, 由

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

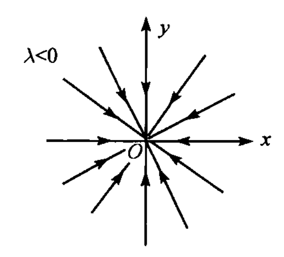
得

$$x = c_1 \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad y = c_2 \mathrm{e}^{\lambda t},$$

或

$$y = cx \quad 和 \quad x = 0.$$

解曲线如图 4.4, 都是趋于原点 (当 $t \to \infty$ 或 $t \to -\infty$ 时) 的半直线.



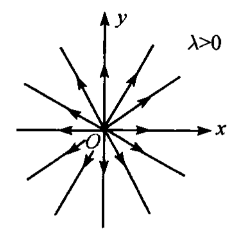


图　4.4

当 $\lambda < 0$ $(\lambda > 0)$ 时, $(0,0)$ 点称为稳定 (不稳定) 的临界结点, 又称星形结点.

若 λ 只有一个线性无关的特征向量, 由

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

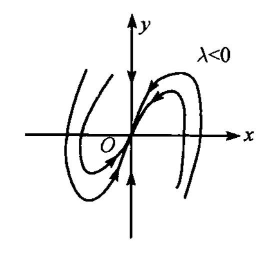
解得

$$x = c_1 \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad y = c_2 \mathrm{e}^{\lambda t} + c_1 t \mathrm{e}^{\lambda t},$$

或

$$y = cx + \frac{1}{\lambda} x \ln |x| \quad 和 \quad x = 0.$$

解曲线如图 4.5 所示.



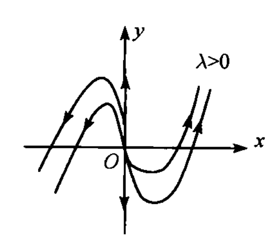


图　4.5

当 $\lambda < 0$ 时, (0,0) 点称为稳定的退化结点 (单切结点). 当 $t \to \infty$ 时, 一切轨线均沿正或负 y 轴趋于原点, 而且只能沿正 y 轴的一侧, 沿负 y 轴的另一侧趋于原点.

当 $\lambda > 0$ 时, (0,0) 称为不稳定的退化结点 (单切结点).

3. *A 有两个共轭复特征根 $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$, 其中 α, β 为实数, $\beta \neq 0$*

由

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

的极坐标方程

$$\dot{r} = \alpha r, \quad \dot{\theta} = -\beta,$$

解得

$$r = r_0 \mathrm{e}^{\alpha t}, \quad \theta = -\beta t + \theta_0, \quad 即\ r = r_0 \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{\beta}(\theta - \theta_0)}.$$

当 $\alpha = 0$ 时, (0,0) 点称为中心, 见图 4.6.

当 $\alpha < 0 (\alpha > 0)$ 时, (0,0) 点称为稳定 (不稳定) 焦点. 当 $t \to \infty$ $(-\infty)$ 时, $r(t) \to 0$, $\theta(t) \to -\infty$, 轨线螺旋地趋向原点. β 的符号不同, 旋转的方向就不同 (图 4.7).

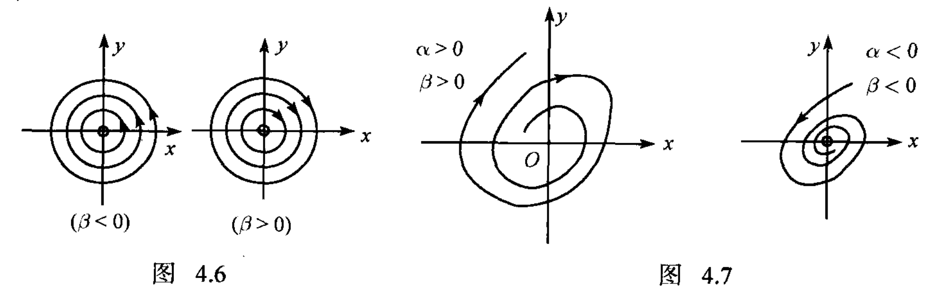


图 4.6 图 4.7

两个特征值 (不等或相等) 的实部均负时, (0,0) 统称为汇 (当 $t \to \infty$ 时解曲线都趋于原点).

两个特征值 (不等或相等) 的实部均正时, (0,0) 统称为源 (当 t 增加时解曲线远离原点).

4.4 线性常系数系统的简单平衡点

现考察原系统 (A), 通过非奇异线性变换 (4.6) 将 (A) 化成标准化系统 ($\tilde{\mathrm{A}}$). 系统 ($\tilde{\mathrm{A}}$) 的轨线结构是清楚的, 再通过线性变换 T 就可完全搞清楚 (A) 的轨线结构. 为此要考察非奇异线性变换下, 轨线的哪些特性保持不变, 哪些特性要起变化.

引理 4.1 在非奇异线性变换下有以下不变性:

(1) 坐标原点不变;

(2) 直线变为直线, 过原点的直线仍变为过原点的直线;

(3) 光滑曲线变成光滑曲线, 相切的光滑曲线变成相切的光滑曲线;

(4) 简单闭曲线变成简单闭曲线;

(5) 当 $t\to\infty$ $(-\infty)$ 时, 趋于原点的曲线仍变为趋于原点的曲线. 当 $t\to\infty$ $(-\infty)$ 时, 以螺旋方式环绕原点且趋于原点在变换下仍保持此方式.

引理 4.2　在非奇异线性变换 T 下可发生变化的是

(1) 把方向 $l\left(=\begin{pmatrix}l_1\\l_2\end{pmatrix}\right)$ 变为 Tl;

(2) 沿某方向 l 趋于原点的曲线经变换后对应的曲线沿另一确定的方向 Tl 趋于原点;

(3) 两点的距离, 两曲线的夹角一般起变化.

由上述引理知, 在 $\xi\eta$ 平面上得到平衡点的相图后, 返回到 xy 平面上时奇点的类型是不变的, 只是 "尺寸" 上会有变化.

在确定相图时, 知道 $\xi\eta$ 平面上的坐标轴经变换 T 后变为 xy 平面上的哪两条直线是重要的.

总结上面的讨论, 给出平衡点类型的判别准则. 引进参数

$$p=-(a+d),\quad q=ad-bc,$$

特征根

$$\lambda,\ \mu=\frac{-p\pm\sqrt{\Delta}}{2},\quad 其中\ \Delta=p^2-4q.$$

按特征根与平衡点类型的对应关系, 可在 $p-q$ 平面上画出以上图形 (图 4.8), 指明参数与平衡点类型的关系.

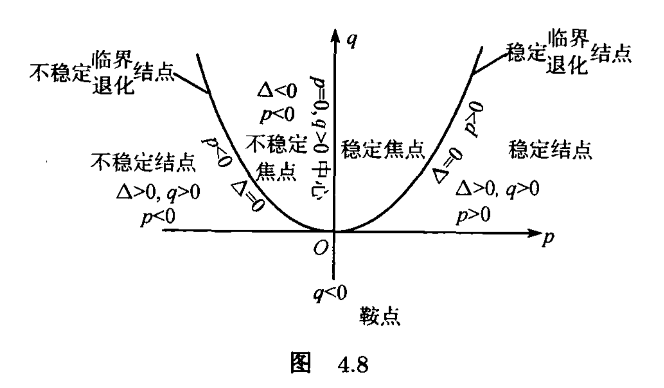


图　4.8

4.5　非线性系统的平衡点

最后讨论非线性系统 (4.3). 设 (x_0,y_0) 是平衡点, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 邻域可微, 则

$$\begin{cases} P(x,y) = a(x-x_0) + b(y-y_0) + f(x,y), \\ Q(x,y) = c(x-x_0) + d(y-y_0) + g(x,y), \end{cases}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(x_0,y_0)},$$

$$f(x,y) = o(r), \quad g(x,y) = o(r) \quad \text{当 } r = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{\frac{1}{2}} \to 0 \text{ 时}.$$

这样 (4.3) 可改写成

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x-x_0) + b(y-y_0) + f(x,y), \\ \dot{y} = c(x-x_0) + d(y-y_0) + g(x,y). \end{cases} \tag{4.7}$$

略去高阶项得

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x-x_0) + b(y-y_0), \\ \dot{y} = c(x-x_0) + d(y-y_0). \end{cases} \tag{4.8}$$

称 (4.8) 为 (4.7) 的线性化系统, (4.7) 为 (4.8) 的扰动系统. 若 $\det A \neq 0$, 也称 (x_0, y_0) 是 (4.7) 的简单平衡点, 此时易知 (x_0, y_0) 是 (4.3) 的孤立平衡点 (即存在 (x_0, y_0) 的一个邻域, 在此邻域内 (4.3) 无异于 (x_0, y_0) 的平衡点). 通过变量的平移总可把平衡点 (x_0, y_0) 移至原点, 因此可设 $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

下面给定线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + \mathrm{d}y \end{cases}, \quad \text{其中} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4.9}$$

和相应的扰动系统

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + f(x,y), \\ \dot{y} = cx + \mathrm{d}y + g(x,y). \end{cases} \tag{4.10}$$

设 $O(0,0)$ 是孤立平衡点 (若当 $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$ 时, $f = o(r)$, $g = o(r)$, 那么 $(0,0)$ 一定是孤立平衡点). U_0 是 $(0,0)$ 的某邻域, 通过 U_0 中任意一点的轨线为 $x = x(t), y = y(t)$, 其极坐标方程是 $r = r(t), \theta = \theta(t)$, 根据 U_0 中轨线与平衡点的关系来区分平衡点的类型.

焦点. 存在 U_0, 当 $t \to \infty$ $(-\infty)$ 时 U_0 中的所有轨线有 $r(t) \to 0$, $\theta(t) \to \infty$ 或 $-\infty$. 此时称 $(0,0)$ 为稳定 (不稳定) 焦点.

鞍点. 存在 U_0 和不共线的方向 θ_1, θ_2, 在 U_0 中恰有两条轨线当 $t \to \infty$ 时分别沿 $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_1 + \pi$ 趋于原点, 恰有两条轨线当 $t \to -\infty$ 时分别沿 $\theta = \theta_2$,

$\theta=\theta_2+\pi$ 趋于原点, 其余轨线将双侧离开 U_0. 此时称 (0,0) 为鞍点. 当 $t\to\infty$ 时趋于原点的轨线称为稳定流形, 当 $t\to-\infty$ 时趋于原点的轨线称为不稳定流形.

结点(双切结点). 存在 U_0 和不共线的方向 θ_1,θ_2, 在 U_0 中当 $t\to\infty$ $(-\infty)$ 时沿 $\theta=\theta_1$, $\theta=\theta_1+\pi$ 各只有一条轨线趋于原点, 其余轨线都沿 $\theta=\theta_2$ 或 $\theta=\theta_2+\pi$ 趋于原点, 而且沿它们的两侧均有轨线趋于原点. 此时称 (0,0) 为稳定 (不稳定) 结点.

临界结点(星形结点). 存在 U_0, 当 $t\to\infty$ $(-\infty)$ 时 U_0 中每条轨线都沿某确定方向趋于原点, 沿任意方向 $\theta=\theta_0$, 有且仅有一条轨线趋于原点. 此时称 (0,0) 为稳定 (不稳定) 临界结点.

退化结点(单切结点). 存在 U_0 和两个相反的方向 θ_0, $\theta_0+\pi$, 当 $t\to\infty$ $(-\infty)$ 时, 在 U_0 中一切轨线都沿 $\theta=\theta_0$ 或 $\theta=\theta_0+\pi$ 趋于原点, 并且轨线只能沿 $\theta=\theta_0$ 的某一侧, 沿 $\theta=\theta_0+\pi$ 的另一侧趋于原点. 此时称 (0,0) 为稳定 (不稳定) 退化结点.

中心. 存在 U_0, 其中的每一轨线均是包围原点的闭轨. 此时称 (0,0) 为中心.

下面给出扰动项 f 和 g 的条件, 使得扰动项不改变平衡点的类型.

假定

(H_1) 当 $r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ 时, $f(x,y)=o(r)$, $g(x,y)=o(r)$;

(H_2) $f(x,y)$, $g(x,y)$ 在原点邻域对 x,y 连续可微.

定理 4.3　设条件 (H_1) 和 (H_2) 成立. 若 (0,0) 是 (4.10) 的焦点或鞍点或结点, 则扰动项 f,g 不改变平衡点 (0,0) 的类型.

注 4.1　不改变平衡点的类型还包含有不改变稳定性及趋于平衡点的方向.

例 1　考察

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-x+\frac{2y}{\ln(x^2+y^2)},\\ \dot{y}&=-x-\frac{2x}{\ln(x^2+y^2)}\end{aligned}\tag{4.11}$$

的平衡点 (0,0).

令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 则 (4.11) 化为

$$\dot{r}=-r,\quad \dot{\theta}=-\frac{1}{\ln r}.$$

解得

$$\begin{aligned}r(t)&=r(0)\mathrm{e}^{-t},\\ \theta(t)&=\theta(0)+\ln|t-\ln r(0)|-\ln|\ln r(0)|.\end{aligned}$$

当 $t\to\infty$ 时, $r(t)\to 0$, $\theta(t)\to\infty$. 点 (0,0) 是 (4.11) 的焦点. 但它是相应的线性化方程的临界结点.

这里 $f(x,y)=\dfrac{2y}{\ln(x^2+y^2)}$, $g(x,y)=-\dfrac{2x}{\ln(x^2+y^2)}$. 若令 $f(0,0)=0$, $g(0,0)=0$, 则 f,g 满足条件 (H_1) 和 (H_2). 因此, 要使扰动项不改变临界结点的类型, 对 f 和 g 还要加条件. 再假定

(H_3) 存在 $\delta>0$, 使得当 $r\to 0$ 时, $f(x,y)=o(r^{1+\delta})$, $g(x,y)=o(r^{1+\delta})$.

定理 4.4　设条件 (H_2) 和 (H_3) 成立. 若 $(0,0)$ 是 (4.10) 的临界结点或退化结点, 则扰动项 f,g 不改变平衡点 $(0,0)$ 类型.

例 2　考察

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+x(x^2+y^2)^n\cos\dfrac{n\pi}{2}+y(x^2+y^2)^n\sin\dfrac{n\pi}{2},\\ \dot{y}=x+y(x^2+y^2)^n\cos\dfrac{n\pi}{2}-x(x^2+y^2)^n\sin\dfrac{n\pi}{2}\end{cases}$$

的平衡点 $(0,0)$, 其中 n 为自然数.

化成极坐标形式

$$\dot{r}=r^{2n+1}\cos\frac{n\pi}{2},\quad \dot{\theta}=1-r^{2n}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

当 n 为奇数 ($n=2k+1$) 时,

$$\dot{r}=0,\quad \dot{\theta}=1-(-1)^k r^{4k+2},$$

点 $(0,0)$ 是中心. 当 n 为偶数时, 点 $(0,0)$ 是稳定焦点, 而点 $(0,0)$ 是线性化方程

$$\dot{x}=-y,\quad \dot{y}=x$$

的中心.

例 3　考察

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+x(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\\ \dot{y}=x+y(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{cases}$$

化成极坐标方程得

$$\dot{r}=r^3\sin\frac{1}{r},\quad \dot{\theta}=1.$$

由此得 $\theta=t+\theta_0$.

(1) $r=(k\pi)^{-1}$ ($k=1,2,3,\cdots$) 是解;

(2) 当 $\dfrac{1}{\pi}<r<\infty$ 时, $\dot{r}(t)>0$, $r(t)$ 单调上升;

(3) 当 $\dfrac{1}{2k\pi}<r<\dfrac{1}{(2k-1)\pi}$ 时, $\dot{r}(t)<0$, $r(t)$ 单调下降,

$$\lim_{t\to\infty}r(t)=\frac{1}{2k\pi};$$

(4) 当 $\frac{1}{(2k+1)\pi} < r < \frac{1}{2k\pi}$ 时, $\dot{r}(t) > 0$, $r(t)$ 单调上升,

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \frac{1}{2k\pi}.$$

画出相图如图 4.9. 这时点 $(0,0)$ 是中心焦点.

图　4.9

定理 4.5　设条件 (H_1) 成立. 若 $(0,0)$ 是 (4.9) 的中心, 那么点 $(0,0)$ 或者是 (4.10) 的中心, 或者是 (4.10) 的焦点或中心焦点. 若 (4.10) 的右端解析, 则不出现中心焦点.

注 4.2　设条件 (H_1) 成立, (4.10) 的轨线关于 x 轴 (或 y 轴) 对称. 若 $(0,0)$ 是 (4.9) 的中心, 则 $(0,0)$ 也是 (4.10) 的中心.

5　二阶保守系统及其相图分析

由方程式

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \tag{5.1}$$

所描述的系统是保守系统, 也称 (5.1) 为保守系统, 其中 f 是单位质量所受的力, 与 t, $\dot{x}$ 无关. 设 $f \in C^1(\mathbb{R})$, 与 (5.1) 等价的方程组是

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -f(x). \end{cases} \tag{5.2}$$

方程组 (5.2) 的两式相除得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-f(x)}{y}, \tag{5.3}$$

它表示相平面上的一个方向场, 也是相轨线的微分方程式.

将 (5.3) 分离变量并积分一次得

$$\frac{y^2}{2} + u(x) = E, \tag{5.4}$$

其中 $\frac{y^2}{2} = \frac{\dot{x}^2}{2}$ 是系统的动能, $u(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是系统的势能, E 为积分常数, 由初始条件确定. 因此, (5.4) 式表示系统的机械能守恒.

给定 E, 由 (5.4) 式确定了 (5.2) 的一条相轨线. 下面讨论相轨线的性质.

5.1 相轨线的普遍性质

(1) 系统的平衡点 (奇点) 均在 x 轴上, 即满足

$$f(x) = 0, \quad y = 0$$

的点 $(x, 0)$ 为系统的平衡点.

(2) 每条相轨线关于 Ox 轴对称. 因为若 (x, y) 满足 (5.4), 则 $(x, -y)$ 也满足 (5.4).

(3) 在相轨线与 x 轴相交的常点处, 相轨线的切线垂直于 x 轴. 因为在这些点处 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \infty$.

(4) 在相轨线与通过奇点且平行于 Oy 轴的直线的交点处, 相轨线的切线与 Ox 轴平行. 因为在这些点上 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$.

(5) 当 t 增加时, 在上半平面上, 相点沿相轨线自左向右运动 ($\dot{x} > 0$), 在下半平面则相反 ($\dot{x} < 0$).

5.2 平衡点邻域的相图

为了进一步讨论 (5.2) 的相图, 先讨论它的平衡点. 不防设 $(0,0)$ 是 (5.2) 的简单平衡点, 即设 $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$. 若 $f'(0) < 0$, 则 $(0,0)$ 是鞍点; 若 $f'(0) > 0$, 则 $(0,0)$ 是中心 (由于轨线关于 x 轴对称, 因而 $(0,0)$ 不可能是焦点). 这就是说, 若令 $u(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则当 $x = 0$ 是 $u = u(x)$ 的极大点时, $(0,0)$ 是鞍点; 当 $x = 0$ 是 $u = u(x)$ 的极小点时, $(0,0)$ 是中心. 相应的轨线方程是 (5.4). 最简单的情形是 $u(x) = kx^2$, 即轨线方程是

$$kx^2 + \frac{1}{2}y^2 = E.$$

它或是一旋双曲线, 或是一族椭圆.

引理 5.1 设在 $x = 0$ 邻域内 $f \in C^2$, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, 则存在变换

$$\xi = xg(x), \quad \eta = y,$$

使得轨线方程 (5.4) 变成

$$k\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 = E,$$

其中 $g(x)$ 在 $x = 0$ 邻域属于 C^1, $k = \mathrm{sgn} f'(0)$.

定义 5.2 设 U, V 分别是 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 中的区域, 一一映射 $f: U \to V$ 满足 f 和 $f^{-1}: V \to U$ 都是可微的, 则称 f 是一个微分同胚.

引理 5.1 指出, 在微分同胚变换下, (5.2) 的简单平衡点的邻域内的轨线或变成一族双曲线 (是鞍点时) 或变成一族椭圆 (是中心时).

5.3　整个相平面上的轨线

对于保守系统 (5.2), 还可以通过系统的势能函数来分析全平面的相图.

方程 (5.2) 的第一积分是

$$\dot{x}^2 = 2[E - u(x)],$$

其中 E 为任意常数.

现给定 E. 假设当 $a < x < b$ 时 $u(x) < E$, 这里 a 可以为 $-\infty$, b 可以为 ∞. 给定初值 (x_0, y_0), $x_0 \in (a, b)$,

$$y_0 = \sqrt{2[E - u(x_0)]}.$$

那么初值问题

$$\begin{cases} \ddot{x} + f(x) = 0, \\ x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{5.5}$$

的解 $x = \varphi(t)$ 由

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{2[E - u(\xi)]}} \tag{5.6}$$

给出.

由 (5.6) 确定的解的性质可用下述方法来刻画.

考虑点集 $\{x : u(x) \leqslant E\}$, 它或是空集 (不考虑这种情形) 或是整个 x 轴, 或是不多于可数个两两无公共内点的闭区间的并集, 其中可以有一个或两个是伸向无穷的:

$$\{x : u(x) \leqslant E\} = \sum I_i,$$

其中每个 I_i 是闭区间, I_i^0 是 I_i 的内部. 它们满足:

(1) 当 $x \in I_i^0$ 时, $u(x) < E$;

(2) 在 I_i 的端点处 $u(x) = E$;

(3) 当 $i \neq j$ 时 I_i^0 与 I_j^0 不相交.

在 xu 平面上画出 $u = u(x)$ 的图形, 并作直线 $u = E$, 它被能量曲线 $u = u(x)$ 分成许多线段 (若不相交则指整条直线). 考察其中的一些线段, 它有如下性质:

(1) 除了线段的端点, 它严格位于 $u = u(x)$ 的图形上方;

(2) 每个线段的有限端点必在 $u = u(x)$ 的图形上. 这些线段的集合记为 S.

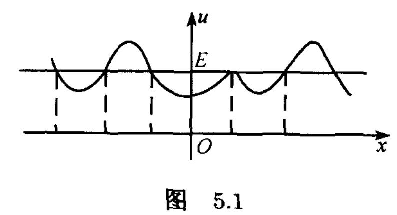


图　5.1

集合 S 与 $\{I_i\}$ 可建立如下对应关系: S 中的每个线段在 x 轴上的投影必是某个区间 I_i, 反之亦然, 见图 5.1.

现在考察每个区间 I_i, 简记为 I, $I^0 = (a, b)$. 当 $x \in (a, b)$ 时 $u(x) < E$, 当 a 为有限时 $u(a) = E$, 当 b 为有限时 $u(b) = E$. 不同的区间 I 对应不同类型的解. E 是不是 $u(x)$ 的临界值, 对解的类型有很大影响.

定义 5.3 若存在 x, 使得 $u(x)=E$, $u'(x)=0$, 则称 E 为 u 的临界值, x 为临界点.

1. *E 不是临界值的情形*

(1) a,b 为有限值, $u(a)=u(b)=E$, $u'(a)\neq 0$, $u'(b)\neq 0$.

这时, 当 $a<x<b$ 时 $u(x)<E$. 令

$$t_1=t_0+\int_{x_0}^{a}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{2[E-u(\xi)]}}, \tag{5.7}$$

$$t_2=t_0+\int_{x_0}^{b}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{2[E-u(\xi)]}}, \tag{5.8}$$

那么它们均收敛. 于是由 (5.6) 确定了解

$$x=\varphi(t),\quad t_1\leqslant t\leqslant t_2;\quad \varphi(t_1)=a,\quad \varphi(t_2)=b.$$

令 $\dfrac{T}{2}=t_2-t_1$, 则

$$\frac{T}{2}=\int_a^b\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{2[E-u(\xi)]}}.$$

因为 $\varphi'(t_1)=\varphi'(t_2)=0$, 故可作延拓

$$\varPhi(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t_1\leqslant t\leqslant t_2,\\ \varphi(2t_2-t), & t_2\leqslant t\leqslant t_2+\dfrac{T}{2}=t_1+T.\end{cases}$$

它是 (5.1) 的解, 满足

$$\varPhi(t_1)=\varPhi(t_1+T),\quad \varPhi'(t_1)=\varPhi'(t_1+T)=0.$$

因此可延拓成以 T 为周期的周期解. 对应的相轨线 (5.4) 是闭轨, 如图 5.2 所示.

(2) a 为有限, $b=\infty$, $u(a)=E$, $u'(a)\neq 0$.

这里, 当 $a<x<\infty$ 时 $u(x)<E$, 仍由 (5.7) 定义 t_1, (5.8) 定义 t_2, 其中 $b=\infty$. 定义

$$\tilde{t}_2=\int_{x_0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{2[E-u(\xi)]}}.$$

若 $\tilde{t}_2=\infty$, 则由 (5.6) 确定的解的定义域是 $[t_1,\infty)$; 若 $\tilde{t}_2<\infty$, 则定义域是 $[t_1,t_2)$. 对于这两种情形, 都有

$$\varphi(t_1)=a,\quad \varphi'(t_1)=0,\quad \lim_{t\to t_2(\infty)}\varphi(t)=\infty.$$

作延拓

$$\Phi(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t_1\leqslant t\leqslant t_2^*,\\ \varphi(2t_1-t), & 2t_1-t_2^*<t<t_1,\end{cases}$$

其中 $t_2^*=t_2$ 或 ∞, 则 $\Phi(t)$ 是 (5.1) 的解, 对应的相轨线如图 5.3 所示, 沿 x 轴正向伸向无穷.

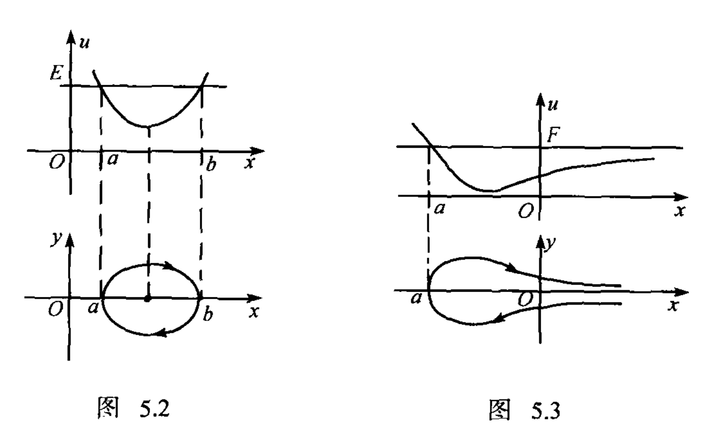


图 5.2　　　　图 5.3

(3) $a=-\infty$, b 有限, $u(b)=E$, $u'(b)\neq 0$.

这里, 当 $-\infty<x<b$ 时, $u(x)<E$. 与前面类似, 可得 (5.1) 满足初始条件 $\Phi(t_0)=x_0$, $\Phi'(t_0)=y_0$ 的解 $\Phi(t)$, 其定义域是 $(-\infty,t_2)$ 或 $(t_1,2t_2-t_1)$. 对应的相轨线类似于图 5.3 所示, 但它沿 x 轴负向伸向无穷.

(4) $a=-\infty$, $b=\infty$.

这里, 当 $-\infty<x<\infty$ 时, $u(x)<E$. 可得 (5.2) 的相轨线如图 5.4 所示, 沿 x 轴正负向均伸向无穷.

2. *E 是临界值的情形*

(1) a,b 均为有限, $u(a)=u(b)=E$, $u'(a)=u'(b)=0$.

这时

$$\int_{x_0}^{b}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{2[E-u(\xi)]}}=\infty,$$

$$\int_{x_0}^{a}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{2[E-u(\xi)]}}=-\infty.$$

于是由 (5.6) 确定解 $\varphi(t)$, 定义域为 $(-\infty,\infty)$, 并且

$$\lim_{t\to-\infty}\varphi(t)=a,\quad \lim_{t\to\infty}\varphi(t)=b,\quad \lim_{t\to\pm\infty}\varphi'(t)=0.$$

因此, (5.2) 有相轨线如图 5.5 所示.

(2) a,b 均为有限, $u(a)=u(b)=E$, $u'(a)=0$, $u'(b)\neq 0$ 或 $u'(a)\neq 0$, $u'(b)=0$. 它们的相轨线分别如图 5.6 和图 5.7.

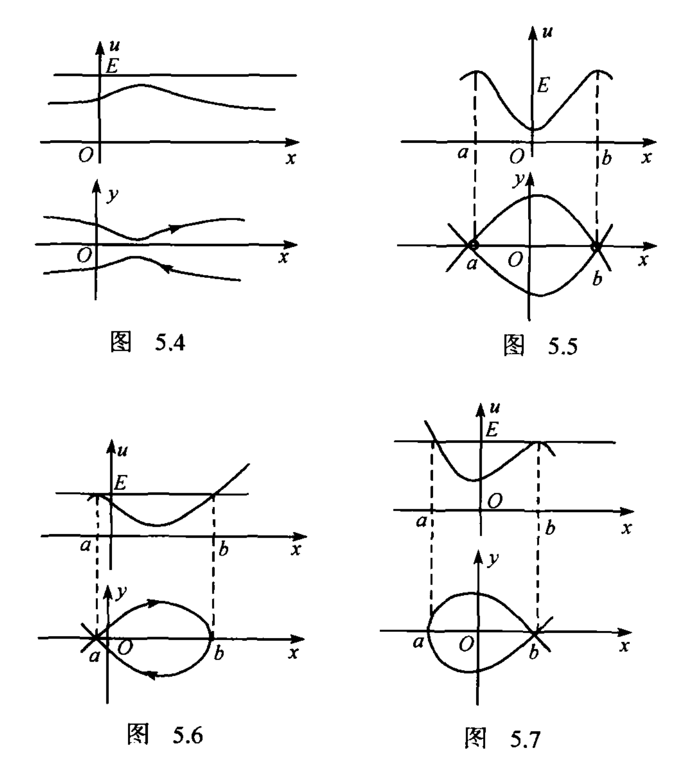


图 5.4　图 5.5

图 5.6　图 5.7

(3) a, b 之一为临界点, 另一为无穷.

这一情形留给读者自己讨论.

6 平面自治系统的周期解与极限集

6.1 概述

对于二维非线性自治系统

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{6.1}$$

从它的平衡点的性质只能知道平衡点附近解的定性性质. 在许多问题中, 考察全平面上解的情况比考察解的局部性质更为重要, 但也更困难. 在研究 (6.1) 解的全局结构时, 有两个问题特别重要:

(1) 问题 (6.1) 任一解或某个解当 $t \to \infty$ 时是否趋向于某个平衡点;

(2) 问题 (6.1) 是否存在闭轨.

二维常系数系统具有闭轨当且仅当它的特征方程有纯虚根, 并且在这种情况下每一轨线都是闭轨. 然而对于非线性系统 (6.1) 有与此截然不同的性质.

例 1　考察非线性系统

$$
\begin{cases} \dot{x} = -y + x[1 - (x^2 + y^2)], \\ \dot{y} = x + y[1 - (x^2 + y^2)]. \end{cases} \tag{6.2}
$$

在极坐标系下问题 (6.2) 化为

$$
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t} = r^2(1 - r^2), \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 1.
$$

由此解得

$$
r = [1 + c\mathrm{e}^{-2(t-t_0)}]^{-\frac{1}{2}},
$$
$$
\theta = t - t_0,
$$

即

$$
x = [1 + c\mathrm{e}^{-2(t-t_0)}]^{-\frac{1}{2}}\cos(t - t_0),
$$
$$
y = [1 + cc^{-2(t-t_0)}]^{-\frac{1}{2}}\sin(t - t_0).
$$

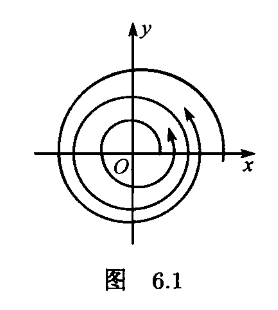


图　6.1

问题 (6.2) 有唯一闭轨即单位圆 $r = 1$. 若 $c > 0$, 解在单位圆内, 当 $t \to \infty$ 时绕向单位圆. 若 $-1 < c < 0$, 解在单位圆外, 当 $t \to \infty$ 时也绕向单位圆. 因此, (6.2) 除唯一闭轨 $r = 1$ 外, 其他轨线当 $t \to \infty$ 时或从圆内或从圆外绕向单位圆 (图 6.1).

定义 6.1　设 Γ 是 (6.1) 的闭轨.

(1) 若存在 Γ 的充分小邻域, 其内无其他闭轨, 则称 Γ 为孤立闭轨, 又称为极限环.

(2) 若存在包含极限环 Γ 的环形邻域 U, 使得从 U 内出发的轨线当 $t \to \infty$ 时都渐近地接近 Γ, 则称极限环为稳定的, 否则称为不稳定的.

(3) 若极限环在它的邻域内某一侧出发的轨线当 $t \to \infty$ 时都渐近地接近 Γ, 而另一侧出发的轨线都离开它, 则称 Γ 为半稳定的极限环.

上述稳定性是轨道稳定性, 它有以下精确定义.

对定义域内任意包含 Γ 的开集 U, 存在一开集 V, $\Gamma \subset V \subset U$, 使得对任意 $x \in V$ 及 $t > 0$, (6.1) 的解 $\varphi(t;x) \subset U$, 则称 Γ 是稳定的. 若同时又有当 $x \in V$ 时,

$$
\lim_{t \to \infty} \rho(\Gamma, \varphi(t;x)) = 0,
$$

则称 Γ 是渐近稳定的, 其中 $\rho(\Gamma, \varphi(t;x))$ 是轨线 Γ 与点 $\varphi(t,x)$ 的距离.

注 6.1　以后总用 $\rho(\cdot,\cdot)$ 表示点与点、点与集合或集合与集合之间的距离.

极限环的稳定性是指轨道的渐近稳定性.

由此可见, 上述提到的两个问题都是轨线的极限状态问题. 因此本节的中心问题是讨论平面自治系统轨线的极限状态.

6.2 判别闭轨不存在的准则

先讨论平面系统

$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \tag{6.3}$$

在什么条件下一定无闭轨.

假定: Ω 是单连通的, P, $Q \in C^1(\Omega)$.

定理 6.2(Bendixson 法则) 设在 Ω 上 $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial \Omega}{\partial y}$ 不变号, 且在 Ω 的任意子域中不恒为零, 那么 (6.3) 在 Ω 内无闭轨.

定理 6.3 (Dulac 法则) 若存在恒正函数 $B(x,y) \in C^1(\Omega)$, 使得 $\dfrac{\partial(PB)}{\partial x} + \dfrac{\partial(QB)}{\partial y}$ 在 Ω 上不变号且在 Ω 内的所有子域上不恒为零, 则 (6.3) 在 Ω 内无闭轨.

例 2 设 $f(x) \in C^1$, 常数 $c \neq 0$, 则

$$\ddot{x} + c\dot{x} + f(x) = 0$$

无非平凡周期解.

例 3 设 $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, $a_{22}b_1(a_{21} - a_{11}) + a_{11}b_2(a_{12} - a_{22}) \neq 0$, 则

$$\begin{cases} \dot{x} = [a_{11}x + a_{12}y + b_1]x \equiv P(x,y), \\ \dot{y} = [a_{21}x + a_{22}y + b_2]y \equiv Q(x,y) \end{cases}$$

在第一象限无闭轨.

定理 6.4 设 Ω 是单连通区域, P, $Q \in C^1(\Omega)$, 在 Ω 内 (6.3) 无平衡点, 则 (6.3) 在 Ω 内无闭轨.

6.3 极限集的一般性质

现在研究平面系统 (6.1) 的轨线的极限点的集合. 设 $f \in C^1(\Omega)$, (6.1) 的解 $\varphi(t,x_0)$ 定义在 $[0,\infty)$ 或 $[-\infty,0)$ 上, 其中 $\varphi(0,x_0) = x_0$.

定义 6.5 若存在序列 $t_n \to \infty$ $(-\infty)$, 使得 $\varphi(t_n,x_0) \to \bar{x}$, 则称 $\bar{x}$ 为 $\varphi(t,x_0)$ 的 ω 极限点 (α 极限点). 称 $\varphi(t,x_0)$ 的所有 ω 极限点 (α 极限点) 的集合为 $\varphi(t,x_0)$ 的 ω 极限集 (α 极限集), 记为 $L_\omega(x_0)$ $(L_\alpha(x_0))$.

定理 6.6 在有界闭区域内的正半轨 (负半轨) 的 ω (α) 极限集是非空的紧不变集, 而且是 (区域) 连通的.

定理 6.7 $L_\omega(x_0)$ $(L_\alpha(x_0))$ 只有唯一一个点 $\bar{x}$ 的充要条件是

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t,x_0) = \bar{x} \quad \Big(\lim_{t\to-\infty} \varphi(t,x_0) = \bar{x}\Big).$$

如果 (6.1) 是 n 维自治系统, 定理 6.6 和定理 6.7 仍然是对的.

6.4 无切线段及其性质

为了研究平面自治系统的极限集的特殊性质, 引进无切线段并研究它的性质.

定义 6.8 如果 S 是包含点 x 的闭线段, 且不含 (6.1) 的平衡点, 在 S 上的每一点处, (6.1) 的轨线不与之相切, 则称此线段为 f 或 (6.1) 在点 x 的无切线段.

由于 f 是连续的, 对于所有常点 ξ 和所有不平行于 $f(\xi)$ 的方向 η, 存在通过 ξ 且以 η 为方向的无切线段 S, 使得 (6.1) 与 S 相交的轨线都在 t 增加时按同一方向由 S 之一侧穿到另一侧.

下面进一步研究轨线与无切线段相交时的一些性质.

引理 6.9 设 S 是 f 在点 $\bar{x}$ 处的无切线段, 则任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\bar{x}$ 的 δ 邻域 $U_\delta(\bar{x})$ 及 $U_\delta(\bar{x})$ 上的 C^1 函数 $T(x)$, 满足

$$T(\bar{x}) = 0, \quad |T(x)| < \varepsilon \text{ 且 } \varphi(T(x), x) \in S.$$

定义 6.10 设 $x_n = \varphi(t_n, \xi)$. 若 t_n 单调, 则称 $\{x_n\}$ 在解曲线 $\varphi(t, \xi)$ 上单调. 设 $\{x_n\}$ 在直线段 I 上, 直线方程是

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1), \quad x_n = x_1 + \lambda_n(x_2 - x_1).$$

若 λ_n 单调, 则称 $\{x_n\}$ 沿线段 I 单调.

引理 6.11 设 S 是 f 的无切线段, 则轨线 C 的有限弧段只能与 S 交于有限个点. 若轨线 C 与 S 的交点 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 沿轨线单调, 则在 S 上也单调.

下面考察极限轨线与无切线段相交时的性质.

引理 6.12 设 $y \in L_\omega(x) \cup L_\alpha(x)$, 则过 y 的轨线与任意无切线段最多交于一点.

6.5 Poincaré-Bendixson 定理

我们的最终目的要指出极限轨线与平衡点和闭轨的关系.

引理 6.13 设 $L_\omega(x)$ $(L_\alpha(x))$ 有界, 不包含平衡点. 若 $y \in L_\omega(x)$ $(y \in L_\alpha(x))$, 则过 y 的轨线是闭轨 γ, 且 $\gamma \in L_\omega(x)$ $(\gamma \in L_\alpha(x))$.

引理 6.14 设 γ 为闭轨, $\gamma \subset L_\omega(x)$ $(\gamma \in L_\alpha(x))$, 则

$$\gamma = L_\omega(x) \ (\gamma = L_\alpha(x)).$$

引理 6.15 设 $L_\omega(x) = \gamma$ $(L_\alpha(x) = \gamma)$ 为闭轨, 则

$$\lim_{t\to\infty} \rho(\varphi(t, x), \gamma) = 0 \ \Big(\lim_{t\to-\infty} \rho(\varphi(t, x), \gamma) = 0\Big).$$

由前面三个引理立即可得

定理 6.16 (Poincaré-Bendixson) 设正半轨 (负半轨) $\Gamma : \varphi(t, x)$ 有界, $L_\omega(x)$ $(L_\alpha(x))$ 不包含平衡点. 那么 Γ 本身是闭轨, 或者 $L_\omega(x)$ $(L_\alpha(x))$ 是一个闭轨 γ, 且当 $t \to \infty$ $(t \to -\infty)$ 时 Γ 趋于 γ.

6.6 Poincaré-Bendixson 定理的应用

1. *有界半轨极限集的结构*

由 P-B 定理 (定理 6.16) 知, 在有界区域内, 所有轨线的极限集或是闭轨或包含平衡点. 含平衡点时则不可能再含闭轨, 因为闭轨与其他轨线不连通. 这就是说, 若极限集含平衡点又含极限轨线, 则极限轨线一定是非闭轨. 进一步可证:

引理 6.17 设非闭轨 $\Gamma \subset L_\omega(x)$, 则 Γ 的极限集只含平衡点.

此引理表明: 有界极限集中有非闭轨时也必有平衡点, 这些平衡点同时是这些极限轨线的极限点.

总结上述讨论得

定理 6.18 (有界半轨极限集的结构) 有界区域内半轨线的极限集只可能是以下三类型之一: (1) 平衡点; (2) 闭轨线; (3) 平衡点与当 $t \to \infty$, $t \to -\infty$ 时趋于这些平衡点的轨线.

还可进一步指出, 类型 (3) 的极限集中的平衡点不可能是焦点或结点. 因为所有轨线只要进入这种平衡点的充分小邻域之内, 它就趋于这个平衡点, 而不可能有其他极限点了. 所以, 如果平衡点是简单平衡点, 它必是鞍点, 而极限集中那些非闭轨线是鞍点的分界线.

2. *极限环的存在性与稳定性*

引理 6.19 设 γ 是闭轨, 点 $x \in \gamma$ 使 $\gamma = L_\omega(x)$ (或 $L_\alpha(x)$), 则 γ 的一侧 (点 x 所在的一侧) 附近的轨线当 $t \to \infty$ (或 $t \to -\infty$) 时都趋于 γ.

引理 6.19 中的闭轨 γ 是否为极限环 (孤立闭轨) 呢? 事实上, 当平面系统右端解析时, 所有闭轨或为极限环或在它的充分小邻域内全是闭轨. 因此, 若 $\gamma = L_\omega(x)$ (或 $L_\alpha(x)$), 且 $x \in \gamma$, 则 γ 是极限环, 且有一侧是稳定的 (不稳定的).

定理 6.20 (Poincaré-Bendixson 环域原理) 设 (6.1) 的右端是解析的. 若区域 Ω 内存在由两条简单闭曲线 Γ_1, Γ_2 围成的环形闭区域 G 满足: Γ_1 在 Γ_2 的内域, G 上无平衡点, 所有与 G 的边界相交的轨线都在 t 增加时从 G 的外部进入 G 的内部, 则 G 内至少存在一个稳定的极限环, 它包含 G 的内边界 Γ_1 于其内域.

3. *趋于平衡点的轨线*

定理 6.21 设 D 是有界正不变闭集, 只包含有限个平衡点 (一个平衡点), 它或是结点或是焦点, 并且不包含闭轨. 则对任意 $x \in D$, 当 $t \to \infty$ 时解 $\varphi(t, x)$ 趋于某平衡点 (都趋于这个唯一的平衡点).

7 生态方程

现在来讨论一类生态方程. 先介绍几个基本概念.

出生率 (死亡率): 单位时间内每 N 个成员中出生 (死亡) 的成员数与 N 之比.

增长率: 单位时间内每 N 个成员中增长的成员数与 N 之比.

显然, 增长率 = 出生率 − 死亡率.

设 t 时刻某物种的成员数为 $y=y(t)$, 则 t 到 $t+\Delta t$ 的平均增长率为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta t\cdot y}$. 若把成员数连续化并使之有连续的导数, 则

$$t\text{ 时刻的增长率} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t\cdot y} = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)}.$$

设有两个物种, t 时刻的成员数分别为 $x(t), y(t)$, 其增长率分别为

$$\frac{\dot{x}}{x} = M(x,y),\quad \frac{\dot{y}}{y} = N(x,y).$$

改写成

$$\dot{x} = xM(x,y),\quad \dot{y} = yN(x,y),\tag{7.1}$$

其中增长率 M, N 是定义于第一象限 $\bar{\mathbb{R}}_+^2$ 的 C^1 函数, 常有以下几种情形:

(1) $\dfrac{\partial M}{\partial Y}<0$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}>0$, 称 (7.1) 为捕食型的;

(2) $\dfrac{\partial M}{\partial Y}<0$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}<0$, 称 (7.1) 为竞争型的;

(3) $\dfrac{\partial M}{\partial Y}>0$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}>0$, 称 (7.1) 为互助型的.

7.1　捕食方程

两个物种, 一个为捕者, 其成员数为 y, 另一个是食物, 其成员数为 x. 设 y 的最低食物供给量为 σ_0, y 的增长率与 $x-\sigma_0$ 成正比, 则

$$\frac{\dot{y}}{y} = \alpha(x-\sigma_0).$$

改写成

$$\dot{y} = (Cx-D)y,\quad \text{其中常数 } C>0,\ D>0.\tag{7.2}$$

设食 x 的食物供给是充分的, 有一个稳定的出生率, 它单位时间的死亡率与 x 及 y 成正比, 即 Bxy. 这是因为两倍的猫将吃掉两倍的鼠; 鼠有两倍就使猫有两倍的机会遇到鼠. 于是

$$\frac{\dot{x}}{x} = A - \frac{Bxy}{x} = A - By.$$

改写成

$$\dot{x} = (A-By)x,\quad \text{其中常数 } A>0, B>0.\tag{7.3}$$

联立 (7.2), (7.3) 得 Lotka-Volterra 的捕食方程

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - By)x, \\ \dot{y} = (Cx - D)y, \end{cases} \tag{7.4}$$

其中常数 $A, B, C, D > 0$. 将式 (7.4) 两式相除得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(Cx - D)y}{(A - By)x},$$

分离变量后求出解, 得

$$H(x, y) \equiv Cx - D\ln x + By - A\ln y = k. \tag{7.5}$$

易证 $H(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2_+$ 内有唯一的极值点 $z = \left(\frac{D}{C}, \frac{A}{B}\right)$, 且是最小值点. 因而, 对任意 $k > H\left(\frac{D}{C}, \frac{A}{B}\right)$, 由 (7.5) 确定的 $H(x, y)$ 的等高线是闭曲线, 它就是 (7.4) 在第一象限的相轨线 (x, y 轴也是), 见图 7.1.

由相图可见, 若开始只有捕者而无食, 结果是捕者死尽; 若一开始就没有捕者, 那么食会无限增长; 若开始捕者成员数为 A/B, 食的成员数为 D/C, 则将永远维持这个平衡态; 若开始两物种的成员数 $(x(0), y(0)) > (0, 0)$, 但不是 $(A/B, D/C)$, 则捕者与食的成员数将循环振荡, 没有一种会死尽, 也没有一种会无限增长.

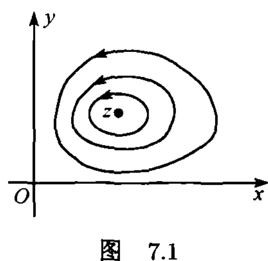


图 7.1

假设某物种成员数 $z(t)$ 有一个极限值 η, 其增长率与 $\eta - z$ 成正比, 即有

$$\dot{z} = c(\eta - z)z.$$

右端的非线性项 $-cz^2$ 反映了"社会摩擦", 即物种的成员数对该物种增长率的影响.

如果考虑社会摩擦, 要增加非线性项, 得到极限增长的捕食方程

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - By - \lambda x)x, \\ \dot{y} = (Cx - D - \mu y)y, \end{cases} \tag{7.6}$$

其中 A, B, C, D, λ, μ 都是正常数. 此时 $\mathbb{R}^2_+$ 被铅直等倾线

$$L : A - By - \lambda x = 0$$

与水平等倾线

$$M : Cx - D - \mu y = 0$$

分成几块, 每块内 $(\dot{x}, \dot{y})$ 不变号. 下面分两种情形讨论.

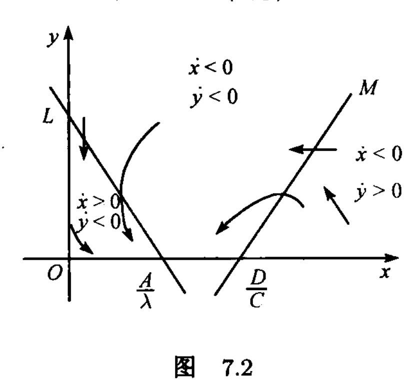


图 7.2

1. L 与 M 在 $\mathbb{R}_+^2$ 不交

此时 $\dfrac{A}{\lambda} < \dfrac{D}{C}$. 平衡点有两个, 点 $(0,0)$ 是鞍点; 点 $\left(\dfrac{A}{\lambda}, 0\right)$ 是稳定结点. 因为 $\mathbb{R}_+^2$ 内无平衡点, 所以 $\mathbb{R}_+^2$ 内无闭轨. 相图如图 7.2. 初值在 $\mathbb{R}_+^2$ 内或 x 轴上的轨线都趋于 $\left(\dfrac{A}{\lambda}, 0\right)$, 初值在 y 轴上的轨线趋于原点. 这表明, 不论开始时捕者与食的成员各多少将以捕者死亡而告终. 若开始时有食, 则食的最终成员将稳定于 $\dfrac{A}{\lambda}$.

2. L 与 M 在 $\mathbb{R}_+^2$ 内相交

此时 $\dfrac{A}{\lambda} > \dfrac{D}{C}$. 平衡点有三个: $(0,0)$ 与 $\left(\dfrac{A}{\lambda}, 0\right)$ 是鞍点, $z = (\bar{x}, \bar{y})$ 是 $\mathbb{R}_+^2$ 内的唯一平衡点. 由 6.2 节的例 3 知, 在 $\mathbb{R}_+^2$ 内无闭轨. 方向场 (即每一点相轨线的方向) 如图 7.3 所示. 因此从 $\mathbb{R}_+^2$ 内任一点出发的解都趋于平衡点 z. 这就是说, 只要开始时捕者与食的成员数都不是零, 那么它们的成员数将最终稳定于一个常态, 即共同存在下去.

7.2 竞争方程

设方程 (7.1) 在 $\mathbb{R}_+^2$ 上满足如下条件:

(1) $\dfrac{\partial M}{\partial y} < 0$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} < 0$ (一物种增多时, 另一物种的增长率减少);

(2) 存在 $k > 0$, 当 $x \geqslant k$ 或 $y \geqslant k$ 时, $M < 0$, $N < 0$ (只要一物种很多时, 两个物种都不能增加);

(3) 存在常数 $a > 0$, $b > 0$, 当 $x < a$ 时 $M(x,0) > 0$, 当 $x > a$ 时 $M(x,0) < 0$, 当 $y < b$ 时 $N(0,y) > 0$, 当 $y > b$ 时 $N(0,y) < 0$ (一物种没有的时候, 另一物种有正的增长率, 当该物种超过某限度时, 增长率为负);

(4) $M_x'(a,0) \neq 0$, $N_y'(0,b) \neq 0$.

由假设知, 当 $0 \leqslant x < a$ 时, $M(x,0) > 0, M(x,k) < 0$. 于是存在 $y = y(x)$, 使得 $M(x, y(x)) = 0$. 根据 $M(x,y)$ 关于 y 的单调性, 这个 y 是唯一的. 由 $M(a,0) = 0$, 得 $y(a) = 0$. 记曲线 $y = y(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$ 或 $M(x,y) = 0$ 为 μ. 它有以下性质 (图 7.4):

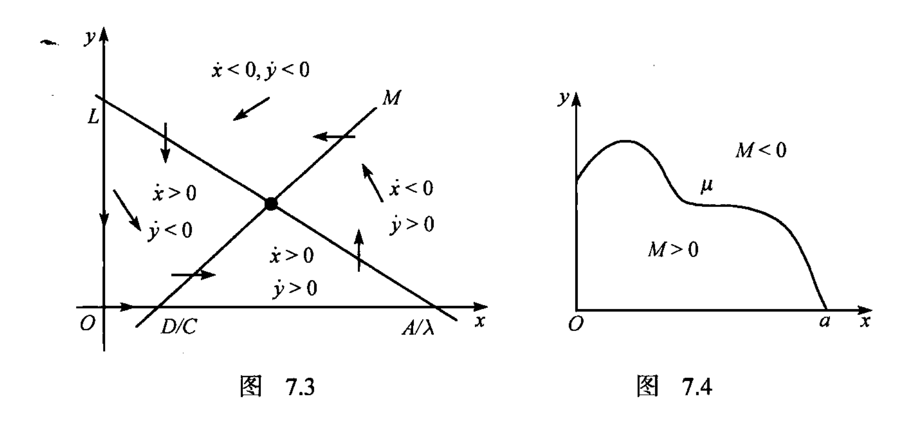


图 7.3 图 7.4

(1) 当 $0 \leqslant l \leqslant a$ 时, 铅直线 $x=l$ 与 μ 恰交于一点. 当 $l>a$ 时, 铅直线 $x=l$ 与 μ 不交;

(2) 当 $x \in [0,a]$ 时, $0 \leqslant y(x) \leqslant k$, 并且 $y(x) \in C^1[0,a]$;

(3) 第一象限中, 在 μ 的下方 $M>0$, 在 μ 的上方 $M<0$;

(4) $y'(a) \neq 0$, 因而 $y'(a)>0$, $M_x(a,0)>0$. 同理可证存在曲线 ν: $x=x(y)$ 或 $N(x,y)=0$ $(0 \leqslant y \leqslant b)$. 它有与曲线 μ 类似的性质 (图 7.5).

以下分两种情况进行讨论.

1. μ 与 ν 不相交

此时, 问题 (7.1) 仅有平衡点 $(0,0)$, $(a,0)$ 和 $(b,0)$, 因而在 $\mathbb{R}_+^2$ 中 (7.1) 无闭轨.

若 μ 在 ν 的上边, 则 $(0,0)$ 是源, $(0,b)$ 是鞍点, $(a,0)$ 是汇. 在 $\mathbb{R}_+^2$ 中画出方向场 (图 7.6). $\mathbb{R}_+^2$ 内所有轨线都趋于 $(a,0)$.

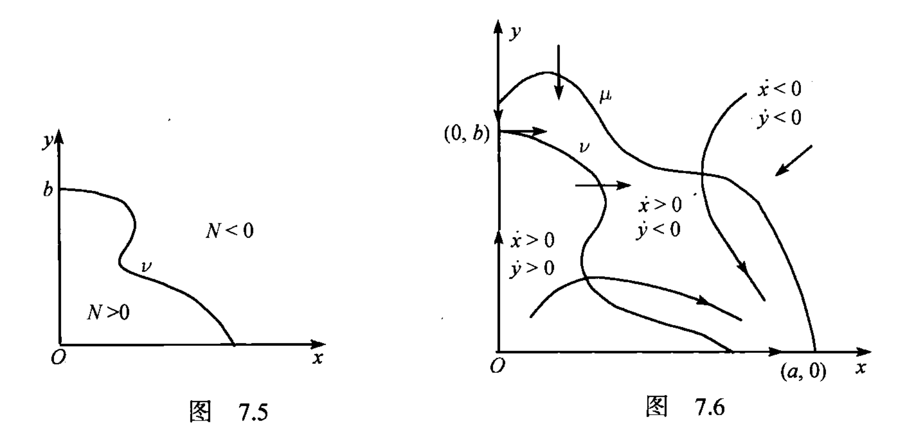


图 7.5 图 7.6

若 μ 在 ν 的下边, 则 $(0,0)$ 是源, $(a,0)$ 是鞍点, $(0,b)$ 是汇. $\mathbb{R}_+^2$ 内所有轨线都趋于 $(0,b)$ (图 7.7).

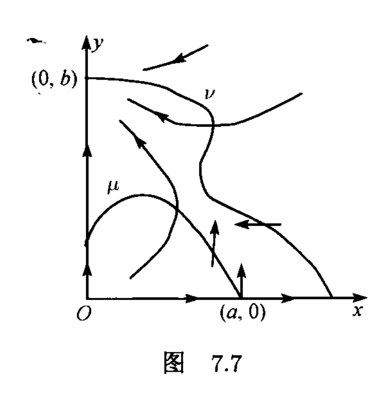


图　7.7

2. μ 与 ν 相交

设它们只有有限个交点. 于是曲线 μ,ν 与坐标轴将 $\mathbb{R}_+^2$ 分成有限个单连通区域, 在每个这种区域的内部 $\dot{x}$ 不变号, $\dot{y}$ 不变号, 称之为基本区域. 若在基本区域中 $\dot{x}\dot{y}>0$, 则称之为第一类基本区域. 若在基本区域中 $\dot{x}\dot{y}<0$, 则称之为第二类基本区域. 第一类基本区域为负不变集, 第二类基本区域为正不变集.

轨线是不能从坐标轴上某点进入或离开基本区域的, 只能从 μ 或 ν 上某点离开或进入这个区域. 例如在某基本区域 Ω 内 $\dot{x}<0,\dot{y}>0$, 由于 Ω 在 μ 的上方, ν 也在 μ 的上方, 因而在 ν 上有 $M(x,y)<0, N(x,y)=0$, 从 ν 上出发的轨线水平指向左方. 又因为 Ω 在 ν 的左方, 所以 μ 也在 ν 的左方, 因而在 μ 上有 $M(x,y)=0,N(x,y)>0$, 从 μ 上出发的轨线必垂直指向上方. 由此可见轨线通过此区域的边界时由外向内, 所以 Ω 是正不变集 (图 7.8)

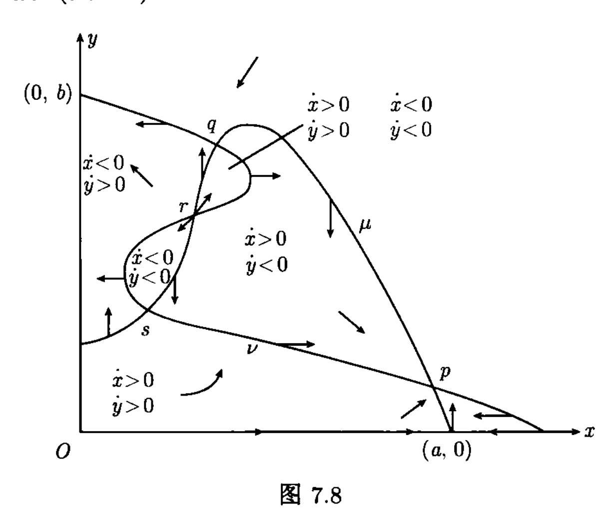


图 7.8

定理 7.1　方程 (7.1) 的每条轨线当 $t\to\infty$ 时趋于有限个平衡点之一.

7.3　一个互助型方程

现考虑一个最简单的互助型方程

$$\begin{cases} \dot{x}=(-a_{11}x+a_{12}y+b_1)x, \\ \dot{y}=(a_{21}x-a_{22}y+b_2)y, \end{cases} \tag{7.7}$$

其中 $a_{ij}>0\ (i,j=1,2)$, $b_1,b_2>0$.

假设

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

并且线性方程组

$$\begin{cases} -a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0, \\ a_{21}x - a_{22}y + b_2 = 0 \end{cases}$$

在 $\mathbb{R}_+^2$ 内有唯一解 $(\bar{x}, \bar{y})$ (即 $(\bar{x}, \bar{y}) > (0,0)$).

定理 7.2 设 $(x(t), y(t))$ 是 (7.7) 的解, $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) > (0,0)$, 则

$$\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y}).$$

8 n 维非线性系统平衡点的稳定性

8.1 稳定性概念

我们曾指出, 一个系统最重要的状态之一是它的平衡态, 然而若一个平衡态没有持久性, 它就没有多大意义. 例如, 单摆运动有两个平衡态, 即单摆处于最低点或最高点时, 前者是稳定的, 后者是不稳定的 (图 8.1). 在不稳定平衡点处, 小扰动能使系统越来越偏离这个点, 对于稳定平衡点则相反. 下面给出稳定性的定义.

图 8.1

考虑 n 维非自治系统

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{8.1}$$

也包含了它的特殊情形, 即 n 维自治系统

$$\dot{x} = f(x). \tag{8.2}$$

称 x_0 是 (8.1) 的平衡点, 若 $t \geqslant 0$ 时 $f(x_0, t) \equiv \theta$. 显然只需考虑 $x_0 = \theta$ 的情形.

以下假设在 $(x,t) \in \Omega \times [0,\infty)$ 或在 $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ 上 f 连续, 对 x 属于 C^1. 点 $x = \theta$ 是 (8.1) 的平衡点. 系统 (8.1) 满足初值 $x|_{t=t_0} = x_0$ 的解记为 $x = \varphi(t; t_0, x_0)$.

定义 8.1 设 $x = \theta$ 是 (8.1) 的平衡点.

(1) 若对任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $t_0 \geqslant 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, 使得当 $|x_0| < \delta$ 时, 对一切 $t \geqslant t_0$ 有

$$|\varphi(t; t_0, x_0)| < \varepsilon, \tag{8.3}$$

则称 $x = \theta$ 是 (局部) 稳定的;

(2) 若 $x=\theta$ 是 (局部) 稳定的, 此外对每个 $t_0 \geqslant 0$, 存在 $\delta_1=\delta_1(t_0)>0$, 当 $|x_0|<\delta_1$ 时有

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t;t_0,x_0)=\theta, \tag{8.4}$$

则称 $x=\theta$ 是 (局部) 渐近稳定的;

(3) 设 $x=\theta$ 是 (局部) 稳定的. 若对每个 $t_0\geqslant 0$ 及任意的 $x_0\in\mathbb{R}^n$ $(x_0\in\Omega)$, (8.4) 成立, 则称 $x=\theta$ 是全局渐近稳定的 (在区域 Ω 中是渐近稳定的).

定义 8.2　集合 $\{\xi:\xi\in\mathbb{R}^n$, 使得对某 $t_0\geqslant 0, \lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t;t_0,\xi)=\theta\}$ 称为 (8.1) 的平衡点 θ 的吸引区域.

稳定性的几何意义: 用 U_ε 表示相空间 $\mathbb{R}^n$ 中原点的邻域, 下标是邻域的半径. 任给一个邻域 U_ε, 都存在一个邻域 U_δ, 使得从 U_δ 内出发的轨线都永远在 U_ε 内 (图 8.2).

定义 8.3　设 $x=\theta$ 是 (8.1) 的平衡点.

(1) 若定义 8.1(1) 中的 δ 与 t_0 无关, 则称 $x=\theta$ 是一致 (局部) 稳定的;

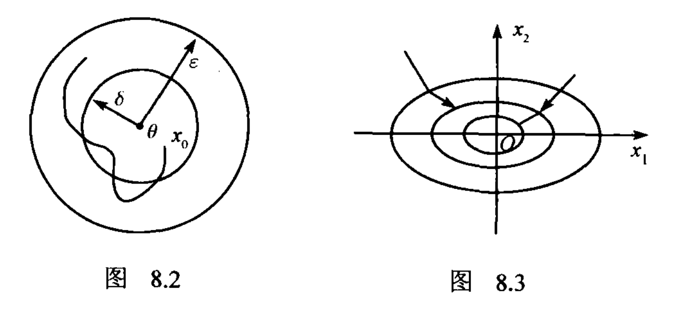


图 8.2　　图 8.3

(2) 设 $x=\theta$ 是一致稳定的. 若存在 $\delta>0$, 使得对任意 $\varepsilon>0$ 和 $t_0\in[0,\infty)$, 存在 $T(\varepsilon)>0$, 当 $t\geqslant t_0+T(\varepsilon), |x_0|<\delta$ 时有 (8.3) 成立, 则称 $x=\theta$ 是一致 (局部) 渐近稳定的;

(3) 若 $x=\theta$ 是一致稳定的, 又对任意 $r>0, \varepsilon>0$ 和 $t_0\geqslant 0$, 存在与 t_0 无关的 $T(r,\varepsilon)>0$, 使得当 $t\geqslant t_0+T(r,\varepsilon)$, $|x_0|<r$ (或 $|x_0|<r, x_0\in\Omega$) 时有 (8.3) 成立, 则称 $x=\theta$ 是全局一致渐近稳定的.

定义 8.4　设 $x=\theta$ 是 (8.1) 的平衡点.

(1) 若存在 $\alpha>0$, 使得对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta(\varepsilon)>0$, 当 $|x_0|<\delta(\varepsilon), t\geqslant t_0$ 时有

$$|\varphi(t;t_0,x_0)|\leqslant\varepsilon\cdot\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)},$$

其中 $t_0\geqslant 0$, 则称 $x=\theta$ 是指数 (渐近) 稳定的;

(2) 若存在 $\alpha>0$, 对任意 $r>0$, 存在 $K(r)>0$, 使得当 $|x_0|<r$ (或 $|x_0|<$

$r, x_0 \in \Omega$), $t \geqslant t_0$ 时有

$$|\varphi(t; t_0, x_0)| \leqslant K(r)|x_0|e^{-\alpha(t-t_0)},$$

其中 $t_0 \geqslant 0$, 则称 $x = \theta$ 是全局指数 (渐近) 稳定的.

定义 8.5 若系统 (8.1) 的平衡点 $x = \theta$ 不是稳定的, 则称它为不稳定的.

8.2 Lyapunov 函数

装在弹簧上质量为 m 的质点的运动方程是

$$m\ddot{x} + \mu\ddot{x} + kx = 0, \tag{8.5}$$

其中 $\mu \geqslant 0$ 为阻尼系数, $k > 0$ 为弹性系数. 方程 (8.5) 等价于

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{k}{m}x - \frac{\mu}{m}y.$$

它有唯一平衡点 (0,0). 从直观上看 (0,0) 应是稳定的. 该系统的动能是 $\frac{1}{2}my^2$, 势能是 $\int_0^x kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2$, 总能量是

$$E(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

总能量 $E(x,y)$ 在平衡点 (0,0) 处取最小值, 因而应该是稳定的. 沿着轨线 $x = x(t), y = y(t)$, 考察能量的变化:

$$\frac{\mathrm{d}E(x(t), y(t))}{\mathrm{d}t} = my\dot{y} + kx\dot{x} = -\mu y^2 \leqslant 0,$$

即 t 增加时能量是不增的.

对于 (8.1), 引进一个函数 $V(x,t)$, 它类似于能量函数.

定义 8.6 设在 U_h (或 $\mathbb{R}^n$) 上 $V(x)$ 是实连续的, 且

(1) $V(\theta) = 0$;

(2) $V(x) > 0$ ($\geqslant 0$) ($x \neq \theta$).

则称 $V(x)$ 是正定的 (半正定的). 若 $-V(x)$ 是正定的 (半正定的), 则称 $V(x)$ 是负定的 (半负定的).

定义 8.7 设在某区间 $[0, h]$ (或 $[0, \infty)$) 上 $a(r)$ 是实值连续严格上升的函数且 $a(0) = 0$, 则称 $a(r)$ 属于 K 类, 记为 $a(r) \in K[0, h]$ (或 $a(r) \in K[0, \infty)$). 若 $a(r) \in K[0, \infty)$ 且 $\lim\limits_{r \to \infty} a(r) = \infty$, 则称 $a(r)$ 属于 KR 类, 记为 $a(r) \in KR$.

定义 8.8 设 $V(x,t)$ 在 $U_h \times [0, \infty)$ 或 $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ 上连续, 且满足:

(1) $V(\theta, t) = 0$;

(2) $V(x,t) \geqslant a(|x|)$, $a(r) \in K[0,h]$ 或 $K[0,\infty)$ ($V(x,t) \geqslant 0$), 则称 $V(x,t)$ 是正定的 (半正定的).

若 $-V(x,t)$ 是正定的 (半正定的), 则称 $V(x,t)$ 是负定的 (半负定的).

注 8.1 设 $V(x)$ 在 U_h 上是正定的. 易证, 存在 $a(r) \in K[0,h]$, 使得 $V(x) \geqslant a(|x|)$, $x \in U_h$. 因此定义 8.6 是定义 8.8 特例.

定义 8.9 设 $V(x,t)$ 定义在 $U_h \times [0,\infty)$ (或 $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$) 上, 满足:

(1) $V(x,t)$ 是正定的;

(2) $V(x,t)$ 在 $(U_h/\{\theta\}) \times [0,\infty)$ (或 $\mathbb{R}^n/\{\theta\} \times [0,\infty)$) 连续可微;

(3) $\dot{V} \equiv \dfrac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x,t) + \dfrac{\partial V}{\partial t} \leqslant 0$.

则称 $V(x,t)$ 是 (8.1) 的 Lyapunov 函数.

若条件 (3) 改为

$$\dot{V}(x,t) \leqslant -\omega(|x|),$$

其中 $\omega(r) \in K[0,h]$ (或 $K[0,\infty)$), 则称 $V(x,t)$ 是 (8.1) 的严格 Lyapunov 函数.

类似可定义自治系统 (8.2) 的 Lyapunov 函数 $V(x)$, 这时

$$\dot{V}(x) \equiv \nabla V(x) \cdot f(x).$$

假设系统 (8.1) 在 $U_h \times [0,\infty)$ 上存在 Lyapunov 函数 $V(x,t)$, $\varphi(t;t_0,x)$ 是 (8.1) 的解, 在解的存在区间上 $\varphi(t;t_0,x) \in U_h$. 按定义则有

$$\frac{\mathrm{d}V(\varphi(t;t_0,x_0),t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V(\varphi(t;t_0,x_0),t)}{\partial t} + \frac{\partial V(\varphi(t;t_0,x_0),t)}{\partial x} \cdot f(\varphi(t;t_0,x_0),t) \leqslant 0.$$

于是 $V(\varphi(t;t_0,x_0),t)$ 对 t 单调不增.

下面考察严格 Lyapunov 函数的几何意义.

设有二维自治系统 $\dot{x} = f(x)$, $x = \theta$ 是它的平衡点, 对每一 $(x_0,t_0)(t_0 \geqslant 0)$, 方程有唯一解 $x = \varphi(t;t_0,x_0)$. 又设当 $|x| < h$ 时 $V(x)$ 是该系统的 Lyapunov 函数, 则 $z = V(x) = V(x_1,x_2)$ 是开口向上的曲面. 对充分小的 $c > 0$, $V(x) = c$ 是一族闭曲线. 当 $0 < c_1 < c_2$ 时, $V(x) = c_1$ 在 $V(x) = c_2$ 所围区域内, 当 $c \to 0$ 时, $V(x) = c$ 缩成一点即原点. 闭曲线 $V(x) = c$ 的外法向是 $\nabla V(x)$, 解曲线 $x = \varphi(t;t_0,x_0)$ 指向 t 增加方向的切向量是 $\dot{x} = \varphi(t;t_0,x_0) = f(\varphi(t;t_0,x_0),t)$. 于是

$$\dot{V}(\varphi(t;t_0,x_0),t) = \nabla V(\varphi(t;t_0,x_0)) \cdot f(\varphi(t;t_0,x_0)) < 0,$$

即解曲线指向 t 增加方向的切向量与曲线 $V(x) = C$ 的外法向在交点处的夹角大于 $\pi/2$, 曲线进入闭曲线 $V(x) = c$ 所围区域的内部 (图 8.3). 由此可知 $x = \theta$ 是渐近稳定的.

8.3 判别稳定性的 Lyapunov 方法

现在利用 Lyapunov 函数给出各种稳定性的判别准则.

定理 8.10 若存在原点邻域 U_h, 在 $U_h \times [0,\infty)$ 上 (8.1) 存在 Lyapunov 函数 $V(x,t)$, 则 $x=\theta$ 是稳定的. 若 $V(x,t)$ 又满足

$$V(x,t) \leqslant b(|x|), \quad |x| \leqslant h, \quad t \geqslant 0,$$

其中 $b(r) \in K[0,h]$, 则 $x=\theta$ 是一致稳定的.

定理 8.11 若存在原点邻域 U_h, 在 $U_h \times [0,\infty)$ 上 (8.1) 有严格 Lyapunov 函数 $V(x,t)$, 而且还存在 $b(r) \in K[0,h]$, 使得

$$V(x,t) \leqslant b(|x|), \quad |x| \leqslant h, \quad t \geqslant 0,$$

则 $x=\theta$ 是一致渐近稳定的.

定理 8.12 若在 $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ 上 (8.1) 存在严格的 Lyapunov 函数 $V(x,t)$, 而且存在 $a(r), b(r) \in KR$, 使得

$$a(|x|) \leqslant V(x,t) \leqslant b(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0,$$

则 $x=\theta$ 是全局一致渐近稳定的.

定理 8.13 假设存在原点邻域 U_h, 在 $U_h \times [0,\infty)$ 上 (8.1) 存在严格的 Lyapunov 函数 $V(x,t)$, 满足:

$$k_1|x|^2 \leqslant V(x,t) \leqslant k_2|x|^2, \quad |x| < h, \quad t \geqslant 0,$$

$$\dot{V}(x,t) \leqslant -k_3|x|^2, \tag{8.6}$$

其中 k_i $(i=1,2,3)$ 为正的常数, 则 $x=\theta$ 是指数渐近稳定的. 若 (8.6) 当 $x \in \mathbb{R}^n, t \geqslant 0$ 时成立, 则 $x=\theta$ 是全局指数渐近稳定的.

对于自治系统, 也有相应的定理. 它是上述定理的特殊情形. 这时只需注意: 若 $V(x)$ 是正定的, 则存在 $b(r) \in K$, 使得 $V(x) \leqslant b(|x|)$. 因此可得

推论 8.14 若在某 U_h 上 (8.2) 存在 Lyapunov 函数 (严格的 Lyapunov 函数), 则 $x=\theta$ 是一致稳定的 (一致渐近稳定的).

推论 8.15 若在 $\mathbb{R}^n$ 上 (8.2) 存在严格的 Lyapunov 函数 $V(x)$, 且有 $a(r) \in KR$ 使得

$$a(|x|) \leqslant V(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

则 $x=\theta$ 是全局一致渐近稳定的.

定理 8.16 假设对于系统 (8.1), 存在函数 $V(x,t)$ 在 $U_h \times [0,\infty)$ 上连续, 在 $(U_h/\{\theta\}) \times [0,\infty)$ 上连续可微, 且满足:

(1) 存在 $T>0$, 对任意 $\delta>0$, $\delta\leqslant h$, 存在区域

$$D=\{(x,t):(x,t)\in U_\delta\times[T,\infty),\quad V(x,t)>0\},$$

使得在 D 上函数 V 有界;

(2) 在 D 内 $\dot V>0$, 且对任意正数 α, 存在 $l=l(\alpha)>0$, 使得当 $(x,t)\in D$, $V(x,t)\geqslant\alpha$ 时, 有 $\dot V\geqslant l$.

那么, $x=\theta$ 是不稳定的.

8.4　常系数线性系统的稳定性

为了通过线性化方程来判断非线性方程零解的稳定性, 先研究常系数线性系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax, \tag{8.7}$$

其中 A 是 $n\times n$ 常数矩阵.

定理 8.17　对于 (8.7), $x=\theta$ 稳定 (一致稳定) 的充要条件是: 存在常数 M_0, 使得

$$\|\mathrm{e}^{A(t-t_0)}\|\leqslant M_0,\quad \forall\, t\geqslant t_0,$$

其中 $\|\cdot\|$ 为矩阵的范数.

定理 8.18　对于 (8.7), $x=\theta$ 渐近稳定 (一致渐近稳定) 与下列条件之一等价:

(1) 存在常数 $\alpha>0$, $M_1>0$, 使得

$$\|\mathrm{e}^{A(t-t_0)}\|\leqslant M_1\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)},\quad \forall\, t\geqslant t_0;$$

(2) $x=\theta$ 是指数稳定的 (全局指数稳定的);

(3) 系数矩阵 A 的所有特征根具有负的实部. 这时称矩阵 A 为稳定的.

若矩阵 A 是稳定的, 还可构造 (8.7) 的严格 Lyapunov 函数. 令

$$V(x)=x^{\mathrm{T}}Bx,$$

其中 B 是正定矩阵, 则

$$\dot V=x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}B+BA)x.$$

若可取 B, 使得

$$A^{\mathrm{T}}B+BA=-I, \tag{8.8}$$

其中 I 是单位矩阵, 则

$$\dot V=-|x|^2.$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}\mathrm{e}^{tA})=A^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}\mathrm{e}^{tA}+\mathrm{e}^{tA^{\mathrm{T}}}\mathrm{e}^{tA}A, \tag{8.9}$$

由于 A 是稳定的, 故 $\int_0^\infty e^{tA^T}e^{tA}dt$ 收敛. 将 (8.9) 积分得 (8.8), 其中

$$B=\int_0^\infty e^{tA^T}e^{tA}dt.$$

显然 B 是对称的, 且

$$x^TBx=\int_0^\infty x^Te^{tA^T}e^{tA}xdt=\int_0^\infty |e^{tA}x|^2dt,$$

即 B 是正定的.

8.5　判别稳定性的线性化方法

现在考虑非线性系统

$$\dot{x}=Ax+g(x,t), \tag{8.10}$$

其中 A 是 $n\times n$ 常数矩阵, Ax 是 (8.10) 右端的线性部分, $g(x,t)$ 是 x 的高阶项.

定理 8.19　设 A 是 $n\times n$ 稳定的常数矩阵, 又 $g:U_h\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ 是连续的, 并满足

$$g(x,t)=o(|x|),\quad 当\ |x|\to 0\ 时 \tag{8.11}$$

对 $t\in[0,\infty)$ 一致成立, 则对于 (8.10), $x=\theta$ 是指数稳定的.

注 8.2　若 (8.11) 成立, 但 A 至少有一个特征值的实部是正的, 则对于 (8.10), $x=\theta$ 是不稳定的.

注 8.3　设 (8.11) 成立, A 的特征值中没有实部为正的, 但却有实部为零的, 这种情形称为临界情形. 这时可以有 g, 使得 $x=\theta$ 是稳定的, 也可以有 g 使得 $x=\theta$ 是不稳定的.

习　题

1　设 $f\in C([0,b];\mathbb{R}))$, $f(v)>0(v\in(0,b))$, $f(0)=0, v_0\in[0,b)$. 证明初值问题

$$\begin{cases}\dot{v}+f(v)=0,\\ v(0)=v_0\end{cases}$$

的最大解 $v_M(t)$ 的存在区间是 $[0,\infty)$, 且

$$\lim_{t\to\infty}v_M(t)=0.$$

2　设 $f\in C(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ 且

$$|f(x,t)|\leqslant K_1|x|+K_2,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R},$$

其中 K_1, K_2 为正的常数. 证明初值问题

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

解的存在区间是 $(-\infty,\infty)$, 其中 $x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 \in \mathbb{R}$ 是任意的.

3　设 $\bar{G}$ 是 (x,t) 空间中的有界闭区域, $f \in C(\bar{G};\mathbb{R}^n)$, Ω 是 $\bar{G}$ 中的闭子域. 若对任意 $(\xi,\tau) \in \Omega$, 初值问题

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t), \\ x(\tau) = \xi \end{cases}$$

在 $[a,b]$ 上有唯一解 $x = \varphi(t;\xi,\tau)$, 证明 $\varphi \in C([a,b] \times \Omega)$.

4　证明引理 3.1 与引理 3.2.

5　证明引理 3.8.

6　证明定理 3.12.

7　确定下列系统的平衡点及其类型:

(1) $\dot{x} = y,\ \dot{y} = a(1-x^2)y - bx \quad (a \geqslant 0, b > 0)$;

(2) $\dot{x} = y,\ \dot{y} = -ay - b\sin x \quad (a \geqslant 0, b > 0)$;

(3) $\dot{x} = my + \alpha x(x^2+y^2),\ y = -my + \alpha y(x^2+y^2) \quad (m^2+\alpha^2 \neq 0)$.

8　证明 $(0,0)$ 是系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \varepsilon xy - x \end{cases}$$

的中心.

9　设 $f \in C^1$, $f(a) = 0$, $f'(a) < 0$. 证明 $(a,0)$ 是

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -cy - f(x)$$

的鞍点, 并求 $(a,\ 0)$ 处稳定流形与不稳定流形的方向.

10　在平衡点附近利用线性化方程画出平衡点附近的草图:

(1) $\dot{x} = x - y,\ \dot{y} = x^2 - 1$;

(2) $\dot{x} = -x + \mathrm{e}^{-y} - 1,\ \dot{y} = 1 - \mathrm{e}^{x+y}$.

11　画出下列方程的相图

(1) $\ddot{x} + \alpha\sin x = 0$;　　(2) $\ddot{x} = x^3 - x$.

12　检验三维系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = 1 - (x^2+y^2)$$

无平衡点, 但有闭轨.

13　证明下列系统无闭轨:

(1) $\ddot{x}+c\dot{x}+f(x)=0$, 其中常数 $c\neq 0$, $f\in C^1$;

(2) $\begin{cases}\dot{x}=x,\\ \dot{y}=1+x+y^2;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dot{x}=x(y-1),\\ \dot{y}=x+y-2y^2;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\dot{x}=1-x^3+y^2,\\ \dot{y}=2xy;\end{cases}$

(5) $\begin{cases}\dot{x}=2x(1+x^2-2y^2),\\ \dot{y}=-y(1-4x^2+3y^2).\end{cases}$

14　若 p,q 在同一条轨线上, 证明: $L_\infty(p)=L_\infty(q)$, $L_\alpha(p)=L_\alpha(q)$.

注: $\varphi(t,p)$ 的 ω (或 α) 极限集 $L_\infty(p)$ ($L_\alpha(p)$) 又称为轨线 $\Gamma(p)$ 的 ω (或 α) 极限集 $L_\infty(\Gamma(p))$ ($L_\alpha(\Gamma(p))$).

15　设一个三维系统在球坐标系下为

$$\dot{\theta}=1,\quad \dot{\varphi}=\pi,\quad \dot{\rho}=\rho(\sin\theta+\pi\sin\varphi).$$

若 $\theta(0)$=0, $\varphi(0)=0$, $\rho(0)=1$ 对应的轨线为 Γ, 证明:

(1) Γ 有界, 不是闭轨;

(2) $L_\infty(\Gamma)$ 与 $L_\alpha(\Gamma)$ 均存在, 既不是闭轨也不含平衡点.

16　证明定理 6.20.

17　设 $x=\theta$ 是 n 维系统

$$\dot{x}=f(x)$$

的平衡点. 若解 $x=\varphi(t,x_0)$ 满足 $x_0\neq\theta$, $\lim\limits_{t\to-\infty}\varphi(t,x_0)=\theta$, 证明 $x=\theta$ 是不稳定的.

18　证明定理 8.13.

19　利用 Lyapunov 方法判断下列系统零解的稳定性:

(1) $\begin{cases}\dot{x}=-x+y-3y^2-\dfrac{1}{4}x^3,\\ \dot{y}=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{2}y-2y^3;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}\dot{x}=-xy^4,\\ \dot{y}=x^4y;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dot{x}=-3x+xy^4-x^3y^6,\\ \dot{y}=-\dfrac{1}{2}x^2y-\dfrac{1}{4}y^3;\end{cases}$　(4) $\begin{cases}\dot{x}=x-xy^4,\\ \dot{y}=y-x^2y^3;\end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}xy^2, \\ \dot{y} = -\dfrac{3}{4}y + 3xz^2, \\ \dot{z} = -\dfrac{2}{3}z - 2xyz^2; \end{cases}$　(6) $\begin{cases} \dot{x} = -x - 3y + 2z + yz, \\ \dot{y} = 3x - y - z + xz, \\ \dot{z} = -2x + y - z + xy. \end{cases}$

20　讨论下列系统的平衡点的稳定性.

(1) $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x^2 - 1; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{e}^{-x-3y} - 1, \\ \dot{y} = -x(1 - y^2). \end{cases}$

参 考 文 献

[A] Adams R A. *Sobolev Spaces.* Academic Press, 1975 (中译本: 叶其孝等译. 索伯列夫空间. 人民教育出版社, 1981).

[ACP] Aronson D, Crandall G and Peletier L A. *Stabilization of solutions of a degenerate nonlinear problem.* Nonlinear Anal., 1982, 6: 1001-1022.

[ADN] Agmon S, Douglis A and Nirenberg L. *Estimates near the boundary for the solutions of elliptic differential equations satisfying general boundary values.* J. Comm. Pure Appl. Math., 12(1959), 623-727; II. Comm. Pure Appl. Math., 1964, 17: 35-92.

[AGJ] Alexander J, Gardner R A and Jones C K R T. *A topological invariant arising in the stability of travelling waves.* J. Reine Angew. Math., 1990, 410: 167-212.

[Am] Amann H.

1. *A uniqueness theorem for nonlinear elliptic boundary value problems.* Arch. Rational Mech. Anal., 1967, 44: 178-181.

2. *Existence of multiple solutions for nonlinear elliptic boundary value problems.* Indiana Univ. Math. J., 1972, 21: 925-935.

3. *Periodic solutions of semilinear parabolic equations, Nohlinear anelysis: A collection of papers in honor of Erich H. Rothe*, Edited by Cesari L, Kannan R and Weinberger H F. Academic Press, 1978.

4. *Invariant sets and existence theorems for semilinear parabolic and elliptic equations.* J. Math. Anal. Appl., 1978, 65: 432-467.

5. *Dynamic theory of quasilinear parabolic equations, II. Reaction-diffusion systems.* Differential Integral Equations. 1990, 3: 13-75.

[AW] Aronson D G and Weinberger H F.

1. *Nonlinear diffusion in population genetics, combustion adn nerve propagation.* Lecturc Notes in Mathematics. Springer 1975, 446: 5-49.

2. *Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics.* Adv. in Math., 1978, 30: 33-76.

[B] Bramson M. *Convergence of solutions of the Kolmogorov equation of travelling waves.* Mem. Amer. Math. Soc., 1983, 285.

[BC] Brunovsky P and Chow Shui-nee. *Generic properties of stationary state soluations of reaction-diffusion equations.* J. Differentical Equations, 1984, 53: 1-23.

[BDG] Brown K J, Dunne P C and Gardner R A. *A semilinear parabolic system arising in the theory of superconductivity.* J. Differentical Equations, 1981, 40: 212-252.

[BN] Billingham J and Needham D J. *A note on the properties of a family of traveling wave solutions arising in cubic autocatalysis.* Dyn. Stab. Syst., 1991, 6: 33-49.

[BNS] Berestycki H, Nicolaenko B and Scheurer B.

1. *Wave solutions to reaction-diffusion systems modeling combustion.* Nonlinear Partial Differential Equations (Smoller J ed.). Contemporary Mathematics, 1983, 17: 189-208.

2. *Travelling wave soluations to combustion models and their singular limits.* SIAM J. Math. Anal., 1985, 16: 1207-1242.

[Ch] 陈文嫄. 非线性泛函分析. 甘肃人民出版社, 1982.

[Che] Chen X F. *Existence, uniqueness and asymptotic stability of traveling waves in nonlocal evolution equations.* Adv. Differetnial Equations, 1997, 2: 125-160.

[CCS] Chueh K, Conley C and Smoller J. *Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations.* Indiana Univ. Math. J., 1977, 26: 373-392.

[CH] Casten R G and Holland C J. *Instability results for a reaction diffusion equation with Neumann boundary conditions.* J. Differential Equations, 1978, 27: 266-273.

[ChH] Chipot M and Hale J. *Stable equilibria with variable diffusion.* Nonlinear Partial Differential Equations (J. Smoller ed.), Contemporary Mathematics, 1983, 17: 209-213.

[CoH] Courant R and Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics.* vol.1-2. Wiley-Interscience, 1984 (中译本: 钱敏等译. 数学物理方法 I. 科学出版社, 1958; 数学物理方法 II. 科学出版社, 1977).

[CI] Chafee N and Infante E F. *A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type.* Applicable Anal., 1974, 4: 17-37.

[CM] Capasso V and Maddalena L. *Convergence to equilibrium states for reaction-diffusion system modeling the spatial spread of a class of bacterial and viral diseases.* J. Math. Biol., 1981, 13: 173-184.

[CQW] Chen X F, Qi Y W and Wang M X.

1. *A strongly coupled predator-prey system with non-monotonic functional response.* Nonlinear Anal., 2007, 67(6): 1966-1979.

2. *Steady states of a strongly coupled prey-predator model.* Discrete Contin. Dyn. Syst., Suppl., 2005: 173-180.

[D] Dancer E N.

1. *On the indexes of fixed point of mapping in cones and applications.* J. Math. Anal. Appl., 1983, 91: 131-151.

2. *On positive solutions of some pais of differential equations.* J. Differential Equations, 1985, 60: 236-258.

[DD] Dancer E N and Du Y H. *Effects of certain degeneracies in the predator-prey model.* SIAM J. Math. Anal., 2002, 34(2): 292-314.

[Du] Du Y H.

1. *Effects of a degeneracy in the competition model. I. Classical and generalized steady-state solutions.* J. Differential Equations, 2002, 181(1): 92-132.

2. *Effects of a degeneracy in the competition model. II. Perturbation and dynamical behaviour.* J. Differential Equations, 2002, 181(1): 133-164.

3. *Order Structure and Topological Methods in Nonlinear PDEs.* vol.1. Maximum Principle and Applications. Singapore: World Scientific, 2005.

[Dun] Dunbar S T. *Travelling wave solutions of diffusive Volterra-Lotka interaction equations.* Ph. D. Thesis, Univ. of Minnesota, 1981.

[DH] Du Y H and Hsu S B. *A diffusive predator-prey model in heterogeneous environment.* J. Differential Equations, 2004, 203(2): 331-364.

[DS] Dunford N and Schwartz J T. *Linear Operators.* Part I and II. Wiley-Interscience, 1966.

[DW] Du Y H and Wang M X. *Asymptotic behavior of positive steady-states to a predator-prey model.* Proc. Royal Soc. Edinburgh A, 2006, 136(4): 759-778.

[E] Evans J W.

1. *Nerve axon equations: I. Linear approximations.* Indiana Univ. Math. J., 1972, 21: 877-885.

2. *Nerve axon equations: II. Stability at rest.* Indiana Univ. Math. J., 1972, 22: 75-90.

3. *Nerve axon equations: III. Stability of nerve impulse.* Indiana Univ. Math. J., 1972, 22: 577-593.

4. *Nerve axon equations: IV. The stable and unstable impulse.* Indiana Univ. Math. J., 1975, 24: 1169-1190.

[EK] Egorov Y and Kondratiev V. *On Spectral Theory of Elliptic Operators.* Birkhäuser Verlag, 1996.

[F] Fife P C.

1. *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems.* Lecture Notes in Biomathematics, 1979, 28.

2. *Asymptotic analysis of reaction-diffusion wave fronts.* Rocky Mountain J. Math., 1977, 7: 389-415.

[Fis] Fisher R A.

1. *The genetical theory of natural selection.* Oxford University Press, 1930.

2. *The wave of advance of advantageous genes.* Annals of Eugenics, 1937, 7: 353-369.

[Fr] Friedman A. *Partial Differential Equations.* Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.

[FL] de Figueiredo D G and Lions P L. *On pairs of positive solutions for a class of semilinear elliptic problems.* Indiana Univ. Math. J., 1985, 34: 591-606.

[FLN] de Figueiredo D G, Lions L and Nussbaum R D. *A priori estimates and existence of*

positive solutions of semilinear elliptic equations. J. Math. Pures Appl., 1982, 81: 41-63.

[FM] Fife P C and McLoed J B.

1. *The approach of solutions of nonlinear diffusion equation to travelling front solutions.* Arch. Rational Mech. Anal., 1977, 65: 335-361.

2. *A phase plane discussion of convergence to travelling fronts for nonlinear diffusion.* Arch. Rational Mech. Anal., 1981, 75: 281-314.

[FT] Field R J and Troy W C. *The existence of solitary travelling wave solutions of a model of the Belousov-Zhabotinskii reaction.* SIAM J. Appl. Math., 1979, 37: 561-587.

[FTa] Fife P C and Tang M M. *Comparison principles for reaction-diffusion systems: irregular comparison functions and applications to questions of stability and speed of propagation of disturbances.* J. Differential Equations, 1981, 40: 168-185.

[Ga] Gardner R A. *Existence of travelling wave solutions of predator-prey systems via the connection index.* SIAM J. Appl. Math., 1984, 44: 56-79.

[Go] Goodman J. *Nonlinear asymptotic stability of viscous shock profiles for conservation laws.* Arch. Rat. Mech. Anal., 1986, 95: 325-344.

[Gu] 关肇直. *泛函分析讲义.* 高等教育出版社, 1958.

[GJ] Gardner R A and Jones C R K T. *Stability of travelling wave solutions of diffusive predator-prey systems.* Trans. Amer. Soc., 1991, 327: 465-524.

[GS] Giorgi T and Smits R G. *Monotonicity results for the principal eigenvalue of the generalized robin problem.* Illinois J. Math., 2005, 49(4): 1133-1143.

[GZ] Gardner R A and Zumbrun K. *The gap lemma and geometric criteria for instabiltiy of viscous shock profiles.* Comm. Pure Appl. Math., 1998, 51: 797-855.

[GZF] 关肇直, 张恭庆, 冯德兴. *线性泛函分析入门.* 上海科学技术出版社, 1979.

[Hag] Hagan P S. *The stability of travelling wave solutions of parabolic equations.* Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, 1979.

[Has] Hastings S P. *Some mathematical problems from neurobiology.* Amer. Math. Monthly, 1975, 82: 881-895.

[Hen] Henry D. *Geometric theory of semilinear parabolic equations.* Lecture Notes in Mathematics. vol.840. Springer, 1981.

[Her] Hernandez J. *Some existence and stability results for solutions of reaction-diffusion systems with nonlinear boundary conditions.* Nonlinear Differential Equation: Invariance, Stability, and Bifurcation, Edited by de Mottoni P and Salvadori L, 161-173, Academic Press, 1981.

[Hes] Hess P. *On multiple positive solutions of nonlinear ellipticeigenvalue problems.* Comm. Partial Differential Equations, 1981, 6: 951-961.

[Hu] Huang F L. *Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces.* Ann. Differential Equations, 1985, 1: 43-56.

[HL] Hou X J and Li Y. *Travelling wave solutions for a reaction diffusion equation with double degenerate nonlinearities.* Discrete Contin. Dyn. Syst., 2010, 26: 265-290.

[HR] Hadeler K P and Rothe F. *Travelling fronts in nonlinear diffusion equations.* J. Math. Biol., 1975, 2: 251-263.

[HZ] Howard P and Zumbrun K. *The Evans function and stability criteria for degenerate viscous shock waves.* Discrete Contin. Dyn. Syst., 2004, 10: 837-855.

[IMN] Ikeda H, Mimura M and Nishiura Y. *Global bifurcation phenomena of travelling wave solutions for some bistable reaction-diffusion systems.* Nonlinear Anal., 1989, 13: 507-526.

[JLY] Jin H, Li Z Y and Ye Q X. *Positiveness theorems of solutions for several differential inequalities and their applications.* Acta Math. Sci. Engl. Ser., 2002, 22(2): 227-240.

[J] Jones C K R T. *Stability of the travelling wave solution of the Fitzhugh-Nagumo system.* Trans. Amer. Math. Soc., 1984, 286: 431-469.

[JGK] Jones C K R T, Gardner R A and Kapitula T. *Stability of travelling waves for non-convex scalar viscous conservation laws.* Comm. Pure Appl. Math., 1993, 46: 505-526.

[Ka] Kanel Ya I. *On the stabilization of solutions of the Cauchy problem for equations arising in the theory of combustion.* Math. USSR-Sb, 1962, 59: 245-288.

[Kan] Kan-on Y.

1. *Stability of singularly perturbed solutions to nonlinear diffusion systems arising in population dynamics.* Hiroshima Math. J., 1993, 23: 509-536.

2. *Existence and instability of Neumann layer solutions for a 3-component Lotka-Volterra model with diffusion.* J. Math. Anal. Appl., 2000, 243: 357-372.

[Kat] Kato T. *Perturbation Theory for Linear Operator.* corrected printing of 2th edition. Springer Verlag, 1995.

[KM] Kan-on Y and Mimura M. *Singular perturbation approach to a 3-component reaction-diffusion system arising in population dynamics.* SIAM J. Math. Anal., 1998, 29: 1519-1536.

[KR] Kirchgässner K and Raugel G. *Stability of fronts for a KPP-system II - the critical case.* J. Differential Equations, 1998, 146: 399-456.

[KT] Klaasen G and Troy W. *The stability of travelling front solutions of reaction-diffusion systems.* SIAM J. Appl. Math., 1981, 41(1): 145-167.

[KPP] Kolmogorov A, Petrovskii I and Piscounov N. *Étude de l'equation de la chaleur avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique.* Bull. Univ. État Moscou, 1937, 6(1): 1-25. *Study of the diffusion equation with growth of the quantity of matter and its application to a biological problem.* In Dynamics of Curved Fronts. Pelcé R Ed.. Perspectives in Physics Series. New York: Academic Press, 1988: 105-130.

[Le] Lemmert R. *Uber die invarianz konvexer teilemngen eines nomieten raumes in bezug auf elliptisch differentialgleichungen.* Comm. Partial Differential Equations, 1978, 3: 297-318.

[Li] 李正元.

1. 扩散反应方程的控制方程及其应用. 北京大学学报 (自然科学版), 1984, 4: 13-26.

2. 互助 - 竞争型扩散反应方程解的渐近性质. 应用数学学报, 1984, 7: 437-456.

[LWWY] Li Z Y, Wang M X, Wu Y P and Ye Q X. *Traveling wave solutions for reaction-diffusion equations.* Nonlinear Anal., 1997, 30(6): 3417-3426.

[LY] Li Z Y and Ye Q X. *Monotonocity of traveling wave solutions for reaction-diffusion systems and its applications.* Beijing Math., 1995, 1(1): 210-223.

[LYY] Li Z Y, Yang Z P and Ye Q X. *Some persistence and stability result for a competitor-competitor-mutualist model.* Acte Sci. Nat. Univ. Pekinensis, 1988, 24(1): 1-12.

[LY] Li Z Y and Ye Q X. *Traveling wave front solutions for reaction-diffusion systems.* J. Partial Differential Equations, 1991, 4(3): 1-14.

[Lia] Liang J. *Reaction-diffusion systems without monotone conditions.* Advances in Mathematics, 1985, 14: 73-75.

[Lin] 林源渠.

1. 反应扩散方程的非常数平衡解. 应用数学学报, 1986, 9(1): 60-78.

2. 椭圆型方程的正解分歧. 北京大学学报 (自然科学版), 1987, 23(1): 16-24.

[Lio] Lions P L. *On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations.* SIAM Review, 1982, 24: 441-467.

[Lu] Lunardi A. *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems.* Basel: Birkhauser, 1995.

[LMN] Lou Y, Martinez S, and Ni W M. *On* 3×3 *Lotka-Volterra competition systems with cross-diffusion.* Discrete Contin. Dyn. Syst., 2000, 6(1): 175-190.

[LN] Lou Y and Ni W M.

1. *Diffusion, self-diffusion and cross-diffusion.* J. Differential Equations, 1996, 131: 79-131.

2. *Diffusion vs cross-diffusion: an elliptic approach.* J. Differential Equations, 1999, 154: 157-190.

[LQ] 李正元, 钱敏. 向量场的旋转度理论及其应用. 北京大学出版社, 1982.

[LSU] Ladyzhenskaya O A, Solonnikov V A and Ural'ceva N N. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type.* AMS Translatios of Mathematical Monographs, 1968, 23.

[LtW] Li T and Wu Y P. *Linear and nonlinear exponential stability of traveling waves for hyperbolic systems with relaxation.* Comm. Math. Sci., 2009, 7: 571-593.

[LyW] Li Y and Wu Y P. *Stability of travelling waves with noncritical speeds for double degenerate Fisher type equations.* Discrete Contin. Dyn. Syst. B, 2008, 10: 143-170.

[M] Martin R H. *Asymptotic stability and critical points for nonlinear quasi-monotone parabolic systems.* J. Differential Equations, 1978, 30: 391-432.

[MN] Matsumura A and Nishihara K. *Asymptotic stability of traveling waves for scalar conservation laws with non-convex nonlinearity.* Commun. Math. Phys., 1994, 165: 83-96.

[MM] Miller R K and Michel A N. *Ordinary Differential Equations.* Academic Press, 1982.

[MNTT] Mimura M, Nishiura Y, Tesei A, and Tsujikawa T. *Coexistence problem for two competing species models with density-dependent diffusion.* Hiroshima Math. J., 1984, 14: 425-449.

[Ni] Ni W M. *Diffusion, cross-diffusion and their spike-layer steady states.* Notices Amer. Math. Soc., 1998, 45(1): 9-18.

[NW] Ni W M. and Wang X F. *On the first positive Neumann eigenvalue.* Discrete Contin. Dyn. Syst., 2007, 17(1): 1-19.

[OR] Osher S and Ralston J. L^1 *stability of travelling waves with applications to convective porous media flow.* Comm. Pure Appl. Math., 1982, 35: 737-749.

[Pao] Pao C V.

1. *Nonexistence of global solutions and bifurcation analysis for a boundary-value problem of parabolic type.* Proc. Amer. Math. Soc., 1977, 65: 245-251.

2. *Asymptotic stability and nonexistence of global solutions for a semilinear equations.* Pacific J. Math., 1979, 84: 191-187.

3. *On the blow-up behavior of solutions for a parabolic boundary value problem.* Applicable Anal., 1980, 10: 5-13.

4. *On nonlinear reaction-diffusion system.* J. Math. Anal. Appl., 1982, 87: 165-198.

[Paz] Pazy A. *Semigroup of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer, 1983.

[PW] Pego R L and Weinstein M I. *Eigenvalues, and instability of solitary waves.* Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, 1992, 340: 47-94.

[PaW] Pang P Y H and Wang M X.

1. *Qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system with diffusion.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 2003, 133A: 919-942.

2. *Strategy and stationary pattern in a three-species predator-prey model.* J. Differential Equations, 2004, 200(2): 245-273.

3. *Global asymptotic stability of positive steady states of a diffusive ratio-dependent prey-predator model.* Preprint.

[PrW] Protter M H and Weinberger H F. *Maximum Principles in Differential Equations.* Prentice Hall: Englewood Cliffs, 1967 (中译本: 叶其孝等译. 微分方程的最大值原理, 科学出版社, 1985).

[Ra] Rabinowitz P H.

1. *Pairs of positive solutions of nonlinear elliptic partial differential equations.* Indiana Univ. Math. J., 1973, 23: 173-186.

2. Some global results for nonlinear eigenvalue problems. J. Funct. Anal., 1971, 7: 487-513.

[RW] Redheffer R and Walter W.

1. *Invariant sets for systems of partial differential equations I, parabolic equations.* Arch. Rational Mech. Anal., 1978, 67: 41-52.

2. *Invariant sets for systems of partial differential equations II, first-order and ellptic euqations.* Arch. Rational Mech. Anal., 1980, 73: 19-29.

[Sa] Sattinger D H.

1. *Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems.* Indiana Univ. Math. J., 1972, 11: 979-1000.

2. *Topics in stability and bifurcation theory, Lecture Notes in Mathematics.* volume 309, Springer, 1973.

3. *On the Stability of Waves of Nonlinear Parabolic Systems.* Advances in Mathematics, 1976, 22: 312-355.

[Sm] Smoller J. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.* Springer, 1983.

[ShW] Shi J P and Wang X F. *On global bifurcation for quasilinear elliptic systems on bounded domains.* J. Differential Equations, 2009, 246: 2788-2812.

[SW] Smoller J and Wasserman A.

1. *Global bifurcation of steady-state solutions.* J. Differential Equations, 1981, 39: 269-290.

2. *Generic bifurcation of steady-state solutions.* J. Differential Equations, 1984, 52: 432-438.

[Sz] Szmolyan P. *Transversal heteroclinic and homoclinic orbits in singular perturbation problems.* J. Differential Equations, 1991, 92: 252-281.

[Ty] Tyson J J. *The Belousov-Zhabotinskii Reaction.* Lecture Note in Biomathematics, vol.10. Springer, 1976.

[Tu] Turing A. *The chemical basis of morphogenesis.* Philos. Trans. Royal Soc. B, 1952, 237: 37-72.

[Uc] Uchiyama K. *The behavior of solutions of some nonlinear diffusion equations for large time.* J. Math. Kyoto Univ., 1978, 18: 453-508.

[VVV] Volpert A, Volpert V A and Volpert V A. *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems.* Translations of Mathematical Monographs, Vol. 140. American Mathematical Society, 1994.

[W] 王明新.

1. 非线性抛物型方程. 科学出版社, 1993.

2. *Stationary patterns of strongly coupled predator-prey models.* J. Math. Anal. Appl.,

2004, 292(2): 484-505.

3. *Stationary patterns caused by cross-diffusion for a three-species prey-predator model.* Comput. Math. Appl., 2006, 52(5): 707-720.

4. 非线性椭圆型方程. 科学出版社, 2010.

[WaXY] Wang M X, Xiong S L and Ye Q X. *Explicit wave front solutions of Noyes-Field systems for B-Z reaction.* J. Math. Anal. Appl., 1994, 182(3): 705-717.

[We] Weinberger H F. *Invariant sets for weakly coupled parabolic and elliptic systems.* Rendiconti di Matematica, Serie VI, 1975, 8: 295-310.

[Wu] Wu Y P. *Travelling waves for a class of cross-diffusion systems with small parameters.* J. Differential Equations, 1995, 123: 1-34.

[WX] Wu Y P and Xing X X. *Stability of traveling waves with critical speeds for P-degree Fisher-type equations.* Discrete Contin. Dyn. Syst., 2008, 20: 1123-1139.

[WXY] Wu Y P, Xing X X and Ye Q X. *Stability of traveling waves with algebraic decay for n-degree Fisher-type equations.* Discrete Contin. Dyn. Syst., 2006, 16: 47-66.

[WYZ] Wang M X, Ye Q X and Zhang Q. *Traveling wave front solutions and their wave speeds for equations of Fisher type.* J. Beijing Inst. Tech., 1990, 10: 100-106.

[WZ] Wu Y P and Zhao X Z. *The existence and stability of travelling waves with transition layers for some singular cross-diffusion systems.* Physica D, 2005, 200(54): 325-358.

[Ye] 叶其孝. 反应扩散方程简介. 数学的实践与认识, 1984, 2: 48-56.

[YW] Ye Q X and Wang M X. *Travelling wave front Solutions of Noyes-Field system for Belousov-Zhabotinskii reaction.* Nonlinear Anal., 1987, 11: 1289-1302.

[Yo] Yosida K. *Functional Analysis*, 6th edition. Springer-Verlag.

[Zh] 张锦炎. 常微分方程几何理论与分支问题. 北京大学出版社, 1981.

[ZhQ] 张秦. *Equilibria of initial-boundary value problem for* $u_t = (u^m)_{xx} + (a - x^2)u$. J. Partial Differential Equations, Ser. A, 1988, 1(2): 82-96.

[ZH] Zumbrun K and Howard P. *Pointwise semigroup methods and stability of viscous shock waves.* Indiana Univ. Math. J., 1998, 47: 741-871.

《现代数学基础丛书》已出版书目

（按出版时间排序）

1 数理逻辑基础（上册） 1981.1 胡世华 陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙 吕以辇 陈志华 著
3 组合论（上册） 1981.10 柯 召 魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭 方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧 刘秀芳 著
7 数理逻辑基础（下册） 1982. 8 胡世华 陆钟万 著
8 群构造（上册） 1982.11 张远达 著
9 有限群构造（下册） 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬 丁同仁 黄文灶 董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔 邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论（上册） 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论（上册） 1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引（上册） 1987.12 徐明曜 著
26 组合论（下册） 1987.12 柯 召 魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李 忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著
29 同调代数 1988.2 周伯壎 著

64　惯性流形与近似惯性流形　2000.1　戴正德　郭柏灵　著
65　数学规划导论　2000.6　徐增堃　著
66　拓扑空间中的反例　2000.6　汪　林　杨富春　编著
67　拓扑空间论　2000.7　高国士　著
68　非经典数理逻辑与近似推理　2000.9　王国俊　著
69　序半群引论　2001.1　谢祥云　著
70　动力系统的定性与分支理论　2001.2　罗定军　张　祥　董梅芳　编著
71　随机分析学基础(第二版)　2001.3　黄志远　著
72　非线性动力系统分析引论　2001.9　盛昭瀚　马军海　著
73　高斯过程的样本轨道性质　2001.11　林正炎　陆传荣　张立新　著
74　数组合地图论　2001.11　刘彦佩　著
75　光滑映射的奇点理论　2002.1　李养成　著
76　动力系统的周期解与分支理论　2002.4　韩茂安　著
77　神经动力学模型方法和应用　2002.4　阮炯　顾凡及　蔡志杰　编著
78　同调论——代数拓扑之一　2002.7　沈信耀　著
79　金兹堡-朗道方程　2002.8　郭柏灵等　著
80　排队论基础　2002.10　孙荣恒　李建平　著
81　算子代数上线性映射引论　2002.12　侯晋川　崔建莲　著
82　微分方法中的变分方法　2003.2　陆文端　著
83　周期小波及其应用　2003.3　彭思龙　李登峰　谌秋辉　著
84　集值分析　2003.8　李　雷　吴从炘　著
85　数理逻辑引论与归结原理　2003.8　王国俊　著
86　强偏差定理与分析方法　2003.8　刘　文　著
87　椭圆与抛物型方程引论　2003.9　伍卓群　尹景学　王春朋　著
88　有限典型群子空间轨道生成的格(第二版)　2003.10　万哲先　霍元极　著
89　调和分析及其在偏微分方程中的应用(第二版)　2004.3　苗长兴　著
90　稳定性和单纯性理论　2004.6　史念东　著
91　发展方程数值计算方法　2004.6　黄明游　编著
92　传染病动力学的数学建模与研究　2004.8　马知恩　周义仓　王稳地　靳　祯　著
93　模李超代数　2004.9　张永正　刘文德　著
94　巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用　2005.1　王玉文　著
95　巴拿赫空间结构和算子理想　2005.3　钟怀杰　著
96　脉冲微分系统引论　2005.3　傅希林　闫宝强　刘衍胜　著
97　代数学中的 Frobenius 结构　2005.7　汪明义　著

98 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
99 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
100 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
101 代数群引论 2006.9 黎景辉 陈志杰 赵春来 著
102 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤 霍元极 麻常利 著
103 椭圆曲线公钥密码导引 2006.10 祝跃飞 张亚娟 著
104 凝固过程动力学与交界面稳定性引论 2006.12 徐鉴君 著
105 椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现 2006.12 王学理 裴定一 著
106 非线性演化方程的稳定性与分歧 2007.4 马 天 汪宁宏 著
107 正规族理论及其应用 2007.4 顾永兴 庞学诚 方明亮 著
108 组合网络理论 2007.5 徐俊明 著
109 矩阵的半张量积:理论与应用 2007.5 程代展 齐洪胜 著
110 鞅与 Banach 空间几何学 2007.5 刘培德 著
111 非线性常微分方程边值问题 2007.6 葛渭高 著
112 戴维-斯特瓦尔松方程 2007.5 戴正德 蒋慕蓉 李栋龙 著
113 广义哈密顿系统理论及其应用 2007.7 李继彬 赵晓华 刘正荣 著
114 Adams 谱序列和球面稳定同伦群 2007.7 林金坤 著
115 矩阵理论及其应用 2007.8 陈公宁 著
116 集值随机过程引论 2007.8 张文修 李寿梅 汪振鹏 高 勇 著
117 偏微分方程的调和分析方法 2008.1 苗长兴 张 波 著
118 拓扑动力系统概论 2008.1 叶向东 黄 文 邵 松 著
119 线性微分方程的非线性扰动(第二版) 2008.3 徐登洲 马如云 著
120 数组合地图论(第二版) 2008.3 刘彦佩 著
121 半群的 S-系理论(第二版) 2008.3 刘仲奎 乔虎生 著
122 巴拿赫空间引论(第二版) 2008.4 定光桂 著
123 拓扑空间论(第二版) 2008.4 高国士 著
124 非经典数理逻辑与近似推理(第二版) 2008.5 王国俊 著
125 非参数蒙特卡罗检验及其应用 2008.8 朱力行 许王莉 著
126 Camassa-Holm 方程 2008.8 郭柏灵 田立新 杨灵娥 殷朝阳 著
127 环与代数(第二版) 2009.1 刘绍学 郭晋云 朱 彬 韩 阳 著
128 泛函微分方程的相空间理论及应用 2009.4 王 克 范 猛 著
129 概率论基础(第二版) 2009.8 严士健 王隽骧 刘秀芳 著
130 自相似集的结构 2010.1 周作领 瞿成勤 朱智伟 著
131 现代统计研究基础 2010.3 王启华 史宁中 耿 直 主编

(O-4469.0101)

www.sciencep.com



科学出版中心 数理分社
电话：(010) 64033664
Email：math-phy@mail.sciencep.com

销售分类建议：高等数学

定 价：98.00 元